Álgebra linear

1. Seja A uma álgebra sobre um corpo K. Se D_1 e D_2 são derivações de A, demonstre que $D_1 \circ D_2$ não é necessariamente uma derivação (enconter um contra-exemplo), mas que $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ sempre é uma derivação de A.

2. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Denote por $V^\vee = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ o espaçõ de mapas lineares $\lambda : V \to \mathbb{R}$. Um elemento λ de $V^\vee$ é chamado um *covetor*. Se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base para V, para cada $j = 1, \ldots, n$, define $\alpha^i \in V^\vee$ por $\alpha^i(\sum_{j=1}^n v^j e_j) = v^i$. Demonstre que $\{\alpha^i\}$ é uma base para $V^\vee$. Isso é dizer que $V^\vee$ tem a mesma dimensão de V.

3. Escreva a permutação (12345) como um produto de transposições.

4. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma função $f : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$, definida no k-vez produto cartesiano de V é k-**linear** se para todo $i = 1, \ldots, k$ e para todo $v_1, \ldots, v_k \in V$, a função
$$w \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_k)$$
é linear. Seja $L_k(V)$ o conjunto (o espaço vetorial) de funções k-lineares em V. $f \in L_k(V)$ é **simétrica** se para toda permutação σ do conjunto $\{1, \ldots, k\}$ e para todo $v_1, \ldots, v_k \in V$,
$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = f(v_1, \ldots, v_k).$$
f é **alternativa** ou *anti-simétrica* se para toda σ e todo $v_1, \ldots, v_k \in V$,
$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\mathrm{sgn}(\sigma) f(v_1, \ldots, v_k)$$
onde $\mathrm{sgn}(\sigma)$ é o sinal de σ ($= \pm 1$) como uma permutação. Se $\dim(V) = n$, calcule a dimensões (1) do espaço do funções k-lineares, (2) do espaço de funções k-lineares simétricas, e (3) do espaço de funções k-lineares alternativas em V.

5. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e seja $\{e_i\}$ uma base de V e $\{\alpha^i\}$ a base dual de V^*. Isso é dizer que $\alpha^i(e_i) = 1$ e $\alpha^i(e_j) = 0$ se $i \neq j$. Consideramos o produto tensorial de $\alpha^i \otimes \alpha^j$, definido por
$$\alpha^i \otimes \alpha^j(v, w) = v^i w^j,$$
para $v = \sum_k v^k e_k$, $w = \sum_l w^l e^l \in V$. Define a função bilinear $f : V \times V \to \mathbb{R}$ por
$$f(v, w) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} v^i w^j,$$
para $g_{ij} \in \mathbb{R}$. Escreva f como uma combinação linear dos elementos $\alpha^i \otimes \alpha^j$.

6. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear não-nulo. Demonstre que a dimensão do seu núcleo $\dim \ker f = n - 1$. Um subespaço linear de V de dimensão $n - 1$ é chamado um hiper-plano em V.

   Demonstre que um funcional linear não-nulo em V é determinado ao menos mulptiplicação por um constante por seu núcleo, um hiper-plano em V. Demonstre que se f e $g : V \to \mathbb{R}$ são funcionais lineares não-nulos com $\ker f = \ker g$ então $g = cf$ para algum constante $c \in \mathbb{R}$.

7. Suponha que dois conjuntos de covetores em V, $\beta^1, \ldots, \beta^k$ e $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$ são relacionados por
$$\beta^i = \sum_{j=1}^k a^i_j \gamma^j,$$
para alguma matriz $A = (a^i_j)$. Demonstre que
$$\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^k = (\det A) \gamma^1 \wedge \cdots \wedge \gamma^k.$$

Cálculo básico

1. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Uma aplicação de classe C^∞, $F : U \to V$ é chamado um *difeomorfismo* se for bijetiva e se sua inversa $F^{-1} : V \to U$ for de classe C^∞.

   (a) Demonstre que a função $f : (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, é um difeomorfismo.

   (b) Sejam a, b números reais com $a < b$. Encontre uma função linear $h : (a, b) \to (-1, 1)$, assim demonstrando que quaisquer dois intervalos abertos são difeomorfos.

   A função composta $f \circ h : (a, b) \to \mathbb{R}$ é então um difeomorfismo de um intervalo aberto com $\mathbb{R}$.

   (c) A função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é um difeomorfismo. Utilize esse fato para demonstrar que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, os intervalos $\mathbb{R}$, $(-\infty, a)$ e (b, ∞) são difeomorfos.

   (d) Demonstre que a aplicação

   $$f : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = (\mathrm{tg}(x_1), \dots, \mathrm{tg}(x_n))$$

   é um difeomorfismo.

2. Consideramos a função $f(x)$ definida em $\mathbb{R}$,

   $$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

   (i) Demonstre por indução que para $x > 0$ e $k \geq 0$, a k-ésima derivada $f^{(k)}(x)$ tem a forma $p_{2k}(\frac{1}{x})e^{-1/x}$, para algum polinómio $p_{2k}(y)$ de grau $2k$ em y.

   (ii) Demonstre que f é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ e que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \geq 0$.

3. (**Um difeomorfismo entre uma bola aberta e $\mathbb{R}^n$**)

   Sejam $\mathbf{0} = (0, 0)$ a origem em $\mathbb{R}^2$ e $B(\mathbf{0}, 1)$ o disco unitário em $\mathbb{R}$ centrado em $\mathbf{0}$. Seja S a hemi-esfera inferior

   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z < 1\},$$

   e observe que a aplicação $f : B(0, 1) \to S$, $f(a, b) = (a, b, 1 - \sqrt{1 - a^2 - b^2})$ é uma bijeção.

   (a) A *projeção estereográfica* $g : S \to \mathbb{R}^2$ a partir do ponto $(0, 0, 1)$ é o mapa que envia o ponto $(a, b, c) \in S$ para o ponto (u, v), onde $(u, v, 0)$ é o (único) ponto de interseção da linha reta entre $(0, 0, 1)$ e (a, b, c) com o xy-plano. Demonstre que a projeção seja dada por

   $$(a, b, c) \mapsto \left(\frac{a}{1 - c}, \frac{b}{1 - c}\right), \text{ onde } c = 1 - \sqrt{1 - a^2 - b^2},$$

   e que a sua inversa seja dada por

   $$(u, v) \mapsto \left(\frac{u}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}\right).$$

   (b) Fazer a composição de f e g, nos dá a aplicação $h = g \circ f : B(\mathbf{0}, 1) \to \mathbb{R}^2$,

   $$h(a, b) = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}\right)$$

   (verifique essa fórmula). Encontre uma fórmula para $h^{-1}(u, v) = (f^{-1} \circ g^{-1})(u, v)$, e conclua que h é um difeomorfismo entre $B(0, 1)$ e $\mathbb{R}^2$.

(c) Generalize esse resultado para $\mathbb{R}^n$.

4. (a) Sejam f uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$. Demonstre que existe uma função g de classe C^∞ tal que $f(x) = f(p) + (x - p)g(x)$. (Dica: considere $f(p + t(x - p))$ como uma função de t).

   (b) Demonstre que se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞, então existe funções suaves g_{11}, g_{12}, g_{22} em $\mathbb{R}^2$ tais que

$$g(x, y) = g(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + x^2 g_{11}(x, y) + xy g_{12}(x, y) + y^2 g_{22}(x, y).$$

5. Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ e C_p^∞ o conjunto de germes de funções suaves (de classe C^∞) em p. Faça cuidadosamente a definição de adição, multiplicação e multiplicação escalar em C_p^∞. Demonstre que adição em C_p^∞ é comutativa.

Topologia elementar

1. Um espaço topológico X é *Hausdorff* se para cada dois pontos distinto $p, q \in X$, existem conjuntos abertos $U, V \subseteq X$ tais que $p \in U$, $q \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. O diagonal $\Delta \subseteq X \times X$ é o conjunto

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}.$$

   Demonstre que X é Hausdorff se e somente se Δ é fechado em $X \times X$ na topologia de produto.

Propriedades básicas de variedades

1. Consideramos a esfera bidimensional $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Define em S^2 as cartas (U_i, ϕ_i) por

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x, y, z) \in S^2 \ ; \ x > 0\} & \phi_1(x, y, z) &= (y, z), \\
U_2 &= \{(x, y, z) \in S^2 \ ; \ x < 0\} & \phi_2(x, y, z) &= (y, z), \\
U_3 &= \{(x, y, z) \in S^2 \ ; \ y > 0\} & \phi_3(x, y, z) &= (x, z), \\
U_4 &= \{(x, y, z) \in S^2 \ ; \ y < 0\} & \phi_4(x, y, z) &= (x, z), \\
U_5 &= \{(x, y, z) \in S^2 \ ; \ z > 0\} & \phi_5(x, y, z) &= (x, y), \\
U_6 &= \{(x, y, z) \in S^2 \ ; \ z < 0\} & \phi_6(x, y, z) &= (x, y).
\end{aligned}$$

   Demonstre que os conjuntos U_i são abertos e cobram S^2. Descreve explicitamente o conjunto $U_1 \cap U_4 \subseteq S^2$ e o conjunto $\phi_4(U_1 \cap U_4) \subseteq \mathbb{R}^2$. Demonstre que $\phi_1 \circ \phi_4^{-1}$ é de classe C^∞ em $\phi_4(U_1 \cap U_4)$.

2. Demonstre que o espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$ é compacto.

Espaço tangente

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(u, v, w) = F(x, y) = (x, y, xy).$$

   Seja $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcule $F_{*,p}(\partial/\partial x)$ como uma combinação linear de $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ e $\partial/\partial w$ em $F(p)$.

2. Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Para cada $p \in \mathbb{R}^n$ existe uma identificação $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ dada por
$$\sum_i a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \longmapsto \mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n).$$
Demonstre que o diferencial $L_{*,p} : T_p\mathbb{R}^n \to T_{L(p)}\mathbb{R}^m$ é igual a L mesmo, ao menos as identificações acima.

3. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado, defina $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (u, v) = F(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Seja $X = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$. Se $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $F_*(X_p) = (a\partial/\partial u + b\partial/\partial v)|_{F(p)}$, encontre a e b em termos de x, e α.

4. Sejam x, y as coordenadas padrões em $\mathbb{R}^2$, e seja U o conjunto aberto
$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ ;\ x \geq 0\}.$$
Em U as corredenadas polares r, θ são dadas, unicamente, pela expressão
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta, r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi. \end{aligned}$$
Encontre $\partial/\partial r$ e $\partial/\partial\theta$ em termos de $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$.

5. Seja $c : (a, b) \to M$ uma curva em M. Definimos o vetor de velocidade da curva por
$$c'(t_0) = c_{*,t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{c(t_0)}M.$$
No caso $M = \mathbb{R}$, demonstre, usando a definição de c_*, que $c'(t_0) = \dot{c}(t_0)\, d/dt|_{t_0}$, onde $\dot{c}$ é a derivada normal de uma função com valores em $\mathbb{R}$.

6. Sejam x, y as coordenadas padrões em $\mathbb{R}^2$, e seja U o conjunto aberto
$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ ;\ x \geq 0\}.$$
Em U as coordenadas polares r, θ são unicamente determindas por
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta, r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi. \end{aligned}$$
Encontre $\partial/\partial r$ e $\partial/\partial\theta$ em termos de $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$.

Aplicações suaves entre variedades

1. Seja $f : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades diferenciaveis. Demonstre que se $f_{*,p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ é a aplicação nula para todo $p \in M$, então f é constante em todo componente conexo de M.

2. (a) Demonstre que se ambas M e N tem mesma dimensão n e se $f : M \to N$ é uma imersão, então f é um mapa aberto.
   (b) Se M e N são n-variedades com M compacta e N conexa e se f é uma imersão, então demonstre que f é sobrejetiva.

3. Seja $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação
$$f([x : y : z]) = (yz, xz, xy)$$
onde $(x, y, z) \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e $[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2$ é a linha gerada por (x, y, z) (quer dizer, um ponto em $\mathbb{RP}^2$.

   Demonstre que f falha de ser uma imersão em apenas seis pontos de $\mathbb{RP}^2$. Calcule as imagens desses pontos.

4. Demonstre que se $F : M^n \to N$ tem posto constante igual a k numa vizinhança de $F^{-1}(y)$, para $y \in N$ fixado, então o conjunto $F^{-1}(y)$ é uma subvariedade fechada de M de dimensão $n - k$.

5. Seja $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades suaves e seja $p \in M$. Se $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ é o diferencial de F em p, verifique que F_* é uma derivação de germes de funções em $F(p)$.

6. Para todo $p \in \mathbb{R}^n$, existe uma identificação canônica $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ dada por
$$\sum_i a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \longmapsto \mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n).$$
   Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Demonstre que o diferencial $L_{*,p} : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ coincide com L mesmo, depois de fazer a identificação acima.

7. Fixe um número real α e define a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (u, v) = F(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
   Seja $X = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$. Se $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $F_*(X_p) = (a\partial/\partial u + b\partial/\partial v)|_{F(p)}$, encontre a e b em termos de x, y e α.

8. Sejam x, y, z, w as coordenadas padrões em $\mathbb{R}^4$. Será que o conjunto de soluções da equação algébrica $x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 1$ em $\mathbb{R}^4$ é uma variedades diferenciável? Explica por que sim ou não.

9. O toro (bidimensional) é a variedade $S^1 \times S^1$. Consideramos S^1 como o círculo unitário no plano complexo. Definimos o mapa $\varphi : \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ por $\varphi(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t})$ onde α é um número irracional. Demonstre que φ é uma imersão injetiva de $\mathbb{R}$ no toro, e que a imagem de φ é densa.

10. Um polinómio $F(x_0), \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n]$ é homogêneo de grau k se é uma combinação linear dos monómios $x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$ onde $i_0 + \cdots + i_n = k$. Seja F um polinómio homogêneo de grau k. Demonstre
    (a) para todo $t \in \mathbb{R}$, $F(tx_0, \ldots, tx_n) = t^k F(x_0, \ldots, x_n)$,
    (b)
$$\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = kF.$$

11. No espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$, um polinômio homogênio $F(x_0, \dots, x_n)$ de grau k não é uma função, por que seu valor no ponto $[a_0, \dots, a_n]$ (em coordenadas homogêneas) não é unicamente determinada. Porém, o conjunto de zeros em $\mathbb{RP}^n$ de um polinômio homogêneo $F(x_0, \dots, x_n)$ é bem definido, pois $F(a_0, \dots, a_n) = 0$ se e somente se

$$F(ta_0, \dots, ta_n) = t^k F(a_0, \dots, a_n) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O zero locus de finitamente polinômios em $\mathbb{RP}^n$ é chamado uma *variedade projetiva real*. Uma variedade projetiva definida por um polinômio de grau k é chamada uma hipersuperfície de grau k.

Para $n = 2$, demonstre que a hipersuperfície $Z(F)$ definida por $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ é uma subvariedade suave se $\partial F/\partial x_0$, $\partial F/\partial x_1$ e $\partial F/\partial x_2$ não estão simultaneamente zero em $Z(F)$.

(Dica: As coordenadas padrões em U_0, que é homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, são $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$. Em U_0, $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^k F(1, x_1/x_0, x_2/x_0) = x_0^k F(1, x, y)$. Define $f(x, y) = F(1, x, y)$. Então f e F tem o mesmo conjunto de zeros em U_0.)

Para mais informação sobre o espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$, olha seções 7.6 e 7.7 do livro de Tu.

12. A estrutura diferenciável em $M = \mathbb{R}$ foi obtida considerando o átlas $\mathscr{A}$ como a coleção maximal de cartas que contem a aplicação de identidade. Seja $\mathscr{A}_1$ a coleção maximal de cartas em $\mathbb{R}$ que são *compatíveis* com o homeomorfismo $t \mapsto t^3$. Demonstre que $\mathscr{A} \neq \mathscr{A}_1$, mas que as variedades $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ e $(\mathbb{R}, \mathscr{A}_1)$ são difeomorfas.

13. Seja M uma variedade diferenciável com atlas de cartas $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Construa explicitamente uma estrutura diferenciável para o fibrado cotangente T^*M com respeito a qual a projeção $T^*M \to M$ é uma submersão.

14. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Para quais entre os pontos $p = (0, 0)$, $p = (1/3, 1/3)$ e $p = (-1/3. -1/3)$ é o conjunto $f^{-1}(f(p))$ uma subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^2$.

15. Demonstre que uma aplicação C^∞ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ não pode ser injetiva.

16. Vamos estudar explicitamente o toro como uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$. Sejam $0 < r < R$ números positivos. Consideramos o círculo no (x, z)-plano $(x - R)^2 + z^2 = r^2$. Seja $T \subseteq \mathbb{R}^3$ a superfícies de revolução obtida girando esse círculo no eixo-z.

    (a) Encontre uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(x, y, z) = 0\}$.

    (b) Demonstre que 0 é um valor regular para essa função, assim demonstrando que T é uma subvariedade regular de $\mathbb{R}^3$.

Observamos que se f satisfaz as condições de (a), então f^2 também satisfaz isso. O valor 0 poderia ser um valor regular de f mas não de f^2. Ponto (b) então pede que você encontre uma função f que satisfaça (a) e que tenha 0 como um valor regular.

Partições de unidade

1. Uma estrutura Riemanniana numa variedade diferenciável M é uma escolha suave de um produto escalar (ou interior) $\langle\ ,\ \rangle_p$ para todo espaço tangente T_pM. A escolha é suave no sentido de que se X e Y são campos vetoriais suaves em M, então a função $\langle X, Y\rangle \in C^\infty(M)$ é uma função suave em M. Demonstre que toda variedade diferenciável admite uma uma estrutura Riemanniana (não única). Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade diferenciável junto com uma estrutura Riemanniana.

Campos vetoriaias

1. Seja $\gamma(t)$ uma curva integral do campo vetorial em M. Suponha que $\dot\gamma(t) = 0$ para algum t. Demonstre que γ é a aplicação constante. Isso quer dizer que a sua imagem consiste-se de um ponto só.

Formas diferenciais

1. Suponha que as coordenadas padrões em $\mathbb{R}^3$ são dadas por ρ, ϕ e θ. Se $x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$ e $z = \rho\cos\phi$, então calcule dx, dy, dz e $dx\wedge dy\wedge dz$ em termos de $d\rho, d\phi$ e $d\theta$. Observe que não é necessário supor que ρ, ϕ, θ são coordenadas. É suficiente que sejam apenas funções em $\mathbb{R}^3$, ou em qualquer outra variedade.

2. Seja $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ e $\beta \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ dadas por
$$\begin{aligned}\alpha &= a_1dx^1 + a_2dx^2 + a_3dx^3,\\ \beta &= b_1dx^2\wedge dx^3 + b_2dx^3\wedge dx^1 + b_3dx^1\wedge dx^2.\end{aligned}$$
Escreve $\alpha\wedge\beta$ como um múltiplo de $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$.

3. Seja M uma variedade, e suponha que $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ e $(V, \phi = (y^1, \dots, y^n))$ são cartas de coordenadas em M com $U\cap V \neq \emptyset$. Então uma 1-forma ω em $U\cap V$ tem as duas expressões diferentes
$$\omega = \sum_j a_jjdx^j = \sum_i b_idy^i.$$
Encontre uma fórmula para a_j em termos de b_i.

4. Multiplicação no círculo unitário S^1, visto como um subconjunto do plano complexo, é dado por
$$e^{it}\cdot e^{iu} = e^{i(t+u)}, \quad t, u \in \mathbb{R}.$$
Ou, pegando as partes reais e imaginárias, se $g = (\cos t, \operatorname{sen} t) \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, multiplicação a esquerda $l_g : S^1 \to S^1$ é dada por
$$l_g(x, y) = ((\cos t)x - (\operatorname{sen} t)y, (\operatorname{sen} t)x + (\cos t)y).$$
Seja $\omega = -ydx + xdy$ a 1-forma em $\mathbb{R}^2$ que restringimos para S^1. Demonstre que para todo $g \in S^1$, nós temos $l_g^*\omega = \omega$.

5. Seja $\pi : M \to N$ uma submersão sobjetiva. Demonstre que para todo k, o mapa $\pi^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ é injetiva.

6. Seja $S \subseteq M$ uma subvariedade fechada, com $i : S \to M$ a aplicação de inclusão. Demonstre que para todo k, o mapa $i^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(S)$ é sobjetiva.

7. Encontre um difeomorfismo explicito $f : S^n \to S^n$ da esfera que inverte orientação.