EXERCÍCIOS E QUESTÕES EM GEOMETRIA RIEMANNIANA

Contents

1. Álgebra Linear

Nessas questões nós consideramos V um espaço vetorial real de dimensão n.

1.1. Um *produto interior* em V é uma aplicação $g = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) para todo $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $g(\lambda u + \mu v, w) = \lambda g(u, w) + \mu g(v, w)$ e $g(w, \lambda u + \mu v) = \lambda g(w, u) + \mu g(w, v)$ (blinearidade),

Date: August 19, 2018.

(2) para todo $u, v \in V$, $g(u,v) = g(v,u)$ (simetria),
(3) para todo $u \in V$, $g(u,u) \geq 0$, e $g(u,u) = 0$ somente se $u = 0 \in V$.

Usaremos a notação g e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ equivalentemente. Um produto interior em V induz uma norma e uma métrica (como uma função de distância) em V. A norma é definida por $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ e a distância $d(v,w) = \|v - w\|$. O exemplo padrão é de $V = \mathbb{R}^n$ com $\langle v, w \rangle = v^T w$, considerando v e w como vetores colunas.

Seja (V, g) um espaço vetorial com um produto interior. Demonstre que a norma satisfaz

$$\begin{aligned} \|v\| &> 0, \text{ se } v \in V \setminus \{0\}, \\ \|cv\| &= |c|\|v\| \quad c \in \mathbb{R},\ v \in V, \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\|, \\ |\langle v, w \rangle| &\leq \|v\|\|w\|. \end{aligned}$$

1.2. Seja V^* o espaço dual de V. Isso é dizer, V^* é o espação de todas as aplicações lineares $\alpha : V \to \mathbb{R}$. Dado covetores $\alpha, \beta : V \to \mathbb{R}$ elementos de V^*, podemos definir o produto tensorial $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes V^*$ e considerar isso uma aplicação bilinear em V,

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta &: V \times V \to \mathbb{R}, \\ \alpha \otimes \beta(v, w) &= \alpha(v)\beta(w). \end{aligned}$$

(1) Demonstre que toda forma bilinear em V pode ser expressa como uma soma de produtos desse tipo.
(2) Calcule a dimensão de $V^* \otimes V^*$.
(3) Considere o conjunto $S^2(V^*)$ de aplicações bilineares **simétricas** em V. Verifique que é um espaço vetorial e calcule a sua dimensão. Observamos que um produto interior em V é um elemento de $S^2(V^*)$, com a condição de positividade.
(4) Seja $\{e_i\}$ uma base para V, e seja $\{e^i\}$ a base dual de V^* (veja a questão 1.4). Define elementos de $S^2(V^*)$ por

$$\begin{aligned} e^i \circ e^i &= e^i \otimes e^i, \\ e^i \circ e^j &= e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i. \end{aligned}$$

Verifique que $\{e^i \circ e^j\}_{i \leq j}$ forma uma base para $S^2(V^*)$ e que

$$e^i \circ e^j(e_k, e_l) = \begin{cases} 1 & \text{se } \{i,j\} = \{k,l\}, \\ 0 & \text{se } \{i,j\} \neq \{k,l\}. \end{cases}$$

1.3.

(1) Seja $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interior em V. Demonstre que $g = \sum_{i \leq j} g_{ij} e^i \circ e^j$ onde $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$.
(2) Demonstre que a matriz (g_{ij}) é invertível, simétrica e que todos os autovalores são positivos.

1.4. Seja V^* o espaço dual de V. Isso é dizer, V^* é o espação de todas as aplicações lineares $\alpha : V \to \mathbb{R}$.

(1) Suponha que $\{e_i\}$ é uma base para V. Verifique que existe uma única base $\{e^j\}$ para V^* que satisfaz a condição

$$e^j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Observamos que essa correspondência é independente de um produto interior em V. Chamamos $\{e^i\}$ a **base dual** de $\{e_i\}$.

(2) Demonstre que um produto interior g determine um isomorfismo entre V e V^* pelo seguinte : dado $v \in V$, seja $v^\flat \in V^*$ o covetor

$$\begin{aligned} \flat &: V \to V^*, \\ v^\flat(w) &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Demonstre que $\flat$ é um isomorfismo.

(3) Seja $\{e_i\}$ uma base de V, não necessariamente ortonormal, e defina $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Se $v = \sum_i v^i e_i \in V$, para $v^i \in \mathbb{R}$, demonstre que $v^\flat = \sum_i v_i e^i$ onde $v_i = \sum_j g_{ij} v^j$.

(4) Denota por $g^{-1} = (g^{ij})$ a matriz inversa de $g = (g_{ij})$. Demonstre que o inverso de $\flat$, que denotaremos por $\#$, é dado pelo seguinte. Se $\alpha = \sum_i \alpha_i e^i$, então $\alpha^\# = \sum_i \alpha^i e_i$ onde $\alpha^i = \sum_j g^{ij} \alpha_j$.

Por essa razão, chamamos os isomorfismos entre V e V^* induzidos pelo produto interior os isomorfismos musicais. As mapas $\flat$ e $\#$ baixam e levantam os índices nos coeficientes de vetores e covetores. Reparamos aqui do número e localização dos índices desses vários objetos. O coeficente no vetor $v = \sum_i v^i e_i \in V$ tem um índice por cima. Um covetor $\alpha = \sum_i v_i e^i \in V^*$ tem coeficientes com um índice inferior. A forma bilinear simétrica $g = \sum_{i \le j} g_{ij} e^i \circ e^j$ tem dois índices inferiores.

Observamos nessa questão que se M é uma variedade diferenciável e $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ é a base que vem através de uma carta de coordenadas, então a base dual é dada pelas 1-formas $\{dx^i\}$.

1.5.

(1) Suponha que $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de V e sejam $\{e_i^\flat\}$ as imagens em V^* dos vetores e_i. Demonstre que $e_i^\flat = e^i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Isso é dizer, demonstre que os $e_i^\flat$ satisfazem

$$e_j^\flat(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Isso é dizer que nesse caso, $\{e_i^\flat\}$ coincide com a base dual de V^*.

(2) Seja $\{e_i\}$ uma base de V, não necessariamente ortonormal, e defina $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Denota por $g^{-1} = (g^{ij})$ a matriz inversa de $g = (g_{ij})$. Demonstre que, na notação das ítens anteriores, $e^i = \sum_j g^{ij} e_j^\flat$.

1.6.

(1) Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Mostra como T canonicamente induz uma mapa $T^* : W^* \to V^*$, e que T é injetiva se e somente se T^* é sobrejetiva. Especificamente, demonstre que $\mathrm{Im} T^* = \{\alpha \in V^* \; ; \; \alpha(v) = 0 \; \forall v \in \ker T\}$.

Essa mapa tem vários nomes. Poderia ser chamado a **aplicação dual**, mas talvez mais frequentemente seja chamado o **pull-back** de T, por que T puxa covetores para trás, de W para V.

(2) Mostra que se g_W é um produto interior em W, T induz naturalmente uma forma bilinear simétrica em V, que é um produto interior se e somente se T é injetiva.

(3) Mostre que se $V \subseteq W$ é um subespaço vetorial, então um produto interior em W restrige-se a um produto interior em V.

1.7. Seja (V, g) um espaço vetorial equipado com um produto vetorial. Definimos o **adjunto** ou **transposto** de uma mapa linear $T : V \to V$ pela composição $T^\dagger = \# \circ T^* \circ \flat : V \to V^* \to V^* \to V$. Demonstre que $T^\dagger$ satisfaz $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^\dagger w\rangle$ para todo $v, w \in V$.

1.8. Um produto interior em V determine naturalmente um produto interior em V^*. Uma maneira para ver isso é observar que $\# : V^* \to V$ é um isomorfismo e definido, para $\alpha, \beta \in V^*$,

$$\langle \alpha, \beta\rangle_{V^*} = \langle \alpha^\#, \beta^\#\rangle_V .$$

Seja $\{e_i\}$ uma base para V, com $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle_V$. Demonstre que se $\langle e^i, e^j\rangle_{V^*} = g^{ij}$.

1.9. Consideramos um produto interior num espaço vetorial. Seja $V = M(m \times n, \mathbb{R})$ o espaço de $m \times n$ matrizes reais. Para $A = (A^i_j)$ e $B = (B^i_j)$, definimos o produto interior

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} A^i_j B^i_j = \operatorname{tr}\left(A^t B\right).$$

(1) Verifique a segunda igualdade aqui acima.
(2) Se identificamos $M(m \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$ na óbvia maneira, demonstre que esse produto interior coincide com o produto Euclideano padrão.
(3) Demonstre que uma expressão parecida pode ser utilizada para definir um produto interior em $End(V)$, o espaço de endomorfismos lineares de V, um espaço vetorial equipado com um produto interior g. Especificamente, demonstre que a definição que você dá independe de todas as escolhas que você faz.
(4) Para matrizes $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ e $B \in M(n \times k, \mathbb{R})$, demonstre que

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

(5) Demonstre que se $R \in O(n)$ e $S \in O(m)$ são matrizes ortogonais, então

$$\|A\|^2 = \|AR\|^2 = \|SA\|^2.$$

1.10. Demonstre que o conjunto de produtos interiores em V é aberto, como um subconjunto de $S^2(V^*)$.

2. Variedades

2.1. Demonstre que as duas cartas para a esfera S^2 determinadas pelas aplicações seguintes são compatíveis, no sentido da aula :

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1} &: (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to S^2, \\
\varphi^{-1}(r, \theta) &= (\operatorname{sen}(r)\cos(\theta), \operatorname{sen}(r)\operatorname{sen}(\theta), \cos(r)), \\
\psi^{-1} &: \mathbb{R}^2 \to S^2, \\
\psi^{-1}(y_1, y_2) &= \left(\frac{2y_1}{1 + |y|^2}, \frac{2y_2}{1 + |y|^2}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right)
\end{aligned}$$

onde $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2$. Aqui, ϕ^{-1} é a aplicação inversa da carta $\varphi : U \subseteq S^2 \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Diremos que o sistema de coordenadas (φ, U) é de **coordenadas esféricas.**

2.2. A aplicação de Hopf é definida como

$$\begin{aligned} \pi &: S^3 \to S^2, \\ \pi(z_1, z_2) &= (\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2), \mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2) = (z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \end{aligned}$$

em que, na segunda expressão, o primeiro termo é considerado um número complexo. Demonstre que a aplicação de Hopf é diferenciável.

2.3.

(1) Seja $\frac{\partial}{\partial r}$ o campo radial em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial}{\partial x}$ o campo vetorial da coordenada retilinear em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Calcule o colchete de Lie $[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x}]$. Aqui nós observamos que r e x são relacionados por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos(\theta)$.

(2) Considere $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Em todo ponto $p \in S^2$ considere a projeção ortogonal $\pi_p : T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$. Seja $\frac{\partial}{\partial z}$ o campo vetorial cordenada retilinear em $\mathbb{R}^3$ e $Z = \pi_p(\frac{\partial}{\partial z})$ o campo vetorial em S^2 obtida considerando em cada ponto o componente de $\frac{\partial}{\partial z}$ tangente a S^2. Seja X o campo

$$X(x, y, z) = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} (\cos(\theta)x + \mathrm{sen}(\theta)y, -\mathrm{sen}(\theta)x + \cos(\theta)y, z)\,,$$

onde $(x, y, z) \in S^2$. Calcule o colchete de Lie $[Z, X]$.

(Dica : escreva os dois campos em coordenadas, em que o colchete pode ser calculada explicitamente).

2.4. (**Espaço projetivo complexo**) Denote por $\mathbb{CP}^n$ o conjunto de todos os subespaços vetoriais de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão 1. Isso é dizer, linhas retas em $\mathbb{C}^{n+1}$, com a topologia quociente herdada pela projeção natural $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$. Demonstre que $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade compacta)suave de dimensão $2n$, com um atlas de cartas análogo ao que viu para $\mathbb{RP}^n$.

Usamos a correspondência

$$(x^0 + iy^0, \ldots, x^n + iy^n) \longleftrightarrow (x^0, y^0, x^1, \ldots, x^n, y^n)$$

para identificar $\mathbb{C}^{n+1}$ com $\mathbb{R}^{2n+2}$.

2.5. Veremos que as duas definições do espaço tangente de uma variedade são equivalentes.

Um **elemento função suave** (smooth function element) numa variedade M é um duplo ordenado (f, U), onde U é um subconjunto aberto de M e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Dado um ponto $p \in M$, definimos uma relação de equivalência no conjunto de elementos função suave cujos domínios contem o ponto p dizendo que $(f, U) \sim (g, V)$ se $f \equiv g$ em alguma vizinhança de p. A class de equivanência de um elemento função (f, U) é chamado o **germe** de f em p e denotada por $[f]_p$. O conjunto de todos os germes de funções suaves em p é um espaço vetorial denotado por $C_p^\infty(M)$. Além disso, germes de funções podem ser multiplcados para que $C_p^\infty(M)$ tenha a estrutura de um anel comutativa com identidade.

Uma **derivação** em $C_p^\infty(M)$ é uma aplicação linear $v : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$v[fg]_p = f(p)v[g]_p + g(p)v[f]_p.$$

Igualmente, podemos definir uma relação de equivalência sobre curvas que passam por um ponto.

Seja $p \in M$ um ponto. Consideramos intervalos abertos J_1 e J_2 em $\mathbb{R}$ que contem 0 e aplicações diferenciáveis $\gamma_1 : J_1 \to M$ e $\gamma_2 : J_2 \to M$ com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Dizemos que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se existe uma carta de coordenadas definida numa vizinhança de p, $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi(\gamma_1(t))) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi(\gamma_2(t))) .$$

Denotaremos a classe de equivalência de uma curva γ que passa por p em 0 por $[\gamma]_p$.

(1) Demonstre que a segunda relação sobre curvas independe da carta de coordenadas utilizada na definição.
(2) Demonstre que uma derivação v canonicamente determine uma única classe de equivalência de curvas que passam por p em 0.
(3) Reciprocamente, demonstre que uma classe de curvas $[\gamma]_p$ define canonicamente uma derivação.

Nessa maneira, essas duas definições do espaço tangente da variedade em p são equivalentes.

2.6.

(1) Anuncie e demonstre os teoremas da função inversa e da função implícita.
(2) Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in N$ um valor regular de f. Isso é dizer que para todo $x \in M$ com $f(x) = p$, a derivada $df_x = f_{*,x} : T_xM \to T_pN$ é sobrejetiva. Demonstre que a pré-imagem de p, $f^{-1}(p) = \{x \in M \ ; \ f(x) = p\}$ é uma subvariedade diferenciável.

2.7. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Para quaisquer bases $\{e_i\}$ e $\{f_i\}$ de V, sabemos que existe uma matriz invertível $A = (a_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ tal que $e_j = \sum_i f_i a_{ij}$. Dizemos que $\{e_i\}$ e $\{f_i\}$ são equivalentes se $\det(a_{ij}) > 0$.

(1) Demonstre que isso define uma relação de equivalência sobre o conjunto de bases para V. Demonstre que existe exatamente duas classes de equivalência para a relação.

Uma **orientação** em V é uma escolha das classes de equivalência. Seja M uma variedades diferenciável de dimensão n. Uma **orientação** em M é uma escolha de orientação em T_pM para todo $p \in M$ que varia diferenciavelmente com o ponto p. Essa definição não é suficientemente precisa, e uma orientação não existe sempre, então é necessário fazer a definição em termos da estrutura diferencial de M.

M é **orientável** se existe um sub-atlas $\mathscr{A}' = \{(\varphi, U)\} \subseteq \mathscr{A}$ tal que (1) os domínios U das cartas (φ, U) em $\mathscr{A}'$ cobrem M, e (2) se $(\varphi, U), (\psi, V) \in \mathscr{A}'$ tem $U \cap V \neq \emptyset$, então $\det(\mathrm{Jac}(\varphi \circ \psi^{-1})) = \det(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}) > 0$.

(2) Demonstre que se $(\varphi, U), (\psi, V) \in \mathscr{A}'$ e se $p \in U \cap V \neq \emptyset$, e se $\{\partial/\partial x^i\}$ e $\{\partial/\partial y^i\}$ são as bases para T_pM induzidas pelas cartas (φ, U) e (ψ, V) respetivamente, então elas são equivalentes pela relação dada em cima sobre bases de T_pM.

Uma **orientação** em M é uma escolha de sub-atlas $\mathscr{A}'$ com essas propriedades.

(3) Seja M uma n-variedade diferenciável. Demonstre que o conjunto

$$\widetilde{M} = \{(p, \sigma_p) \ ; \ p \in M, \ \sigma_p \text{ é uma orientação no espaço vetorial } T_pM\}$$

admite a estrutura de uma variedade diferenciável tal que a mapa

$$\begin{aligned} \pi : \widetilde{M} &\to M, \\ (p, \sigma_p) &\mapsto p, \end{aligned}$$

seja suave.

(4) Demonstre que a $(\widetilde{M}, \pi)$ é um espaço de recobrimento de M cujas fibras são de cardinalidade 2.

(5) Demonstre que $(\widetilde{M}, \pi)$ é trivial como um espaço de recobrimento (é dizer, $\tilde{M}$ é a união desjunta de duas cópias de M) se e somente se M é orientável.

(6) Demonstre que uma variedade diferenciável conexa cujo grupo fundamental não contem um subgrupo de índice 2 deve ser orientável. Em particular, demonstre que toda variedade simplesmente conexa é orientável.

(Pode ver mais sobre a teoria de espaços de recobrimento e o grupo fundamental nos livros de Massey (Algebraic Topology, Springer) ou Lima (Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Projeto Euclides). Para a última parte, a seguinte proposiçaõ (de Lima pga. 152) pode ser útil. Seja $p : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento, com $\widetilde{X}$ conexo por caminhos. Para cada $x \in X$, o grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ opera transitivamente à direita na fibra $p^{-1}(x)$. O grupo de isotropia da cada ponto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ é $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$.)

2.8. Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial suave numa variedade diferenciavel.

(1) Demonstre que para todo $p \in M$, existe um subconjunto aberto $U \subseteq M$, $\varepsilon > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= x, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) &= X(\varphi(x, t)) \end{aligned}$$

para todo $x \in U$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. A aplicação φ será chamada o **fluxo** do campo X.

(2) Demonstre que a solução desse sistema de EDO's é única, no sentido de que se φ (com domínio $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$), e ψ (com domínio $V \times (-\delta, \delta)$) são soluções do sistema, e se $p \in U \cap V$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$, então nós temos $\varphi(p, t) = \psi(p, t)$.

Os detalhes mais importantes desse exercício seguem do resultado fundamental de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. O que é necessário aqui é transladar aqueles resultados para campos vetoriais numa variedade. Esse resultado é demonstrado em Appendix D do livro de Lee (Introduction to Smooth Manifolds, GTM, Springer).

2.9.

(1) Encontre fluxos $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ para os seguintes campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$:
   (a) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$,
   (b) $Y = x^2\frac{\partial}{\partial x}$,
   (c) $Z = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

(2) Encontre um exemplo de uma variedade M e um campo vetorial X em M cujo fluxo φ *não* é definido em $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, para nenhum $\varepsilon > 0$.

2.10. Seja $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ o fluxo do campo vetorial X em M, sejam $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tais que $s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e seja $\widetilde{U} \subseteq U$ tal que se $x \in \widetilde{U}$, $\varphi_s(x) = \varphi(x, s) \in U$.

(i) Demonstre que $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$.

(ii) Em particular, mostre que se $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, φ_t é um difeomorfismo entre os conjuntos abertos U e $\varphi_t(U)$.

2.11.

(1) Sejam M uma variedade compacta e $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial em M. Demonstre que o máximo domínio de definição do fluxo φ de X é $M \times \mathbb{R}$. Isso é dizer, $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$.
(2) Demonstre que φ define um homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to Diff(M)$ para o grupo de diffeomorfismos de M.

2.12. Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vatorial suave em M e $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ o seu fluxo, definido numa vizinhança de p. Ao considerar vetores tangentes em p como classes de equivalência de curvas que passam por p, demonstre que a derivada direcional de uma função $f \in C^\infty(M)$ é dada por

$$(Xf)(x) = \frac{d}{dt} \left(f(\varphi_t(x))\right)\bigg|_{t=0}.$$

2.13. Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave de variedades diferenciáveis. Em cada $p \in M$, temos uma aplicação linear $F_{*,p} : T_pM \to T_{F(p)}N$. Para campos vetoriais $X \in \Gamma(TM)$ e $Y \in \Gamma(TN)$, dizemos que X e Y são F-**relacionados** se para todo $p \in M$, $F_{*,p}(X(p)) = Y(F(p))$.

(1) Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades, e sejam $X \in \Gamma(TM)$ e $Y \in \Gamma(TN)$ campos vetoriais. Se X e Y são F-relacionados, então demonstre que para toda $f \in C^\infty(N)$, X e Y agem como derivações como
$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F.$$

Observamos que para uma aplicação suave $F : M \to N$ e campo vetorial $X \in \Gamma(TM)$, não existe necessariamente um campo $Y \in \Gamma(TN)$ que é F-relacionado a X.

(2) Sejam M e N variedades diferenciáveis, e $F : M \to N$ um difeomorfismo. Demonstre que para todo $X \in \Gamma(TM)$, existe um único campo vetorial suave Y em N que é F-relacionado com X.

Chamamos o campo vetorial Y obtido aqui o **avanço**, ou **campo empurrado para frente**, de X e o denotamos por $Y = F_*X$. De novo, emfatizamos que o avanço é bem definido somente quando F é um difeomorfismo.

(3) Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$. Demonstre que o campo $\frac{d}{dt} \in \Gamma(T\mathbb{R})$ é F-relacionado com $Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^2)$ dado por
$$Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

2.14. Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ campos vetoriais suaves em M e $f, g \in C^\infty(M)$ funções suaves. Demonstre que o colchete de Lie satisfaz as identidades

$$\begin{aligned} [X,Y] &= -[Y,X], && \text{anti-simetria} \\ [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] &= 0, && \text{identidade de Jacobi,} \\ [fX, gY] &= fg[X,Y] + (fXg)Y - (gYf)X. \end{aligned}$$

2.15. Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades, e sejam $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ e $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$ campos de vetores tais que X_1 é F-relacionado com Y_i para $i = 1, 2$. Demonstre que $[X_1, X_2]$ é F-relacionado com $[Y_1, Y_2]$.

2.16. Queremos diferenciar campos de vetores. Tem várias maneiras para fazer isso. A derivada covariante vai ser um dos objetos mais importantes nessa disciplina. Já vimos o colchete de Lie, que pelas últimas questões é um operador diferencial. Agora daremos uma outra caracterização do colchete de Lie.

Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial e $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ o seu fluxo. Já vimos que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, φ_t é um difeomorfismo entre U e $\varphi_t(U)$, e mais especificamente, $\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x$ para todo t. Isso é dizer que a derivada $D\varphi_{-t,\varphi_t(x)} = (\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)} : T_{\varphi_t(x)}M \to T_xM$ é um isomorfismo para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Seja $Y \in \Gamma(TM)$ um outro campo de vetores. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $Y(\varphi_{-t}(x)) \in T_{\varphi_{-t}(x)}M$, e logo $(\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y(\varphi_{-t}(x))) \in T_xM$. Isso é dizer,

$$t \mapsto (\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y(\varphi_{-t}(x)))$$

define uma curva no espaço vetorial T_xM. Definimos a derivada de Lie do campo Y ao longo do campo X por

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)_x &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y(\varphi_{-t}(x))), \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y(\varphi_{-t}(x))) - Y(x)}{t}.\end{aligned}$$

Primeiro, afirmamos sem demonstrar que $(\mathcal{L}_X Y)_x$ é bem definido em todo ponto, e que $\mathcal{L}_X Y$ é um campo vetorial suave.

(A) Demonstre que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Para fazer isso, nós separamos a questão em vários casos. Seja $\mathcal{R}(X) = \{x \in M \ ; \ X(x) \neq 0\}$ o conjunto de pontos *regulares*. Seja $\operatorname{supp} X = \overline{\mathcal{R}(X)}$ o suporte do campo X, e seja $M \setminus \operatorname{supp}(X)$ o complemento do suporte. Notamos que $\mathcal{R}(X)$ e $M \setminus \operatorname{supp}(X)$ são conjuntos abertos em M.

Se $x \in \mathcal{R}(X)$ é um ponto regular, é possível encontrar coordenadas $(y^1, \ldots, y^n)$ numa vizinhança de x tal que X é dado por $X(y) = \frac{\partial}{\partial y^1}$. Calcule explicitamente o fluxo de X nessas coordenadas para calcular $(\mathcal{L}_X Y)_x$ e compare isso com a expressão em coordenadas do colchete $[X, Y]_x$.

Se $x \in \operatorname{supp}(X) \setminus \mathcal{R}(X)$, utilize a continuidade de ambos $\mathcal{L}_X Y$ e $[X, Y]$.

Se $x \in M \setminus \operatorname{supp}(X)$, verifique que $(\mathcal{L}_X Y)_x = 0 = [X, Y]_x$.

O teorema de que é possível encontrar coordenadas (y^i) assim é dado em Teor. 9.22 do livro de Lee sobre a forma canônica de um campo vetorial perto de um ponto regular. Essencialmente, se $X(x) \neq 0$, então a imagem do fluxo $t \to \varphi_t(x)$ é uma curva mergulhada em M, em que t é uma coordenada. O teorema afirma que $t = y^1$ pode ser completada a um sistema de coordenadas em volta de x.

2.17. A derivada de Lie pode ser estendida para campos de tensores de outros tipos. Primeiro, reparamos que a derivada de Lie de um campo vetorial é um novo campo vetorial. A derivada de Lie de uma função é uma função e a derivada de Lie de uma 1-forma é uma nova 1-forma. Por exemplo, definimos a derivada de uma função $f \in C^\infty(M)$ por um campo vetorial X como a função $\mathcal{L}_X f = Xf \in C^\infty(M)$, e já vimos que isso relaciona-se com o fluxo de X por

$$(\mathcal{L}_X f)_x = (Xf)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f(\varphi_t(x)).$$

Definimos a derivada de Lie de uma 1-forma $\alpha \in \Omega^1(X)$ como no seguinte. Para todo $x \in M$, queremos definir uma aplicação linear $(\mathcal{L}_X \alpha)_x : T_xM \to \mathbb{R}$. Para $Y_x \in T_xM$, estenda Y_x a um campo vetorial suave Y sobre M, e defina

$$(\mathcal{L}_X\alpha)_x(Y_x) = X_x(\alpha(Y)) - \alpha_x([X,Y]_x).$$

(a) Se $f \in C^\infty(M)$ é uma função suave e $Y \in \Gamma(TM)$, demonstre que $(\mathcal{L}_X\alpha)(fY) = f(\mathcal{L}_X\alpha)(Y)$.

Essa linearidade sobre funções é suficiente para concluir que a definição de $(\mathcal{L}_X\alpha)_x(Y_x)$, utilizando uma extensão do vetor Y_x, independe da extensão escolhida. Veremos por que mais tarde.

(b) Demonstre que $\mathcal{L}_X(f\alpha) = (Xf)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha$.
(c) Se $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ e $\alpha = dx^j$, calcule $\mathcal{L}_X dx^j$.
(d) Observamos que temos uma paridade, ou produto, entre campos e formas, tomando valores em funções,

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(TM) \times \Omega^1(M) & \to & C^\infty(M), \\ (Y,\alpha) & \mapsto & \alpha(Y). \end{array}$$

Demonstre que a derivada de Lie age como uma derivação com relação a esse produto.
(e) Seja X um campo vetorial suave e ω uma forma diferencial suave (de qualquer ordem) em M. Demonstre as seguintes fórmulas :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d(\iota_X\omega), \\ \text{(ii)} & d(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_X(d\omega), \end{array}$$

onde $\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ é a operação de contração do campo X na forma ω dada por $(\iota_X\omega)(Y_1,\dots,Y_{k-1}) = \omega(X,Y_1,\dots,Y_{k-1})$.

3. Grupos e Álgebras de Lie

3.1. Mostre que o colchete em $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ é dado por $[A,B] = AB - BA$.

3.2. Demostre que os subgrupos $\mathbf{SO}(n) \subseteq \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathbf{U}(n) \subseteq \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbf{GL}(2n,\mathbb{R})$ são subgrupos de Lie.

3.3. Descreva, como álgebras de mátrizes, as álgebras de Lie dos grupos $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$ e $\mathbf{O}(1,n)$.

3.4. Seja G o grupo de Lie igual a um de $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{U}(n)$ ou $\mathbf{SU}(n)$, e denote por $\mathfrak{g}$ a sua álegbra de Lie. Prove que para todo $c > 0$

$$\langle X,Y\rangle = -c\operatorname{trace}(XY),$$

onde $X,Y \in \mathfrak{g}$, defina um produto interior Ad-invariante em $\mathfrak{g}$.

3.5. Considere o grupo especial-unitário $\mathbf{SU}(2)$ equipado com a métrica bi-invariante induzida de um produto interior Ad-invariante em $\mathfrak{su}(2)$ como no último exemplo com $c = \frac{1}{2}$. Mostre que a aplicação

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar\beta \\ \beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

onde $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ and $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, defina uma isometria de $\mathbf{SU}(2)$ para S^3. Aqui $\mathbb{C}^2$ está identificado com $\mathbb{R}^4$ e S^3 é vista como a esfera unitária em $\mathbb{R}^4$.

3.6. Um *homomorfismo de álgebras de Lie* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é uma aplicação linear que satisfaz

$$\varphi([X,Y]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(X), \varphi(Y)]_{\mathfrak{h}}.$$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ o conjunto de endomorfismos lineares de $\mathfrak{g}$ com colchete de Lie $[A,B] = A \circ B - B \circ A$ para $A, B \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Demostre que $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ dada por $\varphi(X)Y = [X,Y]$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

4. Métricas Riemannianas

4.1. Mostre que o produto de $(0, \infty)$ e S^n é isométrico ao cílindro

$$C = \{(x_0, \dots, x_n) \ ; \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1, \ x_0 > 0\}.$$

4.2. O *catenóide* é a superfícia de revolução em $\mathbb{R}^3$ com o eixo-z como o eixo de revolução e o *catenário* $x = \cosh(z)$ no plano-xz como curva geradora. A *helicóide* é a superfície *reglada* em $\mathbb{R}^3$ de retas paralelas ao eixo-xy que se intersectam o eixo-z e o hélice $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

(1) Escreve parametrizações naturais para o catenóide e o helicóide.
(2) Considere o catenóide e o helicóide com métricas induzidas de $\mathbb{R}^3$ e ache expressões para essas métricas com repeito às parametrizações em item (1).
(3) Mostre que as expressões locais em item (2) coincidem, possivelmente com um troco de coordenadas, e deduza que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos.
(4) Demostre que que o catenóide e o helicóide não podem ser isométricos, por causa de topologia.

4.3. Considere o espaço hiperbólico $(\mathbb{R}H^n, g)$, como uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\mathbf{D}^n$ os disco unitário aberto em $\mathbb{R}^n$, mergulhado em $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\mathbf{D}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \ ; \ x_0 = 0, \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1 \ \}.$$

Defina uma aplicação $f : \mathbb{R}H^n \to \mathbf{D}^n$ dizendo que $f(x)$ seja o ponto único de $\mathbf{D}^n$ na linha reta entre $x \in \mathbb{R}H^n$ e $(-1, 0, \dots, 0)$. Mostre que f é um difeomorfísmo e , escrevendo $g_1 = (f^{-1})^* g$, que

$$g_1|_x = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \left(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \right).$$

onde $x = (0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{D}^n$. Deduza que $\mathbb{R}H^n$ é conformamente plano. $(\mathbf{D}^n, g_1)$ é chamado o *modelo do disco de Poincaré* de $\mathbb{R}H^n$.

4.4. Considere o disco unitário aberto $\mathbf{D}^n$ equipado com a métrica g_1 de Exercício 4.3. Prove que a inversão em $\mathbb{R}^n$ na esfera de centro $(-1, 0, \dots, 0)$ e raio 2 define um difeomorfísmo f_1 entre $\mathbf{D}^n$ e o meio-espaço superior

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \ ; \ x_1 > 0\}$$

e tal que a métrica $g_2 = (f_1^{-1})^* g_1$ seja dada por

$$g_2|_x = \frac{1}{x_1^2} \left(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \right),$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$. $(\mathbb{R}^n_+, g_2)$ é chamado o *modelo de meio-espaço superior de Poincaré.*

4.5. Considere o modelo de meio-espaço superior de Poincaré $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y > 0\}$ com a métrica $g_2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Confirme que as seguintes transformações de $\mathbb{R}^2_+$ são isometrias :

(1) $\tau_a(x,y) = (x+a, y)$,
(2) $h_r(x,y) = (rx, ry)$,
(3) $R(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$.

Deduza que $\mathbb{R}^2_+$ é homogêneo.

4.6. Usa projeção stereográfica para demostrar que a esfera S^n é conformamente plano.

4.7. Considere a curva parametrizada

$$\begin{aligned} x &= t - \tanh t \\ y &= \frac{1}{\cosh t}. \end{aligned}$$

A superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$ construida por uma revolução da curva no eixo-x é chamada a *pseudo-esfera*. Note que a pseudo-esfera é singular ao longo do círculo obtido girando o ponto $(0,1)$.

(1) Prove que a pseudo-esfera com círculo singular removido é localmente isométrico ao modelo do meio-espaço superior de $\mathbb{R}H^2$.
(2) Demostre que a curvatura gaussiana da pseudo-esfera é igual a -1.

4.8.

(1) Demostre que o polinômio $p(a,b,c) = ac - b^2$ é a forma quadrática associada a uma métrica de Minkowski em $\mathbb{R}^3$. Isto é, um produto interior de assinatura $(1,2)$.
(2) Seja $S^2\mathbb{R}^2$ o conjunto de 2×2 mátrizes simétricos. Defina uma aplicação linear $T : S^2\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T^*q = -\det$ em $S^2\mathbb{R}^2$, onde q é a forma quadratica
$$q(x_0, x_1, x_2) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2.$$
Isto é, $q(T(A)) = -\det A$ para todo $A \in S^2\mathbb{R}^2$.
(3) Demostre que o espaço hiperbólico real $\mathbb{R}H^2$ admite uma ação fiel de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ por isometrias.

4.9. Seja G um grupo discreto com uma ação livre e proprement descontínua numa variedade N. Mostre que $M = N/G$ admite uma estrutura única como uma variedade suave tal que $\pi : N \to N/G = M$ é um recobrimento suave.

4.10.

(1) Seja Γ um *lattice* em $\mathbb{R}^n$ definido pela base $\{v_i\}$ e seja $T = \mathbb{R}^n/\Gamma$ o toro plano associado a Γ. Defina uma difeomorfismo explicito $\varphi : T \to S^1 \times \cdots \times S^1$, onde $S^1 = \{e^{2\pi i x} \ ; \ x \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{C}$.
(2) Denote por g_Γ a métrica riemanniana que induzida no toro T. Demostre que na carta produta de $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ há a expressão local
$$g_\Gamma = \sum_{i,j} \langle v_i, v_j \rangle dx_i \otimes dx_j,$$
onde $\langle \ , \ \rangle$ denota o produto interior padrão em $\mathbb{R}^n$.

4.11. Sejam Γ e Γ' dois *lattices* em $\mathbb{R}^n$, e denote por g_Γ e $g_{\Gamma'}$ as métricas riemannianas que eles definam em T^n, respectivamente. Prove que (T^n, g_Γ) é isométrico a $(T^n, g_{\Gamma'})$ se e somente se existe uma isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(\Gamma) = \Gamma'$.

4.12.

(1) Suponha que a base $\{(1,0),(0,1)\}$ para $\mathbb{R}^2$ gere a lattice Γ_1 e seja $T_1 = \mathbb{R}^2/\Gamma_1$ o toro associado. Mostre que o grupo dihedral D_4 de ordem 8, com presenatção
$$D_4 = \langle x, y \ ; \ x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle,$$
age fielmente por isometrias em T_1.

(2) Suponha que a base $\{(1,0),(1/2,\sqrt{3}/2)\}$ para $\mathbb{R}^2$ gere a lattice Γ_2 e seja $T_2 = \mathbb{R}^2/\Gamma_1$ o toro associado. Mostre que o grupo dihedral D_3 de ordem 6, com presenatção
$$D_3 = \langle x, y \ ; \ x^3 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle,$$
age fielmente por isometrias em T_2.

4.13. Seja Γ um lattice em $\mathbb{R}^2$ gerado por uma base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ e considere o toro plano retângular associado T^2.

(1) Mostre que a aplicação γ de $\mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(x_1v_1 + x_2v_2) = (x_1 + 1/2)v_1 - x_2v_2$ induz uma isometria de T^2 de ordem 2.
(2) Demostre que há um recobrimento da garrafa de Klein K por T^2 de ordem 2.

4.14. Demostre que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é isometrico ao produto torcido $((0,\infty)\times S^{n-1}, dr^2 + r^2g)$ onde r denota a coordenada em $(0,\infty)$ e g denota a métrica padrão em S^{n-1}.

4.15. Mostre que $\mathbb{RP}^1$, equipado com a métrica quociente de $S^1(1)$, é isométrico com $S^1(\frac{1}{2})$. Mostre que $\mathbb{CP}^1$, equipado com a métrica de Fubini-Study, é isométrico com $S^2(\frac{1}{2})$.

4.16. Seja (M, g) uma variedade riemanniana orientada. Seja (x^i) coordenadas definidas numa aberta $U \subseteq M$ tais que
$$\begin{aligned} g &= \sum_{ij} g_{ij} dx^i \cdot dx^j \\ g_{ij} &= g(\partial_i, \partial_j), \end{aligned}$$
supondo que a n-forma $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ seja compativel com a orientação. Defina Ω por
$$\Omega = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \ldots dx^n$$
como uma n-forma diferencial em U.

(1) Demostre que U é independente das coordenadas. Conclua que Ω é bem-definida em M e depende somente em g e a orientação.
(2) Demostre que se $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ é um co-referencial ortonormal em U, então Ω é dada por
$$\Omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n.$$

Ω é chamada a *forma de volume* da métrica g. As vezes, ela é denotada dvol_g ou $d\mu_g$.

4.17.

(1) Escreve o espaço $\mathbb{R}H^2 \subseteq \mathbb{R}^{1,2}$ como uma superfície de revolução.
(2) Ache uma parametrizaçaão para $\mathbb{R}H^2$ (ou de algum subconjunto) na qual a métrica hiperbólica está escrita como um produto torcido.

4.18. Considere a esféra unitária $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ como o conjunto de pontos $(z_1, z_2) \subseteq \mathbb{C}^2$ que satisfazem $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Encontre coordenadas (t, θ_1, θ_2) em S^3 tais que a métrica rodonda seja escrita

$$g_{S^3} = dt^2 + \operatorname{sen}^2(t) d\theta_1^2 + \cos^2(t) d\theta_2^2.$$

4.19. Suponha que $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ seja uma variedade riemanniana de dimensão m, e $M \subseteq \widetilde{M}$ seja uma subvariedade n-dimensional, e g seja a métrica riemanniana induzida em M. Para todo ponto $p \in M$, mostre que existe uma vizinhança $\widetilde{U}$ de p em $\widetilde{M}$ e um referencial orthonormal $(E_1, \ldots, E_m)$ em $\widetilde{U}$ tal que $(E_1, \ldots, E_n)$ forma uma base para T_qM em todo $q \in \widetilde{U} \cap M$. Um tal referencial é chamado um *referencial orthonormal adaptado.* [Dica : Aplique o algorítmo de Gram-Schmidt ao referencial coordenado $\{\partial_i\}$ em coordenadas adaptadas à subvariedade.]

4.20. Seja (M, g) uma variedade riemanniana com elemento de volume $\Omega = \mathrm{d}vol_g$. O operador de divergência div : $\Gamma(TM) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ é definido por

$$d(i_X \Omega) = (\operatorname{div} X)\Omega,$$

onde i_X denota *multiplicação interior* por X : para cada k-forma ω, $i_X\omega$ é a $(k-1)$-forma definida por

$$i_X\omega(V_1, \ldots, V_{k-1}) = \omega(X, V_1, \ldots, V_{k-1}).$$

(1) Suponha que M seja uma variedade riemanniana, orientada e compacta e com fronteira ∂M. Prove o *teorema de divergência* para $X \in \Gamma(TM)$:

$$\int_M \operatorname{div} X \mathrm{d}vol_g = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \widetilde{\mathrm{d}vol}_g,$$

onde N é o normal em ∂M direcionado para o exterior e $\widetilde{dvol}_g$ é a forma de volume em ∂M.
(2) Demostre que o operador de divergência satisfaz o seguinte regra de produto para uma função suave $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\operatorname{div}(uX) = u \operatorname{div} X + \langle \nabla u, X \rangle,$$

e deduza a fórmula de "integração por partes" :

$$\int_M \langle \nabla u, X \rangle \mathrm{d}vol_g = -\int_M u \operatorname{div} X \mathrm{d}vol_g + \int_{\partial M} u \langle X, N \rangle \widetilde{\mathrm{d}vol}_g.$$

(3) Demostre que em coordenadas (x^i) a divergência do campo vetorial $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ é dada por

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{\det(g)} X^i \right).$$

4.21. Seja (M,g) uma variedade riemanniana compacta, conexa e orientada, e com fronteira ∂M. para $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$, o *Laplaciano* de u, denotado Δu, é definido por $\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u)$. A função $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é *harmônica* se $\Delta u = 0$.

(1) Prove as identidades de Green :
$$\begin{aligned} \int_M u\Delta v \mathrm{d}vol_g + \int_M \langle \nabla u, \nabla v\rangle \mathrm{d}vol_g &= \int_{\partial M} u(nv)\widetilde{\mathrm{d}vol}_g, \\ \int_M (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}vol_g &= \int_M (uNv - vNu)\widetilde{\mathrm{d}vol}_g. \end{aligned}$$
(2) Se $\partial M \neq \emptyset$, e u, v são funções harmônicas em M cujas restrições a ∂M se concordam, demostre que $u \equiv v$.
(3) Se $\partial M = \emptyset$, demostre que as únicas funções harmônicas em M são os constantes.

4.22. Seja (M,g) uma variedade riemanniana compacta e orientada (sem fronteira). Um número real λ é um *auto-valor* do Laplaciano se existe uma função suave u em M, não identicamente zero, tal que $\Delta u = \lambda u$. Nesse caso, u é chamado uma *autofunção* correspondente a λ.

(1) Demostre que 0 é um auto-valor de Δ, e que todos os outros auto-valores são stritamente negativos.
(2) Se u e v são autofunções que correspondem a auto-valores diferentes, demostre que $\int_M uv\mathrm{d}vol_g = 0$.

5. Conexões

5.1. Numa variedade riemanniana (M,g), considere o fibrado tangente TM e fixe um ponto $p \in M$. Prove que toda vizinhança aberta W de 0_p em TM tem uma vizinhança aberta da forma
$$\bigcup_{x\in U} B(0_x, \epsilon) = \{v \in TM|_U \ ; \ g_{\pi(v)}(v,v)^{1/2} < \epsilon\}$$
para alguma vizinhança aberta U de p em M e para algum $\epsilon > 0$.

5.2. Sejam A e B funções em $\mathbb{R}^2$ que não se anulam e considere a métrica $g = A^2dx^2 + B^2dy^2$, onde x, y são as coordenadas padrões em $\mathbb{R}^2$.

(1) Calcule os coeficientes de Christoffel de g.
(2) Escreva as equações geodeésicas de g.

5.3. Seja (x^i) um sistema de corrdenadas numa variedade suave M que é equipada com uma conexão ∇, e considere os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k que são definidos por
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$
Se $(x^{i'})$ é um outro sistema de coordenadas em M, demostre que há a seguinte regra de transformação :
$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \sum_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

5.4. Seja (M, g) uma variedade riemanniana de dimensão n. Dado $p \in M$, demostre que existe uma vizinhaça aberta U de p, e n campos vetoriais $E_1, \ldots, E_n$ em U que são ortonormais em todo ponto em U e tal que $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$.

5.5. Seja ∇ uma conexão em TM. A torsão de ∇ é definida como

$$\begin{aligned} T^{\nabla} &: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) \\ T^{\nabla}(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned}$$

(1) Demostre que T^{∇} satisfaz
$$T^{\nabla}(fX, Y) = T^{\nabla}(X, fY) = fT^{\nabla}(X, Y)$$
para todo $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$, e então defina um tensor de tipo $(2, 1)$.

(2) Dizemos que ∇ é *simétrica* ou *sem torsão* se T^{∇} se anula identicamente. Demostre que ∇ é simétrica se e somente se os seus símbols de Christoffel com respeito a qualquer carta de coordenadas são simétricos : $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

5.6. Em $\mathbb{R}H^2 = (\mathbb{R}^2_+, g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2))$ seja $e_1 = y\partial/\partial x$ e $e_2 = y\partial/\partial y$ campos vetoriais em $\mathbb{R}H^2$. Defina as mátrizes $\Gamma_x = (\Gamma^j_{xi})$ e $\Gamma_y = (\Gamma^j_{yi})$ por

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x} e_i &= \sum_j \Gamma^j_{xi} e_j, \\ \nabla_{\partial_y} e_i &= \sum_j \Gamma^j_{yi} e_j. \end{aligned}$$

Demostre que as mátrizes Γ_x, Γ_y são funções em $\mathbb{R}H^2$ com valores em $\mathfrak{so}(2)$, as mátrizes (2×2) anti-simétricas.

Elas podem ser combinada para dar uma 1-forma em $\mathbb{R}H^2$ com valores em $\mathfrak{so}(2)$ by $\Gamma = \Gamma_x dx + \Gamma_y dy$.

5.7. Nesta questão vamos calcular o transporte paralelo ao longo de um caminho na esfera S^2. Em coordenadas $(r, \theta) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, a métrica g_S tem a forma $g_S = dr^2 + \sin^2(r) d\theta^2$.

(1) Calcule os símbolos de Christoffel da métrica. Specificamente, mostre que Γ pode ser escrito
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cot(r) \end{pmatrix} dr + \begin{pmatrix} 0 & -\cos(r)\mathrm{sen}(r) \\ \cot(r) & 0 \end{pmatrix} d\theta$$

(2) Consideramos a curva $\{r = r_0\}$. Isto é, a curva circular centrada no polo de norte, $\gamma : \theta \mapsto (\mathrm{sen}(r_0)\cos(\theta), \mathrm{sen}(r_0)\mathrm{sen}(\theta), \cos(r_0))$. Demostre que o campo $X = X^1\partial_r + X^2\partial_\theta$ é parallelo ao longo de γ se e somente se X^1 e X^2 satisfazem
$$\begin{aligned} X^1_\theta - \cos(r_0)\mathrm{sen}(r_0) X^2 &= 0, \\ X^2_\theta + \cot(r_0) X^1 &= = 0. \end{aligned}$$
Resolve esse sistéma de equações.

(3) Calcule $|X(0)|^2 = g(X(0), X(0)$ e $|X(\theta)|^2$ e conclua que transporte paralelo preserve o comprimento de vetores.

(4) Transporte paralelo ao longo da curva de $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi$ define um endomorfismo de T_pS^2 para $p = (\mathrm{sen}(r_0), 0, \cos(r_0))$. Descreve a aplicação $P^{\gamma}_{0,2\pi}$. Conclua que, trocando o *polo de norte* e considerando outras curvas circulares, o grupo de holonomia de S^2 com ponto de base p é igual a $SO(2)$.

(5) O *círculo grande* $\{r = \pi/2\}$ é um geodésico γ em S^2. Descreve o transporte parallelo ao longo de γ.

5.8. Demostre que, para qualquer conexão ∇ no fibrado tangente TM, a torsão T^∇ anula-se num ponto p se e somente se existe uma carta $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ para qual os símbolos de Christoffel da conexão anulam-se em p.

5.9. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial suave de posto k em M e seja h uma métrica em E (isto é, um produto interior definido em todo fibrado $E_p = \pi^{-1}(p)$, variando suavamente com $p \in M$). Uma conexão ∇ em E é *compatível com* h se para todo $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$, $X \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned} d\,h(\sigma,\tau) &= h(\nabla\sigma,\tau) + h(\sigma,\nabla\tau), \\ \text{ou}\quad Xh(\sigma,\tau) &= h(\nabla_X\sigma,\tau) + h(\sigma,\nabla_X\tau). \end{aligned}$$

Suponha que E seja trivializado em $U \subseteq M$ por seções $\{e_1, \ldots, e_k\}$ que, para todo $p \in M$, formam um base ortonormal de E_p. Demostre que ∇ determina uma 1-forma em U com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{so}(k)$. Conversamente, demostre que toda 1-forma em U com valores em $\mathfrak{so}(k)$ determina uma conexão em $E|_U$ que é compatível com a métrica h.

5.10. Seja (M, g) riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. Seja (x^i) coordenadas num aberto $U \subseteq M$. Se Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel de ∇, demostre que a conexão induzida em T^*M satisfaz

$$\nabla_{\partial_j} dx^i = -\sum_k \Gamma^i_{jk} dx^k.$$

5.11. O Hessiano de uma função suave f, $\mathrm{Hess}f$, é definido como a segunda derivada covariante de f. Isto é, $\mathrm{Hess}f = \nabla df$. Então,

$$(\mathrm{Hess}f)(X, Y) = X(df(Y)) = df(\nabla_X Y).$$

(1) Demostre que $\mathrm{Hess}f$ é simétrico em X, Y.
(2) Demostre que o $(1, 1)$-campo de tensores associado ao $(0, 2)$-campo $\mathrm{Hess}f$ é dado por
$$X \mapsto \nabla_X(\nabla f).$$
(3) Demostre que uma função f com Hessiano positivo-definido não admite um valor máximo local.

5.12. Para todo campo vetorial $X \in \Gamma(TM)$ podemos definir uam 1-forma dual θ_X pela fórmula $\theta_X(Y) = g(X, Y)$. Demostre que, para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, a conexão de Levi-Civita satisfaz a identidade

$$2g(\nabla_X Y, Z) = (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) + (d\theta_X)(Y, Z).$$

6. Geodésicas

6.1. Seja (M, g) uma variedade riemanniana.

(1) Suponha que $\gamma : \mathbb{R} \to M$ seja um geodésico, que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja um difeomorfismos e que $\eta = \gamma \circ \phi : \mathbb{R} \to M$. Mostre que existe uma função suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla_{\eta'}\eta' = f\eta'$.
(2) Contrariamente, suponha que $\eta : \mathbb{R} \to M$ satisfaça $\nabla_{\eta'}\eta' = f\eta'$ para alguma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que existe um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma = \eta \circ \phi^{-1}$ seja uma geodésica.

6.2. (Geodésicas numa superfície de revolução) Denota por (u, v) as coordenadas em $\mathbb{R}^2$. Demostre que a aplicação $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\mathrm{sen}(u), g(v))$,

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;\; u_0 < u < u + 1, \; v_0 < v < v_1\},$$

onde f e g são funções suaves, com $f'(v) + g'(v) \neq 0$ e $f(v) \neq 0$, é uma imersão. A imagem $\varphi(U)$ é a superfície gerada pela rotação da curva $(f(v), g(v)$ ao redor do eixo-z e é chamada a superfície de revolução S. A imagem por φ das curvas $u = const$ e $v = const$ são chamadas *meridianas* e *paralelas*, respeitivamente, de S.

(1) Demostre que a métrica induzida nas coordenadas (u, v) é dada por

$$g_{11} = f^2, \; g_{12} = 0, \; g_{22} = (f')^2 + (g')^2,$$
$$g_S = f^2 du^2 + \left((f')^2 + (g')^2\right) dv^2.$$

(2) Demostre que as equações para uma geodésica γ são

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2ff'}{f^2}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

(3) Obtenha o significado geométrico seguinte : a segunda equaç
ao é, exceto as meridianas e paralelas, equivalente ao fato que a "energia" $|\gamma'(t)|^2$ de uma geodésico é constante ao longo de γ; a primeira equação significa que se $\beta(t)$ é o ângulo orientado, $\beta(t) < \pi$, de γ com a paralela P intersetando γ em $\gamma(t)$, então

$$r\cos(\beta) = const.,$$

onde r é o raio da paralela P (essa equação se chama a *relação de Clairaut*).

(4) Use a relação de Clairaut para mostrar que o geodésico do paraboloide

$$(f(v) = v, \; g(v) = v^2, \; v \in (0, \infty), \; u \in (-\varepsilon, 2\pi + \varepsilon)),$$

que não é uma meridiana, se intersecta infinitamente vezes.

(5) Escreva a esféra unitária $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ como uma superfície de revolução, em coordenadas (r, θ). Escreva e resolva as equações geodésicas em $(r(t), \theta(t)$ no caso que $r(0) \neq 0$.

6.3. Seguindo o argumento do último exercício, escreve o plano hiperbólico $\mathbb{R}H^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, onde $\mathbb{R}^3$ admite a métrica minkowskiana $g = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$, como uma superfície de revolução e determine os geodésicos que não passam pelo ponto $(1, 0, 0)$.

6.4. Sejam (M, g) uma variedade riemanniana e $\gamma : I \to M$ uma curva parametrizada e M. Demostre que a derivada covariante $\frac{DX}{dt}$ de um campo vetorial X ao longo de γ pode ser escrito como

$$\frac{DX}{dt} = \nabla^{\gamma}_{d/dt} X$$

onde $T = \frac{d}{dt}$ é o campo vetorial padrão no intervalo I.

6.5. Nessa questão vamos calcular as geodésicas em $\mathbb{R}H^2 = (\mathbb{R}^2_+, \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2))$.

(1) Demostre que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é um geodésico se e somente se x, y satisfazem

$$\begin{aligned} x'' - 2\frac{x'y'}{y} &= 0 \\ y'' + \frac{x'^2 - y'^2}{y} &= 0. \end{aligned}$$

(2) Demostre que $x(t) = x_0$ constant satisfaz a primeira equação. Neste caso, demostre que $y(t) = y_0 e^{kt}$ para $y_0 > 0$, k constantes.
(3) Supondo que $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, demostre que

$$\begin{aligned} \frac{x''}{x'} &= 2\frac{y'}{y} \\ \text{e então} \quad x' &= cy^2. \end{aligned}$$

(4) A condição do caminho ter velocidade igual a 1 dá a equação $\frac{1}{y^2}({x'}^2 + {y'}^2) = 1$. Combina isso com a equação $x' = cy^2$ para obter a identidade

$$\frac{dy}{y\sqrt{1 - c^2y^2}} = \pm dt.$$

(5) Integra essa equação para determinar explicitmente $y(t)$ e $x(t)$. Conclua que os geodésicos em $\mathbb{R}H^2$ são linhas verticais e meio-círculos com centro no eixo-x.

6.6. Seja $\mathbb{R}H^2 = (\mathbb{R}^2_+, \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2))$ o plano hiperbólico. Seja $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ o grupo de 2×2 matrizes reais de determinado igual a 1.

(1) Se consideramos $\mathbb{R}H^2$ como um subconjunto do plano complexo com coordenada $z = x + iy$, seja

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Prova que isso defina uma ação suave de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}H^2$ por isometrias da mética $g_h = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.
(2) Seja $\mathbf{O}_+(2, 1)$ o grupo de transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ que preservam o produto interior $g_{lor} = -dx^2 + dy^2 + dz^2$ e que preservam o conjunto $x > 0$. Demostre que $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\} \cong \mathbf{SO}_+(2, 1)$, onde $\mathbf{SO}_+(2, 1) = \mathbf{O}_+(2, 1) \cap \mathbf{SL}(3, \mathbb{R})$.

6.7. Encontre um elemento $A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ que envia a meia-linha $\{x = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2_+$ para o meio-círculo de raio R e centro $(x_0, 0)$.

6.8. Define uma conexão em $\mathbb{R}^3$ specificando

$$\begin{aligned} \Gamma^3_{12} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = 1 \\ \Gamma^3_{21} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{13} = -1 \end{aligned}$$

e os outros símbolos de Christoffel igual a zero. Demostre que, como uma matriz, Γ é dado por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & dz & -dy \\ -dz & 0 & dx \\ dy & -dx & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostre que essa conexão é compatível com a métrica eurclideana e tem geodésicas minimizantes, mas nã é simétrica. Dê uma expressão para a torsão.

6.9. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciavel em M. Suponha que $|\nabla f| = 1$ em todo de M. Demostre que as curvas integrais de ∇f são geodésicas.

6.10. Seja M uma variedade suave equipada com uma conexão ∇. Se $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva e X é um campo vetorial ao longo de γ, prove a fórmula seguinte :

$$\left(\frac{DX}{dt}\right)|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{P^{\gamma}_{0,t}X(t) - X(0)}{t}.$$

(Dica : Escreva X como uma combinação linear de vetores num referencial paralelo ao longo de γ.)

6.11. Seja $\widetilde{M}$ um espaço de recobrimento de uma variedade Riemanniana M. Mostre que é possível dar a $\widetilde{M}$ uma estrutura Riemanniana tal que a aplicação de recobrimento $\pi : \widetilde{M} \to M$ seja uma isometria local (esta métrica é chamada a *métrica de recobrimento*. Mostre que $\widetilde{M}$ é completa se e somente se M é completa.

6.12. Seja $f : M \to N$ uma aplicação suave e $\pi : E \to N$ um fibrado vetorial suave. Seja f^*E o conjunto

$$f^*E = \{(x, v)\ ;\ f(x) = \pi(v)\ \} \subseteq M \times E.$$

(1) Demostre que f^*E tem a estrutura de um fibrado vetorial em M. Supondo que E possa ser trivializado em $U \subseteq N$, demostre que f^*E pode ser trivializado em $f^{-1}(U)$. Para $\sigma : N \to E$ uma seção de E, demostre que $f^*\sigma = \sigma \circ f$ define uma seção de f^*E.
(2) Seja ∇ uma conexão em E. Demostre que existe uma conexão ∇^f em f^*E tal que para $X \in T_pM$ e $\sigma \in \Gamma(E)$,

$$\nabla^f_X(f^*\sigma) = f^*(\nabla_{f_*X}\sigma) \in (f^*E)_p.$$

6.13. Em coordenadas polares a métrica rodonda em $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ é exprimida como $g = dr^2 + \mathrm{sen}^2(r)d\theta^2$. Use essa expressão para a métrica para mostrar que a aplicação exponencial

$$\exp_N : T_N S^2 \to S^2$$

é dada por

$$(\rho\cos\phi, \rho\ \mathrm{sen}\phi, 0) \mapsto (\mathrm{sen}\rho\cos\phi, \mathrm{sen}\rho\ \mathrm{sen}\phi, \cos\rho).$$

Aqui, $N = (0, 0, 1) \in S^2$ e $T_N S^2 = \{(x, y, z)\ ;\ z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

6.14. Seja $W \subseteq M$ uma vizinhança *normal* de $p \in M$. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ uma base ortonormal para T_pM, tal que todo ponto de $\exp_p^{-1}(W) \subseteq T_pM$ possa ser escrito unicamente como $\sum_i x^i E_i$ para $(x^1, \ldots, x^n) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostre que a aplicação

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto \exp_p(x^1E_1 + \cdots + x^nE_n)$$

defina um sistema de coordenadas em $W \subseteq M$ tal que a métrica $g = \sum_{ij} g_{ij}dx^i dx^j$ satisfaça

(1) $g_{ij}|_p = \delta_{ij}$,
(2) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}|_p = 0$.

6.15. Seja (M, g) uma variedade riemanniana, com $p \in M$. Para $c > 0$, seja $B = \exp_p(B(0, c))$ uma bola normal em M. Para $r < c$ a esfera geodésica $S_r(p)$ é definida como a imagem sob $\exp_p$ da esfera tangente $S(0, r) = \{v \in T_pM\ ;\ |v| = r\}$. Isto é,

$$S_r(p) = \exp_p\left(S(0, r)\right).$$

Para $v \in S(0, r)$, seja $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ a geodésica com velocidade inicial v e seja $q = \gamma(1) \in S_r(p)$.

Use a lema de Gauss para demostrar que $S_r(p)$ tem espaço tangente em q

$$T_q S_r(r) = \{W \in T_q M \ ; \ \langle W, \gamma'(1) \rangle = 0\}.$$

6.16. Um subconjunto U de uma variedade riemanniana M é *convexo* se para todo $p, q \in U$, existe uma única geodésica minimizante de p para q contida inteiramente em U. Demostre que todo ponto em M admite uma vizinhança convexa, como no seguinte :

(1) Seja $p \in M$ e seja W uma vizinhança totalmente normal de p. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno que $B_{2\varepsilon}(p) \subseteq W$, define o subconjunto

$$W_\varepsilon = (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times \{(q, v) \ ; \ q \in B_\varepsilon(p), \ v \in T_q M, \ |v| = 1\}.$$

Define $f : W_\varepsilon \to \mathbb{R}$ por

$$f(t, q, v) = d(\exp_q(tv), p)^2.$$

Demostre que f é suave. [Dica : use coordenadas normais centradas em p].

(2) Demostre que se ε é escolhido suficientemente pequeno, então $\partial^2 f / \partial t^2 > 0$. [Dica : calcule $f(t, p, v)$ e use continuidade].

(3) Se $q_1, q_2 \in B_\varepsilon(p)$ e γ é a geodésica minimizante de q_1 a q_2, demostre que $d(\gamma(t), p)$ atinge sua máxima em uma das extremidades de γ.

(4) Demostre que $B_\varepsilon(p)$ é convexa.

6.17. Uma *curva divergente* em uma variedade Riemannian M é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \to M$ tal que para todo compacto $K \subseteq M$ existe um $t_0 \in (0, \infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$. (inst é, α sai de qualquer compacto de M). Define-se o comprimento de uma curva divergente por

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t |\alpha'(t)| dt.$$

Prove que M é completa se e somente se o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.

6.18. Considere o semi-plano superior $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y > 0\}$ com a métrica $g = dx^2 + \frac{1}{y} dy^2$. Demostre que $\mathbb{R}^2_+$ não é completa, achando uma curva divergente com comprimento limitado.

6.19. Demostre que o plano hiperbólico é completo, usando o modelo de disco ou do meio-plano.

6.20. Demostre que, para toda variedade Riemanniana M, a função de distância pode ser dada analiticamente por

$$d(x, y) = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| \ ; \ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M), \ |\nabla \varphi| \le 1\}.$$

6.21. Métricas invariantes em grupos de Lie.

7. O Espaço Projetivo Complexo

7.1. Suponha que $\widetilde{M}$ e M sejam variedades suaves e $p : \widetilde{M} \to M$ seja uma submersão sobrejetora. Para todo $y \in M$, a fibra acima de y, denota $\widetilde{M}_y$, é a preimagem $p^{-1}(y) \subseteq \widetilde{M}$. É uma subvariedade fechado pelo teorema de função implicita. Se $\widetilde{M}$ admite uma métrica riemanniana $\tilde{g}$, em todo ponto $x \in \widetilde{M}$ o espaço tangente decompõe-se numa suma direito ortogonal

$$T_x \widetilde{M} = H_x \oplus V_x,$$

onde $V_x = \ker p_* = T_x\widetilde{M}_x$ é o *espaço vertical* e $H_x = V_x^\perp$ é o *espaço horizontal.* Se g é uma métrica riemanniana em M, p é uma *submersão riemanniana* se $\tilde{g}(X,Y) = g(p_*X, p_*Y)$ sempre que X e Y sejam horizontais.

(1) Demostre que todo campo vetorial W em $\widetilde{M}$ pode ser escrito unicamente como $W = W^H + W^V$, onde W^H é horizontal, W^V é vertical e W^H e W^V são campos suaves.
(2) Se X é um campo vetorial em M, demostre que existe um unico suave campo vetorial horizontal $\tilde{X}$ em $\widetilde{M}$, chamado o *levantamento horizontal* de X, que é p-relacionado com X. (Isto significa que $p_*\tilde{X}_q = X_{p(q)}$ para todo $q \in \widetilde{M}$.
(3) Seja G um grupo de Lie que age suavemente em $\widetilde{M}$ por isometrias de $\tilde{g}$ e suponha que $p \circ \varphi = p$ para todo $\varphi \in G$ e que G age transitivamente em cada fibra $\widetilde{M}_y$. Demostre que existe uma única métrica riemanniana g em M tal que p seja uma sobremersão riemanniana. [Dica : primeiro demostre que $\varphi_* V_x = V_{\varphi(x)}$ para todo $\varphi \in G$.]

7.2. O *espaço projetivo complexo*, denotado $\mathbb{CP}^n$, é definido como o conjunto de unidimensional subespaços vetoriais complexos de $\mathbb{C}^{n+1}$. Uma linha $l \in \mathbb{CP}^n$ é determinada por um ponto $\xi \in l$ diferente de zero. Qualquer outro ponto ξ' satisfies $\xi' = \lambda\xi$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Então, podemos identificar $\mathbb{CP}^n$ com o quociente $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ e considerar *coordenadas homogêneas*

$$\begin{array}{rcl} l & = & [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \\ \text{onde} \quad \xi = (z_0, z_1, \ldots, z_n) & \in & l \\ \text{e} \quad [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] & = & [\lambda z_0 : \lambda z_1 : \ldots : \lambda z_n]. \end{array}$$

Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$ a aplicação quociente $(z_0, \ldots, z_n) \mapsto [z_0 : \ldots : z_n]$. Seja $U_i = \{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]\ ;\ z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{CP}^n$ e seja Φ_i a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Phi_i : U_i & \to & \mathbb{C}^n \\ {[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]} & \mapsto & \left(\dfrac{z_0}{z_i}, \ldots \dfrac{\widehat{z_i}}{z_i}, \ldots, \dfrac{z_n}{z_i}\right). \end{array}$$

Demostre que $\{U_i\}$, para $i = 0, \ldots, n$, forma um recobrimento para $\mathbb{CP}^n$. Demostre que para todo i, j, $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é um difeomorphismo e então $\mathbb{CP}^n$ admite a estrutura de uma variedade suave de dimensão $2n$. Demostre que $\mathbb{CP}^n$ é compacto. Demostre que o grupo $U(n+1)$ age transitivamente e suavamente em $\mathbb{CP}^n$.

7.3. Demostre que a restrição de π a $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ é uma submersão sobrejetora.

7.4. Demostre que a métrica rodonda em S^{2n+1} desce para uma métrica homogênea e isotrópica em $\mathbb{CP}^n$, chamada a métrica de Fubini-Study.

7.5. Seja $f : \overline{M} \to M$ uma submersão riemanniana. Um vetor $\bar{x} \in T_{\bar{p}}\overline{M}$ é *horizontal* se ele é ortogonal à fibra. O espaço tangente $T_{\bar{p}}\overline{M}$ admite então a decomposiç' ao $T_{\bar{p}}\overline{M} = (T_{\bar{p}}\overline{M})^h \oplus (T_{\bar{p}}\overline{M})^v$, onde $(T_{\bar{p}}\overline{M})^h$ e $(T_{\bar{p}}\overline{M})^v$ indicam os subespaços horizontais e verticais, respectivamente. Se $X \in \Gamma(TM)$, o levantamento horizontal $\overline{X}$ de X é o campo horizontal definido por $df_{\bar{p}}(\overline{X}(\bar{p})) = X(p)$.

(1) Mostre que $\overline{X}$ é diferenciavel.
(2) Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\overline{M}$ respectivamente. Mostre que
$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{(\nabla_X Y)} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^v, \quad X, Y \in \Gamma(TM),$$
onde Z^v é a componente vertical de Z.
(3) Demostre que $[\overline{X}, \overline{Y}]^v(\bar{p})$ depende apenas de $\overline{X}(\bar{p})$ e de $\overline{Y}(\bar{p})$.

Sugestão (2) : Sejam $X, Y, \in \Gamma(TM)$. Seja $T \in \Gamma(\overline{M})$ um campo vertical. Observe que :

$$\begin{array}{rclrcl} \langle \overline{X}, T\rangle = \langle \overline{Y}, T\rangle = 0, & & & \overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle = X\langle X, Y\rangle, \\ df[\overline{X}, T\rangle = 0, & & & [X,Y] = [df\overline{X}, df\overline{Y}] = df[\overline{X}, \overline{Y}], \\ \text{e} \quad T\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle & = & 0. \end{array}$$

Conlcua que $\langle[\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z}\rangle = \langle [X,Y], Y\rangle$, $\langle[\overline{X}, T], \overline{Y}\rangle = 0$. e use a fórmula da conexão de Levi-Civita em função da métrica para obter que

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle, \qquad 2\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, T\rangle = \langle T, [\overline{X}, \overline{Y}]\rangle,$$

o que implica (2).

Sugestão (3) : Use o fato que

$$\langle[\overline{X}, \overline{Y}], T\rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}, T\rangle.$$

7.6. Lembramos a definição da funçõ de distânça numa variedade riemanniana conexa. O comprimento de uma curva suave $c : [0,1] \to M$ é do integral

$$l(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt.$$

Para $x, y \in M$, definimos a distânça entre x e y como

$$\begin{array}{rcl} d & : & M \times M \to \mathbb{R} \\ d(x,y) & = & \inf\{l(c) \ ; \ c \text{ uma curva com } c(0) = x, c(1) = y\}. \end{array}$$

Sejam $(\overline{M}, \tilde{g})$ e (M, g) variedades riemannianas e $\pi : \overline{M} \to M$ uma submersão riemanniana. Demostre que $d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y}) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y})$ para todo $\tilde{x}, \tilde{y} \in \overline{M}$.

7.7-7.10 Vamos estudar geodésicas em submersões riemannianas. Specificamente, vamos demostrar o seguinte :

(1) Sejam $\tilde{p} \in \overline{M}$ e $c : (-E, E) \to M$ uma geodésica com $c(0) = \pi(\tilde{p})$. Demostre que existe um único levantamento horizontal $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$, definido com $\varepsilon < E$, tal que $c = \pi \circ \gamma$ e que γ seja uma geodésica.
(2) Seja $\tilde{c}$ uma geodésica em $\overline{M}$. Se o vetor de velocidade inicial $\tilde{c}'(0)$ é horizontal, então $\tilde{c}'(t)$ é horizontal para todo t, e a curva $c = \pi \circ \tilde{c}$ é uma geodésica em M, do mesmo comprimento a $\tilde{c}$.

7.7. Seja $\pi : \overline{M} \to M$ uma submersão riemanniana. e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma geodésica com $c(0) = p = \pi(\tilde{p})$ tal que $V = c((-\varepsilon, \varepsilon))$ seja uma subvariedade mergulhada de M de codimensão $n-1$). Demostre que $\overline{V} = \pi^{-1}(V)$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$ de codimensão $n-1$. Vamos supor que a curva c tem fica dentro da imagem de π.

7.8. Para todo $\tilde{x} \in \overline{V}$, $\pi_* : H_{\tilde{x}} \to T_{\pi(\tilde{x})}M$ é um isomorfismo. Podemos definir um campo vetorial X em $\overline{V}$ pelo seguinte : para $\tilde{x} \in \overline{V}$ com $\pi(\tilde{x}) = c(t)$, seja $X_{\tilde{x}} = \pi_*^{-1}(\gamma'(t) \in H_{\tilde{x}}$. Isto é, $X_{\tilde{x}}$ é o único vetor horizontal em $\tilde{x}$ que projeta em $\gamma'(t)$. Para $\tilde{p} \in \overline{V}$ com $\pi(\tilde{p}) = p$ o fluxo do campo X defina uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{V} \subseteq \overline{M}$.

Mostre que a curva γ (em todo subintervalo compacto de $(-\varepsilon, \varepsilon)$) tem o mesmo comprimento que a curva c. Demostre que a curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$ deve ser uma geodésica. (Demostre isso usando o fato que uma curva minimizante deve ser uma geodésica).

7.9. Seja $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$ uma geodésica em $\overline{M}$. Se o vetor de velocidade inicial $\tilde{c}'(0)$ é horizontal, demostre que $\tilde{c}'(t)$ é horizontal para todo t, e que a curva $c = \pi \circ \tilde{c}$ é uma geodésica em M, do mesmo comprimento a $\tilde{c}$.

[Dica : considere os dados iniciais $(p = \pi(\tilde{p}), v = \pi_*(\tilde{c}'(0))$ e considere a geodésica em M com esse ponto e velocidade inicial. Demostre que $\tilde{c}$ deve ser o levantamento horizontal para essa curva, como foi construido no último exercício.]

7.10. Dê um exemplo de uma submersão riemanniana $\pi : \overline{M} \to M$ tal que M seja completa mas $\overline{M}$ seja incompleta.

7.11. Seja $f : \overline{M} \to M$ uma submersão riemanniana. Sejam $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}$ seus levantamentos horizontais, e sejam R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de M e $\overline{M}$ respectivamente.

(1) Prove que :

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}_{\overline{X},\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{W}\rangle &= \langle R_{X,Y}Z, W\rangle - \frac{1}{4}\langle [\overline{X}, \overline{Z}]^v, [\overline{Y}, \overline{W}]^v\rangle \\ &\quad + \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^v, [\overline{X}, \overline{W}]^v\rangle - \frac{1}{2}\langle [\overline{Z}, \overline{W}]^v, [\overline{X}, \overline{Y}]^v\rangle. \end{aligned}$$

(2) Prove que :

$$K(\sigma) = \overline{K}(\bar{\sigma}) + \frac{3}{4}|[\overline{X}, \overline{Y}]^v|^2 \geq \overline{K}(\bar{\sigma})$$

Sugestão para (1) : Usaremos as notações da última questão. Observe que $\overline{X}\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{W}\rangle = X\langle \nabla_Y Z, W\rangle$. Portanto

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{W}\rangle &= \overline{X}\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{W}\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{W}\rangle \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z, W\rangle - \frac{1}{4}\langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^v, [\overline{X}, \overline{W}]^v\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $T \in \Gamma(T\overline{M})$ é vertical,

$$\langle \overline{\nabla}_T \overline{X}, \overline{Y}\rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} T, \overline{Y}\rangle + \langle [T, \overline{X}], \overline{Y}\rangle = -\langle T, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Z}, \overline{W}\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]^h}\overline{Z}, \overline{W}\rangle + \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]^v}\overline{Z}, \overline{W}\rangle \\ &= \langle \nabla_{[X,Y]}Z, W\rangle - \frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}]^v, [\overline{Z}, \overline{W}]^v\rangle. \end{aligned}$$

Juntando o acima, obtém-se (1).

7.12. Demostre que o tensor de curvatura de $\mathbb{CP}^n$ é dado por

$$R_{X,Y}Z = -\langle X, Z\rangle Y + \langle Y, Z\rangle X + \langle X, JZ\rangle JY - \langle Y, JZ\rangle JX + 2\langle X, JY\rangle JZ.$$

7.13. Seja π a projeção de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ para $\mathbb{CP}^n$. Demostre que existe uma 2-forma ω em $\mathbb{CP}^n$ tal que

$$\pi^*\omega = \left(\sum_{k=0}^{n} dz^k \wedge d\bar{z}^k\right) / \left(\sum_{k=0}^{n} |z^k|^2\right),$$

onde $dz^k = dx + idy^k$ e $d\bar{z}^k = dx^k - idy^k$. Demostre que ω é invariante pela ação $U(n+1)$ em $\mathbb{CP}^n$, e que para $k = 2, \ldots, n$ a $2k$-forma ω^k é não-zero e $U(n+1)$-invariante. Nós podemos também ver que as formas ω^k geram a cohomologia de De Rham de $\mathbb{CP}^n$.

8. Cálculo de Tensores

8.1. Seja $\alpha \in \Lambda^p V$ um multi-vetor. Demostre que $\alpha \wedge \alpha = 0$ se p é ímpar. Será que isso é verdade para p par?

8.2. Se $\alpha \in V$ e $\beta \in \Lambda^p V$ é um multi-vetor arbitrário, demostre que $\alpha \wedge \beta = 0$ se e somente se existe um multi-vetor $\gamma \in \Lambda^{p-1} V$ tal que $\beta = \alpha \wedge \gamma$.

8.3. Se X e Y são campos vetoriais e f e g são funções em M, demostre que

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

8.4. Seja X um campo vetorial em M e $\varphi : M \to N$ um difeomorfísmo. Demostre que se φ_t denota o fluxo local X, então $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$ é o fluxo local de $\varphi_* X$ em N.

8.5. Seja $E, F \to X$ fibrados vetoriais sobre a variedade suave X e seja $\Gamma(E)$ o conjunto de seções suaves de E (parecido para F).

(1) Seja $A \in \Gamma(End(E,F))$ uma seção do fibrado de endomorfismos de E para F. Isto ẽ dizer que em todo ponto $p \in M$, $A_p : E_p \to F_p$ é uma aplicação entre a fibra de E para a fibra de F, por cima de p. Demostre que A induz uma aplicação linear
$$\Phi_A : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$
que satisfaz $\Phi_A(f\sigma) = f\Phi_A(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Gamma(E)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(X))$.

(2) Demostre que uma aplicação linear
$$\Phi : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$
é linear com respeito à ação de $\mathcal{C}^\infty(X)$ em $\Gamma(E)$ e $\Gamma(F)$ (i.e. $\Phi(f\sigma) = f\Phi(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Gamma(E)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$) se e somente se Φ é induzida por uma seção do fibrado $\mathrm{End}(E,F)$.

8.6.

(1) Prove que a diferença entre duas conexões em TM é um tensor.

(2) Seja g uma métrica riemanniana e $\tilde{g} = f^2 g$ para $f > 0$ uma função estrictamente positiva. Dê a relação entre as conexões de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ para $\tilde{g}$ e para ∇ para g.

8.7.

(1) Generalize a fórmula na Eq. 8.1 para tensores de tipo (r,s). Isto é, para seções do fibrado $\bigotimes^r TM \otimes \bigotimes^s T^*M$.

(2) Seja g uma métrica em M e ∇ uma conexão em TM. Calcule a derivada covariante ∇g e relacione essa fórmula com a primeira condicão na definição da conexão de Levi-Civita.

8.8. Seja ∇ uma conexão no fibrado tangente TM. Vamos ver que ∇ induz conexões nos outros fibrados de tensores em M.

Para $\alpha \in \Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ defina $\nabla\alpha$ por

$$(\nabla\alpha)(X_1, \ldots, X_k) = d(\alpha(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} \alpha(X_1, \ldots, \nabla X_i, \ldots, X_k) \tag{8.1}$$

para $X_i \in \Gamma(TM)$.

(1) Demostre que para $k = 0$, ∇ coincide com a derivada exterior

$$\nabla = d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M).$$

(2) Para $k = 1$, demostre que, para $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,
 (a) $\nabla_{fy}\alpha = f\nabla_Y\alpha$,
 (b) $(\nabla_Y\alpha)(fX) = f(\nabla_Y\alpha)(X)$,
 e então, usando Ex. 8.5, conclui que $\nabla\alpha \in \Omega^0(T^* \otimes T^*) = \Omega^1(T^*M)$. Demostre que

$$\nabla(f\alpha) = f\nabla\alpha + df \otimes \alpha$$

 e então conclua que ∇ define uma conexão em $T^*M = \Lambda^1 T^*M$.

8.9. Nesse exercício, vamos extender a derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ para a álgebra de tensores numa variedade suave M. Consideramos os fibrados vetoriais $\bigotimes^{r,s} = \bigotimes^r TM \otimes \bigotimes^s T^*M$ e as seções $\Omega^0(\bigotimes^{r,s})$ deles.

Primeiro, notamos que se $\alpha \in \Omega^0(\bigotimes^{r_1,s_2})$ é um tensor de tipo (r_1, s_1), e β é um tensor de tipo (r_2, s_2), então $\alpha \otimes \beta$ é um tensor de tipo $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$.

Segundo, para qualquer um dos r-indices, e qualquer um dos s-indices, existe uma aplicação de contração

$$C : \Omega^0(\bigotimes^{r,s}) \to \Omega^0(\bigotimes^{r-1,s-1})$$

por avaliação do vetor no covetor. Por exemplo,

$$\begin{aligned} C_{1,2} \quad &: \quad \bigotimes^{1,2} \to \bigotimes^{0,1} \\ C_{1,2}\left(X \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2\right) \quad &= \quad \alpha_1(X) \cdot \alpha_2. \end{aligned}$$

Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial. Então, afirmamos que existe uma extensão da derivada de Lie

$$\mathcal{L}_X : \Omega^0\left(\bigotimes^{r,s}\right) \to \Omega^0\left(\bigotimes^{r,s}\right)$$

para todo par (r, s) que satisfaz as condições

(1) $\mathcal{L}_X f = Xf$ para $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(\bigotimes^{0,0})$,
(2) $\mathcal{L}_X(\alpha \otimes \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (\mathcal{L}_X\beta)$,
(3) Para toda tal contração C de vetores e covetores, $\mathcal{L}_X(C(\alpha)) = C(\mathcal{L}_X\alpha)$.

Então,

(1) Demostre que, com essas condições, a derivada de Lie deve satisfazer, para $\alpha \in \Omega^1(M) = \Omega^0(\bigotimes^{0,1})$ e $Y \in \Gamma(TM)$,

$$(\mathcal{L}_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) = \alpha([X, Y]).$$

(2) Seja g uma métrica em M. Isto é, $g \in \Omega^0(\bigotimes^{0,2})$ com as condições de simetria e positividade. Calcule uma expressão para $\mathcal{L}_X g$.

8.10. Se ω é uma 1-forma, X é um campo vetorial e f é uma função, demostre que

$$\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega - \omega(X)df.$$

8.11. Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial e $\omega \in \Omega^k(M)$ uma k-forma. Definimos a contração de ω por X como a $(k-1)$-forma $i_X\omega \in \Omega^{(p-1)}(M)$

$$(i_X\omega)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{k-1}).$$

Para $k = 1$, demostre que a derivada exterior e a derivada de Lie são relacionadas pela fórmula

$$d(i_X\omega) + i_X d\omega = \mathcal{L}_X\omega$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$ e todo $\omega \in \Omega^1(M)$. De verdade, essa fórmula aplica para toda k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$.

8.12. Prove o seguinte : se X é um campo vetorial na variedade M e $\mathfrak{D}$ é uma derivação da álgebra $\Gamma(\bigotimes^*)$ que comuta com contrações e satisfaz $\mathfrak{D}f = Xf$ para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $\mathfrak{D}Y = [X, Y]$ para todo $Y \in \Gamma(TM)$, então $\mathfrak{D} = \mathcal{L}_X$.

8.13. Uma *distribução* numa variedade suave M é um sub-fibrado D do fibrado tangente TM. Um campo vetorial X em M é chamado tangente à distribução se $X_x \in X_x$ para todo $X \in M$. A distribução D é chamada *integrável* se oara todo par de campos tangentes a D, o colchete de Lie deles também é tangente a D. Seja α uma 1-forma em M e $D = \ker(\alpha)$. Demostre que D é integrável se e somente se $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

8.14. Seja $\alpha \sum_i \alpha_i dx^i$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^n$. Demostre que $d\alpha = 0$ se e somente se

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$.

8.15. (O lema de Poincaré em grau 1)

Seja $\alpha \sum_i \alpha_i dx^i$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^n$. Demostre que $d\alpha = 0$ se e somente se existe uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $df = \alpha$. Dica : se $d\alpha = 0$, define

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i(tx) dt$$

e use o exercício anterior e uma integração por partes para demostrar que $df = \alpha$.

8.16. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial numa variedade M. Nesse exercício usamos a notação $\Omega^0(E) = \Gamma(E)$ e $\Omega^k(E) = \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes E)$. Isto é dizer que $\Omega^0(E)$ é o conjunto de seções suaves de E, e $\Omega^k(E)$ é o conjunto de k-formas em M que tomam valores em E. Em todo ponto $p \in M$, para toda tal forma $\alpha_p \in \Lambda^k T_p^*M \otimes E_p$ define

$$\alpha_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to E_p.$$

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial suave em M. Uma *conexão* em E é dada por uma aplicação linear

$$\nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$$

que satisfaz

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma.$$

(1) Demostre que para $U \subseteq M$ um aberto em M, se $\mathrm{supp}(\sigma) \subseteq U$, então $\mathrm{supp}(\nabla\sigma) \subseteq U$.
(2) Mostre que, para $\sigma \in \Omega^0(E)$ e $X \in \Gamma(TM)$, a expressão $(\nabla_X\sigma)(p) \in E_p$ depende somente no valor $X_p \in T_pM$ e nos valores de σ em uma pequena vizinhança de $p \in M$.

9. Curvatura

9.1. No espaço hiperbólico $\mathbb{R}H^2 = (\mathbb{R}^2_+, g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2))$ demostre que

$$\nabla_{\partial_y}\nabla_{\partial_x}\partial_y - \nabla_{\partial_x}\nabla_{\partial_y}\partial_y \neq 0.$$

9.2. Seja M uma variedade riemanniana de curvatura constante κ. Calcule que

$$\mathrm{Ric} = (n-1)\kappa g \quad \text{e} \quad \mathrm{scal} = n(n-1)\kappa.$$

9.3. Sejam g e $\bar{g}$ duas métricas riemannianas numa variedade suave M tal que $\bar{g} = \lambda g$ para um constante $\lambda > 0$. Demostre que o tensor de curvatura, a curvatura seccional, o tensor de Ricci e a curvatura escalar das variedades riemannianas $(M, \bar{g})$ e (M, g) são relacionadas pelas equações :

$$\bar{R} = R, \quad \bar{K} = \lambda^{-1}K, \quad \overline{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} \text{ e } \overline{\mathrm{scal}} = \lambda^{-1}\mathrm{scal}.$$

9.4. Use as simetrias do tensor de curvatura para mostrar que o tensor de Ricci determina o tensor de curvatura numa variedade riemanniana de dimensão 3.

9.5. Relacionada com a última questão, para uma variedade de dimensão 3, demostre que se o tensor de curvatura tem forma diagonal

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

então a curvatura de Ricci tem forma diagonal dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta+\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha \end{pmatrix}.$$

9.6. Seja M uma variedade riemanniana com a propriedade que para quaisquer dois pontos $p, q \in M$, a aplicação de transporte paralelo de p para q ao longo de uma curva suave por partes γ ligando p e q nõ depende da curva. Demostre que M deve ser plana. Isto é, que $R \equiv 0$.

9.7. Como uma conversa parcial do último exercício, suponha que M seja uma variedade plana, $p, q \in M$ e γ_0, γ_1 duas curvas ligando p e q. Demostre que se γ_0 e γ_1 são suavamente homotópicas com os pontos limites fixos, então a aplicação de transporte paralelo de p a q ao longo de γ_0 e γ_1 coincidem.

9.8. Se $F : M \to M$ é um difeomorfismo, a empurrada (*push-forward*) de um campo vetorial é definida como

$$(F_*X)_p = dF_{F^{-1}(p)}(X_{F^{-1}(p)}).$$

Seja F uma isometria da métrica g. Demostre que $F_*(\nabla_X Y) = \nabla_{F_*X}F_*Y$ para todos os campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(TM)$. Dica : use a fórmula para $g(\nabla_X Y, Z)$ dada em termos de derivadas direcionais e colchetes de Lie.

9.9. Seja (M, g) uma variedade riemanniana, e (x^i) qualquer sistéma de coordenadas em M.

(1) Calcule os componentes da tensor de curvatura riemanniana em termos dos simbólos de Christoffel em coordnadas.
(2) Suponha que (x^i) sejam coordenadas normais centradas em $p \in M$. (Isto é que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ e $\partial_k g_{ij}(p) = 0$). Demostre que o seguinte é verdade em p :

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\partial_j\partial_l g_{ik} + \partial_i\partial_k g_{jl} - \partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_j\partial_k g_{il}\right).$$

9.10. Demostre que o tensor de curvatura de uma variedade riemanniana satisfaz as identidades seguintes :

(1) Para vetores tangentes $X, Y, Z \in T_pM$,

$$\begin{aligned} 6\langle R_{XY}Z, W\rangle &= \langle R_{X,(Y+Z)}(Y+Z), W\rangle - \langle R_{X,(Y-Z)}(Y-Z), W\rangle \\ &\quad + \langle R_{Y,(X-Z)}(X-Z), W\rangle - \langle R_{Y,(X+Z)}(X+Z), W\rangle, \end{aligned}$$

(2) Para vetores tangentes a, b, c temos

$$4\langle R_{a,b}a, c\rangle = \langle R_{a,(b+c)}a, b+c\rangle - \langle R_{a,(b-c)}a, b-c\rangle$$

Demostre então o resultado da aula : A curvatura seccional $\xi \mapsto K(\xi)$ e métrica num ponto p determinam o tensor de curvatura em p.

9.11. Use a última questão para os seguintes. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e denota por $K(\sigma)$ a curvatura seccional no plano $\sigma \subseteq T_pM$. Seja $\kappa = \min K(\sigma)$ e $\delta = \max K(\sigma)$ a minima e máxima curvatura seccional no ponto $p \in M$.

(1) Seja ξ, η, ζ vetores ortogonais em T_pM. Demostre que

$$\langle R_{\xi,\eta}\xi, \zeta\rangle \leq \frac{\delta - \kappa}{4}|\xi|^2|\eta + \zeta|^2.$$

(2) Demostre que para u_j vetores ortonormais, $j = 1, \ldots, 4$,

$$|\langle R_{u_1,u_2}u_3, u_4\rangle| \leq \frac{2}{3}(\delta - \kappa).$$

9.12. Já vimos que em todo ponto $p \in M$, escrevendo $V = T_pM$, o tensor de curvatura R de uma variedade riemanniana toma valores em $Sym^2(\Lambda^2 V^*) \subseteq \Lambda^2 V^* \otimes \Lambda^2 V^* \subseteq \bigotimes^4 V^*$. Consideramos a aplicação de Bianchi

$$\begin{aligned} \beta &: Sym^2(\Lambda^2 V^*) \to \bigotimes^4 V^*, \\ \beta(T)(X, Y, Z, W) &= \frac{1}{3}\left(T(X, Y, Z, W) + T(Y, Z, X, W) + T(Z, X, Y, W)\right). \end{aligned}$$

(1) Demostre que $\beta(T)$ toma valores em $\Lambda^4 V^* \subseteq \bigotimes^4 V^*$.
(2) Demostre que a aplicação $\beta : Sym^2(\Lambda^2) \to \Lambda^4$ é dada por $\sigma \circ \omega \mapsto \sigma \circ \omega$. [Dica : calcule os dois lados em vetores X, Y, Z, W.]
(3) Demostre, por considerando um conjunto de elementos geradores de $\Lambda^4 V^*$, que β é sobrejetora.
(4) Lembramos que o espaço vetorial $\mathcal{R} = \ker \beta \subseteq Sym^2(\Lambda^2 V^*)$ é o conjunto de tensores de curvatura em V. Se $\dim(V) = n$, calcule a dimensão de $\mathcal{R}$. Calcule esse nuúmero explicitamente para $n = 2, 3, 4$.

9.13. Seja ∇ uma conexão em TM e seja $\{E_i\}$ um referencial local para M, definido em algum conjunto aberto $U \subseteq M$. Seja $\{\varphi^j\}$ o co-referencial dual.

(1) Demostre que existe uma matriz de 1-formas unicamente determinada ${\omega_i}^j$ em U, chamadas as conexão 1-formas para esse referencial, tais que
$$\nabla_X E_i = {\omega_i}^j(X)E_j.$$
para todo $X \in TM$.

(2) Demostre a *primeira equação estrutural de Cartan* :
$$d\varphi^j = \varphi^i \wedge {\omega_i}^j + \tau^j$$
onde $\{\tau^1, \dots, \tau^n\}$ são as *torsão 2-formas*, definidas em U em termos do tensor de torsão τ e o referencial $\{E_i\}$ por
$$T^\nabla(X,Y) = \tau^j(X,Y)E_j.$$

9.14. Seja ∇ a conexão de Levi-Civita numa variedade riemanniana (M,g), e seja ${\omega_i}^j$ as suas conexão 1-formas com respeito ao referencial local $\{E_i\}$. Defina a matriz de 2-formas ${\Omega_i}^j$, chamadas as 2-formas de curvatura, por
$${\Omega_i}^j = \frac{1}{2}{R_{kli}}^j \varphi^k \wedge \varphi^l.$$
Demostre que elas satisfazem a *segunda equação estrutural de Cartan* :
$${\Omega_i}^j = d{\omega_i}^j - {\omega_i}^k \wedge {\omega_k}^j.$$
[Dica : Expande $R_{E_i,E_j}E_k$ em termos de ∇ e ${\omega_i}^j$.]

9.15. Nesse exercício vamos derivar a segunda identidade de Bianchi. Isto é que para ∇ uma conexão em TM sem torsão, a derivada covariante da curvatura satisfaz
$$(\nabla_T R)_{XY}Z + (\nabla_X R)_{YT}Z + (\nabla_Y R)_{TX}Z = 0.$$
Nesse exercício, vamos escrever a soma simetrizada nessa maneira usando os parenteses $\{\,\}$. Por exemplo, a identidade de Bianchi é escrita $(\nabla_{\{T}R)_{X,Y\}}Z = 0$. Lembramos de Ex. 8.8 que a conexão extende-se para uma conexão em todos os fibrados de tensores. Por exemplo, para $A \in \Gamma(End(TM)) = \Gamma(TM \otimes T^*M)$, $(\nabla_T A)(X) = \nabla_T(A(X)) - A(\nabla_T X)$ para $T, X \in \Gamma(TM)$. A derivada da R então é dada por
$$(\nabla_T R)_{XY}Z = \nabla_T(R_{XY}Z) - R_{\nabla_T X,Y}Z - R_{X,\nabla_T Y}Z - R_{X,Y}(\nabla_T Z). \tag{9.1}$$
Se considerarmos $R_{X,Y} \in \Gamma(End(TM))$, o primeiro e o último termos juntos podem ser vistos como $\nabla_T(R_{X,Y})$ e
$$(\nabla_T R)_{XY} = \nabla_T(R_{XY}) - R_{\nabla_T X,Y} - R_{X,\nabla_T Y}.$$
Então, a anti-simetrização $(\nabla_T R)_{XY} + (\nabla_X R)_{YT} + (\nabla_Y R)_{TX}$ tem contribuições desses três termos. O primeiro dá
$$\nabla_{\{T}(R_{XY\}}) \quad = \quad \nabla_T(R_{XY}) + \nabla_X(R_{YT}) + \nabla_Y(R_{TX}).$$

(1) Demostre que isto pode ser simplificado como $\nabla_T\nabla_{[X,Y]}$ mais cinco outros termos parecidos.
(2) Simplique isto como $R_{\nabla_T X,Y} + \nabla_{[\nabla_T X,Y]}$ mais cinco outros termos.
(3) Use a identidade de Jacobi para demostrar que isso é igual a $\nabla_{\{T}(R_{XY\}}) = R_{\nabla_{\{T}X,Y\}} + R_{\{X,\nabla_T Y\}}$.
(4) Conclua disso a segunda identidade de Bianchi.

9.16. Nessa questão, vamos demostrar um resultado mencionado na aula : Seja (M, g) uma variedade riemanniana conexa de dimensão $n \geq 3$. Suponha que exista uma função $\kappa : M \to \mathbb{R}$ tal que o tensor de curvatura seja dado por $R = \kappa R^0$ onde R^0 é o tensor

$$R^0_{XY} Z = -g(Y, Z)X + g(X, Z)Y.$$

Então, a função κ é constante.

(1) Use a compatibilidade de ∇ com a métrica g para mostrar que $\nabla R^0 = 0$. [Dica : a derivada de tensores de tipo $(1, 3)$ é dada pela Eq. 9.1.]
(2) Demostre que se $R = \kappa R^0$, então R satisfaz

$$\begin{array}{rcl} \nabla_T(R_{XY}Z) & = & (T\kappa)R^0_{XY}Z + \kappa\nabla_T(R^0_{XY}Z) \\ \text{e então} \quad \nabla_T R & = & (T\kappa)R^0. \end{array}$$

(3) Pois M tem dimensão maior ou igual a 3, para $T \in T_pM$, é possível escolher $X, Y \in T_pM$ ortogonais a T e com $X \perp Y$. Para campos X, Y, T assim, use a segunda identidade de Bianchi para demostrar que $T\kappa = 0$. T é arbitrário, então podemos concluir que κ deve ser constante.

9.17. Um refinamento do último exercício é o seguinte : Demostre que a divergência da curvatura de Ricci é igual a (um constante vezes) a derivada exterior da curvatura escalar. Aplicaremos isso a métricas de Einstein.

(1) Demostre que a derivada de curvatura satisfaz
   (a) $(\nabla_X R)_{YZ} W = -(\nabla_X R)_{ZY} W$,
   (b) $g((\nabla_X R)_{YZ} W, T) = g((\nabla_X R)_{WT} Y, Z)$
   para campos $X, Y, Z, W, T \in \Gamma(TM)$.
(2) Para $p \in M$, seja $\{e_i\}$ um referencial local em $U \subseteq M$ com $p \in U$. Suponha que $(\nabla_X e_i)(p) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Demostre que para um tal referencial,

$$g((\nabla_X R)_{e_i,e_j} e_i, e_j) = g(\nabla_X(R_{e_i,e_j} e_i), e_j) = Yg(R_{e_i,e_j} e_i, e_j).$$

(3) Lembramos que a curvatura de Ricci é uma forma simétrica $Ric = \rho : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Definimos a divergência de ρ como a 1-forma em M

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div}\rho & : & T_pM \to \mathbb{R} \\ \mathrm{div}\rho(Y) & = & \mathrm{tr}_g\{X, Z \mapsto (\nabla_X \rho)(Z, Y), \\ \mathrm{div}\rho(Y) & = & \sum_i (\nabla_{e_i}\rho)(e_i, Y) \end{array}$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal para T_pM. Use as simetrias de ∇R para demostrar que para um referencial como em (2),

$$\mathrm{div}\rho(Y) = \sum_{ij} g\left((\nabla_{e_i} R)_{Y,e_i} e_i, e_j\right).$$

(4) Use a segunda identidade de Bianchi para mostrar que isto vale

$$Y \sum_{ij} g(R_{e_i,e_j} e_i, e_j) - (\mathrm{div}\rho)(Y)$$

e então conclua que $\mathrm{div}\rho = \frac{1}{2} ds$ onde s denota a curvatura escalar da métrica g.
(5) Seja (M, g) uma variedade riemanniana conexa de dimensão $dim \geq 3$. Suponha que a curvatura de Ricci satisfaça $\rho = fg$ para uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Demostra que $f \equiv const$ deve ser constante.

9.18. Seja E um fibrado vetorial com conexão ∇. Definimos o operador diferencial

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\nabla}:\Omega^k(E) &\to \Omega^{k+1}(E),\\ (\mathbf{d}^{\nabla}\alpha)(X_0,\dots,X_k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\nabla_{X_i}\Big(\alpha(X_0,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_k)\Big)\\ &\quad -\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j\dots,X_k).\end{aligned}$$

(1) Demostre que
$$(\mathbf{d}^{\nabla}\alpha)(X_0,\dots,fX_i,\dots,X_k)=f(\mathbf{d}^{\nabla}\alpha)(X_0,\dots,X_i,\dots,X_k).$$
A expressão em $p\in M$ então depende somente nos valores $(X_i)_p$ em p, e podemos concluir que $\mathbf{d}^{\nabla}\alpha\in\Omega^k(E)$.

(2) A identidade $I:TM\to TM$ é uma seção de $T^*M\otimes TM$ e então pode ser considerada uma 1-forma com valores em TM, $I\in\Omega^1(TM)$. Seja ∇ uma conexão em TM. Calcule $\mathbf{d}^{\nabla}I$ e relacione isto com a torsão de ∇, e então com a segunda condição na conexão de Levi-Civita.

(3) Seja ∇ uma conexão sobre um fibrado vetorial E, e seja $\sigma\in\Omega^0(E)$. Então $\nabla\sigma\in\Omega^1(E)$. Calcule $\mathbf{d}^{\nabla}(\nabla\sigma)$.

(4) A curvatura R^{∇} de ∇ define uma 2-forma com valores em $\mathrm{End}(E)$. Calcule $\mathbf{d}^{\nabla}R^{\nabla}$. Nota que o fibrado $\mathrm{End}(E)$ está equipado com uma conexão induzida por E.

10. Geodésicas e Campos de Jacobi

10.1. Seja M uma variedade riemanniana com curvatura seccional identicamente nula. Mostre que, para cada $p\in M$, a aplicação $\exp_p: B_\varepsilon(0)\subseteq T_pM\to B_\varepsilon(p)$ é uma isometria, onde $B_\varepsilon(p)$ é uma bola normal em p.

10.2. Seja M uma variedade riemanniana, $\gamma:[0,1]\to M$ uma geodésica, e J um campo de Jacobi ao longo de γ. Prove que existe uma superfície parametrizada $f(t,s)$, onde $f(t,0)=\gamma(t)$ e as curvas $t\mapsto f(t,s)$ são geodésicas, tal que $J(t)=\frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$.

10.3. Seja (M,g) uma variedade riemanniana de dimensão 2. Seja (r,θ) coordenadas polares em T_pM.

(1) Demostre que, num região $U\subseteq T_pM$ sobre qual $\exp_p$ é um difeomorfismo à imagem, a métrica g satisfaz
$$\exp_p^* g = dr^2+f(r,\theta)^2d\theta^2,$$
com $f(0,\theta)=0$ e $f_r(0,\theta)=1$.

(2) Seja $\{u,v\}$ uma base ortonormal para T_pM e seja c a geodésica $r\mapsto\exp_p(ru)$. Transporte paralelo ao de c do vetor v define um campo vetorial $V(r)$. Demostre que pela derivada da aplicação exponencial,
$$\begin{aligned}(d\exp_p)_{ru}\frac{\partial}{\partial r} &= c'(r),\\ (d\exp_p)_{ru}\frac{\partial}{\partial\theta} &= f(r,0)V(r).\end{aligned}$$
Isto demostre que o campo $J(r)=f(r,0)V(r)$ define um campo de Jacobi ortogonal para todo valor de r ao vetor $c'(r)$.

(3) Demostre que a curvatura seccional no ponto $c(r) \in M$ é dado por
$$K(T_{c(r)}M) = -\frac{\partial_r^2 f(r,0)}{f(r,0)}.$$
(4) Use esse resultado para calcular a curvatura de S^2 e H^2, com as métricas padrões.

10.4. Uma geodésica $\gamma : [0,\infty) \to M$ em uma variedade Riemanniana M é um *raio partindo de* $\gamma(0)$ se ela é minimizante entre $\gamma(0)$ e $\gamma(s)$, para todo $s \in (0,\infty)$. Admita que M é completa, não-compacta, e seja $p \in M$. Mostre que M contém um raio partindo de p.

10.5. Uma *linha* numa variedade riemanniana M é uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to M$ de velocidade 1 tal que $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. M é *conexa em infinito* se para todo conjunto compacto $K \subseteq M$, existe um conjuto compacto $C \supseteq K$ tal que todo par de pontos $p, q \in M \setminus C$ pode ser conectado por uma curva em $M \setminus K$. Uma variedade que não é conexa em infinto é *desconexo em infinito.*

Seja (M, g) uma variedade riemanniana completa. Suponha que M seja não-compacta e desconexa em infinito. Demostre que M contem uma linha.

10.6. Demostre que toda variedade suave M admite uma métrica riemanniana completa.

10.7. Demostre que as seguintes afirmações de uma variedade riemanniana M são equivalentes :

(1) M é completa.
(2) Existe $p \in M$ tal que a a função $f_p : q \mapsto d(q,p)$ é *proper.*
(3) Para todo $p \in M$, a função $f_p : q \mapsto d(q,p)$ é proper.

10.8. Seja (M, g) uma variedade riemanniana, e seja γ uma geodésica em M. Use o teorema de Hopf-Rinow para demostrar o seguinte :

(1) Se não existe uma geodésica mais curta de γ entre $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, demostre que γ é minimizante em $[a, b]$.
(2) Se existe uma outra geodésica c, do mesmo comprimento de γ, entre $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, então γ não é minimizante num intervalo maior $[a, b+\varepsilon]$.
(3) Se γ é minimizante num intervalo I, então ela também é minimizante em todo subintervalo $J \subseteq I$ subintervalo.

10.9. Seja (M, g) uma variedade riemanniana completa. Para $v \in T_pM$, denote por γ_v a geodésica $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Seja
$$I_v = \{t \in \mathbb{R} \ ; \ \gamma_v \ \text{ é minimizante em } [0,t]\}.$$
(1) Demostre que I_v é um intervalo fechado $I_v = [0, \rho(v)]$ com $\rho(v)$ possivelmente infinito.
(2) Demostre que $\rho(v) = \lambda\rho(\lambda v)$.

Assim como podemos só considerar geodésicas parametrizadas por comprimento de arco, podemos só considerar a função ρ em vetores de comprimento 1. Isto é dizer, na esféra unitária tangente $S(0,1)$. É possível demostrar que a função ρ, com valores em $\mathbb{R}^+ \cup \infty$, é contínua.

Se $I_v = [0, \rho]$ para $\rho < \infty$, dizemos que $\gamma_v(\rho)$ é o *ponto de corte* (cut point) de $p = \gamma_v(0)$ ao longo de γ_v.

Seja U_p o conjunto de todos os vetores $\rho(v)v \in T_pM$ onde $|v| = 1$ e $\rho(v) < \infty$ e seja $Cut(p) = \exp_p(U_p) \subseteq M$ a imagem sob $\exp_p$. $Cut(p)$ consiste de todos os pontos de corte de p para todas as geodésicas emanando de p. Chamamos $Cut(p)$ o *lócus de corte* de p e chamamos U_p o *lócus de corte tangencial* de p.

10.10. Seja (M, g) uma variedade riemanniana completa. Seja $E = \{tv\ ;\ 0 \leq t < \rho(v),\ v \text{ um vetor unitário}\}$.

(1) Demostre que $E \subseteq T_pM$ é um subconjunto contratível.
(2) Demostre que a aplicação exponencial $\exp_p$ envia E difeomorficamente sobre um subconjunto aberto de M.
(3) Demostre que M é a união disjunto do lócus de corte de p com a imagem de E por $\exp_p$: $M = \exp_p(U_p) \cup Cut(p)$.

O conjunto aberto $\exp_p(E)$ de M é o maior conjunto aberto de M em que um sistema de coordenadas normais, com bases p, pode ser definido.

10.11. Seja M uma variedade riemanniana completa e $p \in M$. Demostre que M é compacta se e somente se para todo vetor tangente unitário $v \in T_pM$, $\rho(v)$ é finito.

11. Imersões Isométricas

11.1. Calcule a curvatura média da imersão padrão de S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$.

11.2. Seja $M \subseteq \mathbb{R}^3$ o catenoide, que é a superfície de revolução obtida por a revolução da curva $x = \cosh z$ ao redor do eixo-z. Demostre que M úma superfície minima.

11.3.

(1) Consider a imersão $f : T^2 \to \mathbb{R}^4$ do toro em espaço euclideano
$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\cos\theta_1, \mathrm{sen}\theta_1, \cos\theta_2, \mathrm{sen}\theta_2).$$
Calcule a curvatura média da imagem, como uma subvariedade de $\mathbb{R}^4$.
(2) Considere a imersão $T^2 \hookrightarrow S^3$
$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\lambda\cos\theta_1, \lambda\mathrm{sen}\theta_1, \mu\cos\theta_2, \mu\mathrm{sen}\theta_2)\,.$$
onde $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Calcule a curvatura média de $T^2 \subseteq S^3$. Calcule o valor de λ para qual a imagem é mínima.

11.4.

(1) Seja $M \subseteq \mathbb{C}^2$ a superfície $M = \{(y, x) \in \mathbb{C}^2\ ;\ y^2 = x^2(x+1)\}$. Demostre que, fora do ponto $(0, 0) \in M$, M é suave subvariedade mínima de $\mathbb{C}^2$.
(2) Seja $N = \{(x, y); p(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$ onde p é um polinômio com coeficientes complexos em dois variáveis. Demostre que o lôcus suave $N_0 \subseteq N \subseteq \mathbb{C}^2$ é uma subvariedade mínima.

11.5. Suponha que Ω seja um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função suave em Ω. Seja $M = \{(x, f(x) \; ; \; x \in \Omega\} \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$ o gráfico de f. Observe que a aplicação $\varphi : \Omega \to M$ dada por $f(u) = (u, f(u))$ defina uma parametrização global de M. As coordenadas coorespondentes $(u^1, \ldots, n^n)$ em M são chamadas *coordenadas gráficas.*

(1) Seja N o campo normal unitário direcionado para cima ao longo de M. Calcule os componentes da segunda forma fundamental B em coordenadas gráficas, em termos de f e suas derivadas parciais.
(2) Seja $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ o paraboloide definido como o gráfico de $f(u) = |u|^2$. Calcule as curvaturas principais de M. Isto é, calcule os auto-valores do transformação $A^N(\cdot) : T_pM \to T_pM$.

11.6. Seguindo a última questão, suponha que $f(x) = F(x^n)$ dependa somente na última coordenada. Demostre que a segunda forma fundamental não é necessáriamente identicamente zero, mas que a hipersuperfície $M \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$ é isométrica com Ω, com a m'etrica Euclideana.

11.7. Demostre que o catenoide e o helicoide são superfícies minimas em $\mathbb{R}^3$.

11.8. Suponha que $M \subseteq \widetilde{M}$ seja uma subvariedade Riemanniana compacta e mergulhada. Para $\varepsilon > 0$, denote por N_ε o subconjunto $\{V \; ; \; |V| < \varepsilon\}$ do fibrado normal NM, e denote por M_ε o conjunto de pontos em $\widetilde{M}$ cuja distância Riemanniana de M é menor que ε.

(1) Demostre que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a restrição a N_ε da aplicação exponencial de $\widetilde{M}$ é um difeomorfismo de N_ε a M_ε. Isto generaliza o resultado da aula em que $M = \{p\}$ é um ponto. Um conjunto aberto M_ε que é a imagem de um difeomorfismo desse tipo é chamado uma *vizinhança tubular.*
(2) Se $r(x)$ denota a distância de $x \in \widetilde{M}$ a M, demostre que r^2 é uma função suave em toda vizinhança tubular. Dê um exemplo em que r^2 não é suave em todo de $\widetilde{M}$.

11.9. Suponha que $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ seja uma hipersuperfície mergulada em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $n \geq 3$, demostre que M não pode ter curvatura negativa. Para $n = 2$, dê um exemplo em que M tem curvatura negativa.

11.10. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto no espaço Euclideano, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ e $M = F^{-1}(0)$. (F é chamada a *função definida* de M.)

(1) Demostre que o campo $N = \nabla F / |\nabla F|$ defina um campo normal unitária em M. Aqui, ∇F denota o gradiente de F, restrita a M.
(2) A segunda forma fundamental B em M é dada por $B(X, Y) = h(X, Y)N$ onde h toma valores reais. Dê uma expressão para $h(X, Y)$ em termos de F e suas derivadas parciais, e onde $X = \sum_i X^i \partial_i$ em coordenadas euclideanas.
(3) Dê uma expressão para a curvatura média de M.

11.11. Seja M uma hipersuperfície mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$, com campo normal unitário N. A segunda forma fundamental pode ser considerada um endomorfismo de $TM : A^N : T_xM \to T_xM$. A divergência de A^N é dada por $\operatorname{div}(A^N) = \sum_i (\nabla_{e_i} A^N)(e_i)$, onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_xM.

(1) Usando a equação de Codazzi sobre a derivada covariante da segunda forma fundamental, demostre que
$$\operatorname{div}(A^N) = d(\operatorname{tr} A^N).$$

(2) Demostre que se $A^N = f(x) \cdot I_{TM}$ para alguma função f, então f deve ser um constante e a hipersuperfície deve ter curvatura constante.
(3) Demostre que se $A^N = \lambda \cdot \mathrm{Ric}_M$ se e somente se a métrica em M tem curvatura consante.

12. Teoremas de Comparação

12.1.

(1) Seja $A(t)$ um aplicação suave de $I \subseteq \mathbb{R}$ para $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Demostre que
$$(\det A)' = (\det A)\mathrm{tr}(A^{-1}A').$$
(2) Para qualquer forma bilinear simétrica ϕ em $\mathbb{R}$, demostre que
$$\int_{S^n} \phi(v,v)dv = \frac{1}{n}\mathrm{vol}(S^{n-1})\mathrm{tr}(\phi).$$

12.2. Seja Y um campo de Jacobi numa geodésica γ numa variedade Riemanniana (M, g). Suponha $Y(0) = 0$. Seja $Y'(0) = e \in T_pM$ e seja $E(t)$ o campo paralelo ao longo de γ obtido por transporte paralelo de e. Demostre que
$$Y = tE - \frac{t^3}{6}R_{\gamma',E}\gamma' + o(t^3)$$

12.3. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional com forma de volume $\mathrm{d}vol_g$. O volume da bola geodésica em M com centro p e raio r é dado por
$$\mathrm{vol}(B_r(p)) = \int_{B(0,r)} \exp_p^*(\mathrm{d}vol_g) = \int_{S^{n-1}} \int_0^r J(u,t)dudt$$
onde $J(u, t)$ é dada por
$$J(u,t) = t^{-(n-1)}\sqrt{\det(g(Y_i(t), Y_j(t))}.$$
Aqui, Y_i são campos de Jacobi na geodésica $\exp_p(tu)$ que satisfazem $Y_i(0) = 0$ e $Y_i'(0) = e_i$, onde $\{u, e_2, \ldots, e_n\}$ forma uma base ortonormal para T_pM. Então,

(1) Demostre que em $u \in T_pM$,
$$\exp_p^*(\mathrm{d}vol_g)(u) = \left(1 - \frac{1}{6}Ric(u,u) + o(|u|^2)\right)\mathrm{d}vol_{euc}.$$
(2) Seja $s(p)$ a curvatura escalar de g no ponto p. Demostre que
$$\mathrm{vol}(B_p(r)) = r^n\mathrm{vol}(B^e(1))\left(1 - \frac{s(p)}{6(n+2)}r^2 + o(r^2)\right).$$
Aqui, $B^e(1)$ é a bola de raio 1 no espaço euclideano.

13. Um pouco de análise

13.1. Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ uma função suave e $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial em (M, g). O *gradiente* de f é o campo vetorial ∇f definido por $g(\nabla f, Y) = Yf$.

A *divergência* de X é a função $\mathrm{div}X$ dada por $\mathrm{div}X = \mathrm{tr}\nabla X$, o traço do endomorfismo $Y \mapsto \nabla_Y X$ em cada ponto.

(1) Para $p \in M$, suponha que $\{E_i\}$ seja um referencial ortonormal em $U \ni p$ tal que $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$. Um tal referencial é chamada um *referencial geodésico*. Demostre que $\nabla f = \sum_i (E_i f) E_i$ e que $(\mathrm{div} X)(p) = \sum_i (E_i f^i(p))$ onde $X = \sum_i f^i E_i$.

(2) Seja (x^i) coordenadas no conjunto aberto $U \subseteq M$. Suponha que $X = \sum_i X^i \partial_i$. Demostre que

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{ij} (g^{ji} \partial_i f) \partial_j, \\ \mathrm{div} X &= \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{\det(g)} X^i \right). \end{aligned}$$

onde g denota a mátriz (g_{ij}).

Dica para (2):

(1) O traço é igual à soma dos coeficientes de ∂_i na expressão $\nabla_{\partial_i} X$, para mostrar que $\mathrm{div} X = \partial_i X^i + X^k \Gamma^i_{ik}$, somando sobre todo índice que aparece duas vezes conforme a convenção somatória de Einstein.

(2) Considere a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \partial_i (\sqrt{\det(g)} X^i) = \partial_i X^i + \frac{1}{2 \det(g)} X^i \partial_i \det(g).$$

Lembramos que a derivada em $Id \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ da função det em $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ é a função tr. Determine a derivada num outro elemento de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ e relacione o resultado com o símbolo de Christoffel Γ^i_{ik}.

13.2. O operador diferencial em funções $\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$ é o *laplaciano* ou *operador de Laplace-Beltrami* da métrica g. Demostre os seguintes para Δ, div e ∇ :

(1) $\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g$,
(2) $\mathrm{div}(fX) = f \mathrm{div} X + g(\nabla f, X)$,
(3) $\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2g(\nabla f, \nabla g)$.

13.3. Consideramos a forma bilinear, o *hessiano* de f

$$\begin{aligned} H(f) &: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \\ H(f)(X, Y) &= \nabla_X (df)(Y). \end{aligned}$$

(1) Demostre que $H(f)$ é uma forma simétrica.
(2) O traço de $H(f)$ com respeito à métrica g é dado por $\mathrm{tr} H(f) = \sum_i H(f)(E_i, E_i)$, onde $\{E_i\}$ é um base ortonormal no ponto $p \in M$. Se (x^i) são coordenadas locais tais que $H(f) = \sum_{ij} H_{ij} dx^i \otimes dx^j$, demostre que o traço é dado por $\mathrm{tr} H(f) = g^{ij} H_{ij}$.
(3) Demostre que $\mathrm{tr} H(f) = \Delta f$, é igual ao laplaciano de f.

Dica para (3) : A prova simples usa um referencial geodésico, como descrito em Questão (13.1). Um pouco mais complicado é usar coordenadas locais. Assim, mostre que $H_{ij} = \partial_{ij} f - \Gamma^k_{ij} \partial_k f$. Usando a a expressão para $\mathrm{div}(X)$, para $X = \nabla f$ na dica para Questão (13.1), é necessário mostrar que

$$-g^{ik} \Gamma^j_{ik} = \partial_i g^{ij} + \Gamma^i_{ik} g^{kj}.$$

13.4. Por consideração de como os operadores diferenciais

$$\mathcal{L}_X, \nabla_X : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

relacionam pela condição de ser sem torsão, e como eles estendem-se a

$$\mathcal{L}_X, \nabla_X : \Gamma(S^2T^*M) \to \Gamma(S^2T^*M),$$

mostre que o Hessiano de uma função f satisfaz

$$2\nabla(df) = \mathcal{L}_{\nabla f}\, g.$$

14. O Cálculo de Ricci

Essa seção é levada das notas de Michael Eichmair. Os erros e ambiguidades são a responsibilidade do escritor, A. Clarke. As notas originais estão disponíveis do escritor.

Seja (M, j) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. Seja $X, Y, Y \in \Gamma(TM)$ e $\omega \in \Omega^1(M)$ e A, B campos de tensores.

- ∇A é um novo campo de tensores. O tipo dele é o mesmo do que de A, somente com uma lugar covariante adicional colocado na esquerda. A contração desse lugar com o campo tangente X é denotada $\nabla_X A$.
- ∇_X age como uma derivação em produtos tensoriais, i.e.,
$$\nabla_X(A \otimes B) = (\nabla_X A) \otimes B + A \otimes (\nabla_X B).$$
- ∇_X age como uma derivação em contrações com campos vetoriais, ie,
$$\nabla_X(i_Y A) = i_Y \nabla_X A + i_{\nabla_X Y} A.$$
- Temos que $\nabla_X g = 0$ e $\nabla_X g^{-1} = 0$.
- ∇_X comuta com trocos de tipos de campos tensoriais. Isto inclui trocando a ordem dos lugares e trocando um lugar de tipo covariante para tipo contra-variante, etc.
- Temos que
$$\underbrace{\nabla_X \nabla_Y A - \nabla_Y \nabla_X A - \nabla_{[X,Y]} A}_{=R_{XY}A} = i_Y \overbrace{i_X \nabla\nabla A}^{=\nabla_X \nabla A} - i_X i_Y \nabla\nabla A.$$
- Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Então, $\nabla f = df$ e então,
$$\nabla_X f = Xf.$$
- Note que $R_{X,Y} f = 0$.
- Em particular, temos que
$$\begin{aligned} (\nabla\nabla Z)(X,Y) - (\nabla\nabla Z)(Y,X) &= i_Y i_X \nabla\nabla Z - i_X i_Y \nabla\nabla Z = R_{X,Y} Z, \\ \text{e} \quad (\nabla\nabla\omega)(X,Y,Z) - (\nabla\nabla\omega)(Y,X,Z) &= (R_{X,Y}\omega)(Z) = -\omega(R_{X,Y} Z). \end{aligned}$$
- Temos que
$$R_{X,Y}(A \otimes B) = (R_{X,Y} A) \otimes B + A \otimes (R_{X,Y} B).$$
- Um produto interior num espaço vetorial de dimensão finita extende-se naturalmente a um produto interior nos espaços vetoriais associados, i.e. produtos tensoriais do espaço e seu dual. Os bases associados com uma base ortonormal do espaço vetorial original são bases ortonormais para os produtos interiores associados. O produto interior
$$g(A, B)$$

de dois campos de tensores A e B do mesmo tipo é a função suave obtida pela contração de todos os lugares *correspondentes* de $A \otimes B$ usando o produto interior Riemanniano. Definimos

$$|A| = \sqrt{g(A,A)}.$$

Vamos desenvolver o Cálculo de Ricci nos próximos exemplos. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇.

- No cálculo de Ricci, pensamos em campos tensoriais como aplicações $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineares
$$\ldots \Gamma(TM) \times \ldots \times \Omega^1(M) \times \ldots \times \Gamma(TM) \times \ldots \to \mathcal{C}^\infty(M).$$
Os lugares que tomam campos vetoriais são chamados *co-variantes* e os que tomam uma forma diferencial são chamados *contra-variantes*. Em particular, podemos identificar aplicações $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineares
$$\Omega^1(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad \Gamma(TM) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$
com campos tangentes e 1-formas diferenciais, respectivamente. A expressão
$$A_{ij}{}^k$$
no cálculo de Ricco indica que A é um tensor do tipo $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Omega^1(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$. Cada índice abstrato indica um lugar no tensor. Os *subscripts* indicam lugares co-variantes e os *superscripts* indicam lugares contra-variantes. Os índices abtratos suplantam a ordem dos lugares. Ao invés de pensar no primeiro, segundo e terceiro lugares no nosso exemplo, pensamos no i, j e k lugares. As expressões
$$A_{ij}{}^k + A_{il}{}^m \quad \text{e} \quad A_{ij}{}^k + A_{ik}{}^j$$
são inválidos no cálculo de Ricci, e a expressão
$$A_{ij}{}^k + A_{ji}{}^k$$
é válida mas ambígua. A equação
$$B_j{}^k{}_i = A_{ij}{}^k + A_{ji}{}^k$$
é melhor. O cálculo de Ricci é bem adaptado para exprimir produtos tensoriais. A equação
$$E_i{}^k{}_j{}^l = C_i{}^k D_j{}^l$$
no cálculo de Ricci significa que $E = C \otimes D$. A aparência do mesmo índice duas vezes no mesmo termo, uma vez como subscrito e uma vez como sobrescrito, exprima uma contração no cálculo de Ricci. A equação
$$F^j{}_i = C_i{}^k D_k{}^j$$
significa que o campo tensorial é obtido do produto $C \otimes D$ pela contração dos índices no meio, e trocando a ordem dos dois lugares restantes. A expressão
$$A_{ij}{}^k = \nabla_i C_j{}^k$$
significa que $A = \nabla C$. Note que
$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^j = X^i \nabla_i Y^j$$
para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$. A expressão $g_{ij}X^iY^j$ significa o campo tensorial $g(X,Y) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. As identidades
$$\begin{aligned} \nabla_i(C_j{}^k\omega_l) &= (\nabla_i C_j{}^k)\omega_l + C_j{}^k \nabla_i \omega_l \\ \nabla_i\nabla_j(C_k{}^l\omega_l) &= (\nabla_i\nabla_j C_k{}^l)\omega_l + (\nabla_j C_k{}^l)(\nabla_i\omega_l) + (\nabla_i C_k{}^l)(\nabla_j\omega_l) + C_k{}^l\nabla_i\nabla_j\omega_l \end{aligned}$$
são verdade no cálculo de Ricci.

- Escrevemos
$$g^{ij} \quad \text{ao invés de} \quad (g^{-1})^{ij}.$$
A equação
$$X^j = g^{ji}\omega_i$$
no cálculo de Ricci significa que $X \in \Gamma(TM)$ e $\omega \in \Omega^1(M)$ são musicalmente relacionados. Note que
$$\nabla_i g_{jk} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla_i g^{jk} = 0.$$
- Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Escrevemos
$$df = f_i$$
no cálculo de Ricci, ou as vezes
$$df = \nabla_i f$$
Isso é consistente com a notação
$$(\nabla f)^i = f^i$$
para o gradiente. Consequentemente, escrevemos
$$\text{Hess} f = (\text{Hess} f)_{ij} = (\nabla df)_{ij} = \nabla_i f_j.$$
- No cálculo de Ricci, denotamos trocos musicais de um campo tensorial levantando ou baixando o lugar. Por exemplo, os campos
$$A = A_i{}^j \quad B = B_{ik} = A_i{}^j g_{jk} \quad C = C^{lj} = A_i{}^j g^{il}$$
are musicalmente relacionados. Escrevemos
$$B = B_{ik} = A_{ik} \quad \text{and} \quad C = C^{lj} = A^{lj}.$$
Pois a derivada covariante comuta com os trocos de tipo, essa convenção introduz nenhuma ambiguidade.
- Temos as identidades
$$\begin{aligned} \nabla_i f_j - \nabla_j f_i &= 0 \\ \nabla_i \nabla_j Z^k - \nabla_j \nabla_i Z^k &= Z^l R_{ijl}{}^k \\ \nabla_i \nabla_j \omega_k - \nabla_j \nabla_i \omega_k &= \omega_l R_{ij}{}^l{}_k \end{aligned}$$
no cálculo de Ricci.
- Seja A um tensor de tipo $A = A_i{}^j$. Então,
$$|A|^2 = A_i{}^j A_k{}^l g^{ik} g_{jl} = A_i{}^j A^i{}_j.$$
Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então
$$|df|^2 = g^{ij} f_i f_j = |\nabla f|^2$$
onde $df = f_i$ no cálculo de Ricci.
- Seja $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. A identidade
$$(\nabla\nabla Z)(X,Y) = i_Y i_X \nabla\nabla Z = i_Y \nabla_X \nabla Z = (\nabla_X \nabla Z)(Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$$
é escrito
$$X^i Y^j \nabla_i \nabla_j Z^k = X^i \nabla_i (Y^j \nabla_j Z^k) - X^l \nabla_l Y^m \nabla_m Z^k.$$
- Seja $X, Y \in \Gamma(TM)$. Então
$$g(X,Y) = g_{ij} X^i Y^j \;\; \text{e} \;\; \nabla_X Y = X^i \nabla_i Y^j.$$

- Se o mesmo índice aparace duas vezes numa expressão no cálculo de Ricci, duas vezes como subescrito ou duas vezes como sobrescrito, então esses lugares são tacitamente contraidos usando a métrica. Por exemplo,

  $$|A|^2 = A_i{}^j A_i{}^j \quad g_{kk} = \dim(M) \quad X^l X^l = |X|^2 \quad \mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Rm}_{ijjk} = \mathrm{Rm}_{likl}.$$

  Essa convenção introduz nenhuma ambiguidade.

Example 14.1. (Identidade de Bochner)

$$\begin{aligned}
|\nabla f|^2 &= f_i f_i \\
\Delta f &= \nabla_j f_j \\
g(\nabla f, \nabla \Delta f) &= = f_i(\Delta f)_i = f_i \nabla_i \Delta f = f_i \nabla_i \nabla_j f_j \\
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_i(f_j f_j) = \nabla_i(f_j \nabla_i f_j) = \nabla_i f_j \nabla_j f_i + f_j \nabla_i \nabla_i f_j \\
&= |\nabla df|^2 + f_j \nabla_i \nabla_j f_i = |\nabla df|^2 + f_j(\nabla_j \nabla_i f_i + f_k \mathrm{Rm}_{ijki}) \\
&= |\nabla df|^2 + g(\nabla f, \nabla \Delta f) + f_i f_j \mathrm{Ric}_{ij} \\
&= |\nabla df|^2 + g(\nabla f, \nabla \Delta f) + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f).
\end{aligned}$$

Example 14.2. As aplicações suaves

$$\begin{aligned}
\Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) & X &\mapsto X, \\
\Omega^1(M) &\to \Omega^1(M) & \omega &\mapsto \omega,
\end{aligned}$$

e aplicações multi-lineares

$$\begin{aligned}
\Gamma(TM) \times \Omega^1(M) &\to \mathcal{C}^\infty(M) & (X, \omega) &\mapsto \omega(X) \\
\Omega^1(M) \times \Gamma(TM) &\to \mathcal{C}^\infty(M) & (\omega, X) &\mapsto \omega(X)
\end{aligned}$$

definem os mesmos campos tensoriais, até consideração da ordem dos lugares. (Há um lugar co-variante e um lugar contra-variante.) No cálculo de Ricci, elas são denotadas por

$$\delta_i{}^j$$

Notamos que

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i{}^k.$$

Temos que

$$A_{ij} \delta_k^j = A_{ik}$$

e parecido em campos de tensores diferentes.

Example 14.3. (Comutação de derivadas em tensores de ordens maiores).

$$\nabla_i \nabla_j A_k^l - \nabla_j \nabla_i A_k^l = \mathrm{Rm}_{ij}{}^m{}_k A_m^l + \mathrm{Rm}_{ijm}{}^l A_k^m.$$

Specificamente,

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_i \nabla_j (A_k^l X^k \omega_l) = \nabla_j \nabla_i (A_k^l X^k \omega_l) \\
&= (\nabla_i \nabla_j A_k^l - \nabla_j \nabla_i A_k^l) X^k \omega_l + A_k^l (\nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X) \omega^k + A_k^l X^k (\nabla_i \nabla_j \omega_l - \nabla_j \nabla_i \omega_l) \\
&= (\nabla_i \nabla_j A_k^l - \nabla_j \nabla_i A_k^l) X^k \omega_l + A_k^l \mathrm{Rm}_{ijm}{}^k X^m \omega_l + A_k^l X^k \mathrm{Rm}_{ij}{}^m{}_l \omega_m \\
&= (\nabla_i \nabla_j A_k^l - \nabla_j \nabla_i A_k^l - \mathrm{Rm}_{ij}{}^m{}_k A_m^l - \mathrm{Rm}_{ijm}{}^l A_k^m) X^k \omega_l
\end{aligned}$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$ e $\omega \in \Omega^1(M)$.

15. Tensores de Curvatura

16. Teoremas de Comparação

References

[1] Isaac Chavel, *Riemannian Geometry, A Modern Introduction*, Second Ed., Cambridge University Press.
[2] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin and Jacques Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Third Ed., Universitext.

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Av. Athos da Silveira Ramos 149, Rio de Janeiro, RJ, 21941-909, Brazil.

E-mail address: `andrew@im.ufrj.br`