O índice de uma trança pura em $\mathbb{S}^2$

Ian Mateus Brito Pereira e Graham Andrew Smith

5 de dezembro de 2021

Resumo

Construímos um homomorfismo sobrejetivo do grupo de tranças puras de $\mathbb{S}^2$ de ordem n no grupo cíclico $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$.

Sumário

1 Introdução

Nesta nota, construímos homomorfismos sobrejetivos de grupos de tranças puras em grupos cíclicos. Para n inteiro positivo, uma **trança pura** de ordem n é um vetor $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de curvas contínuas fechadas em $\mathbb{S}^2$ tal que, para todo $i \neq j$ e para todo t,

$$\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t).$$

Equivalentemente, uma trança pura é uma curva contínua fechada no **espaço de configuração** $\mathscr{C}^n = (\mathbb{S}^2)^n \setminus \Delta_{\mathbb{S}^2}$, sendo $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ a **diagonal**

$$\Delta^n_{\mathbb{S}^2} := \left\{ (p_k)^n_{k=1} \in (\mathbb{S}^2)^n : \text{existem } i, j \text{ tais que } p_i = p_j \right\}.$$

Denotamos por $\Pi^n\left(\mathbb{S}^2\right)$ o conjunto de classes de homotopia de tranças puras de ordem n em $\mathbb{S}^2$. Trivialmente, a operação de concatenação transforma esse conjunto em um grupo isomorfo ao grupo fundamental de $\mathscr{C}^n$. Construímos um homomorfismo sobrejetivo desse grupo em $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ da seguinte maneira. Sejam $\gamma = \left(\gamma_1, \dots, \gamma_n\right)$ um elemento suave de $\Pi^n\left(\mathbb{S}^2\right)$ e $p \in \mathbb{S}^2$ um ponto no complementar de $\operatorname{im}\left(\gamma_i\right)$ para todo i. Seja $\pi_p \colon \mathbb{S}^2 \setminus p \to \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica por p e, para cada i, definimos

$$\beta_i(t) := \left(\pi_p \circ \gamma_i\right)(t).$$

Como γ é uma trança pura, para quaisquer $i \neq j$, a curva $\beta_i - \beta_j$ toma valores em $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ e possui, então, um **índice de rotação** $\operatorname{ind}_{\mathbb{R}^2\setminus 0}$ ao redor da origem bem definido. Definimos, então,

$$\operatorname{ind}\left(\gamma\right) := \sum_{i<j} \operatorname{ind}_{\mathbb{R}^2\setminus 0}\left(\beta_i - \beta_j\right) \pmod{n-1}.$$

Provamos o seguinte resultado.

Teorema. ind *é bem definido e induz um homomorfismo sobrejetivo de* $\Pi^n\left(\mathbb{S}^2\right)$ *em* $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$.

A sobrejetividade é provada pelo seguinte exemplo, que também ilustra a necessidade de trabalhar com inteiros módulo $n-1$. Seja $\gamma_1 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ uma curva simples e fechada. Sejam Ω e Ω' os dois componentes conexos do complementar de $\operatorname{im}\left(\gamma_1\right)$. Supomos que Ω se encontra no lado esquerdo de γ_1 e chamamos esse componente de **interior** de γ_1. Seja $P = \left\{p_2, \dots, p_n\right\}$ um conjunto de $n-1$ pontos do complementar de $\operatorname{im}\left(\gamma_1\right)$. Trivialmente,

$$\operatorname{card}\left(P \cap \Omega\right) + \operatorname{card}\left(P \cap \Omega'\right) = n - 1. \tag{1}$$

Seja, agora, $\gamma = \left(\gamma_1, p_2, \dots, p_n\right)$ a trança pura que é constante em todas as suas componentes, exceto a primeira. Verificamos que

$$\operatorname{ind}\left(\gamma\right) = \operatorname{card}\left(P \cap \Omega\right) \pmod{n-1}.$$

A sobrejetividade do índice segue imediatamente. Observamos que o inverso de γ é obtido invertendo a orientação de γ_1. Como o interior de γ_1^{-1} é $\mathbb{S}^2 \setminus \Omega$, obtemos por (1)

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}\left(\gamma^{-1}\right) &= \operatorname{card}\left(P \cap \Omega'\right)\\ &= (n-1) - \operatorname{card}(P \cap \Omega)\\ &= (n-1) - \operatorname{ind}\left(\gamma\right),\end{aligned}$$

o que prova a necessidade de trabalhar com inteiros módulo $n-1$ para que ind seja um homomorfismo. Também usaremos esse exemplo na prova de que ind é bem definido.

2 Transversalidade

Seja $F \colon M \to N$ uma função suave entre variedades. Dizemos que $p \in M$ é **ponto regular** de F se a diferencial $\mathrm{D}F_p$ for sobrejetiva, e **ponto crítico** caso $\mathrm{D}F_p$ não seja. Similarmente, dizemos que $c \in N$

é **valor regular** de F se todo ponto de $F^{-1}(c)$ for regular, e **valor crítico**, caso $F^{-1}(c)$ contenha algum ponto crítico.

Dizemos que duas subvariedades R e S mergulhadas em M são **transversas** se, para todo $p \in R \cap S$, a soma $\mathrm{T}_p R + \mathrm{T}_p S$ for igual a todo o $\mathrm{T}_p M$. Denotamos essa relação de transversalidade entre R e S por $R \pitchfork S$. Mais geralmente, dizemos que S subvariedade de N é **transversa** a $F: M \to N$ suave se, para todo $x \in F^{-1}(S)$, a soma dos espaços $\mathrm{T}_{F(x)} S$ e $\mathrm{D}F_x\left(\mathrm{T}_x M\right)$ gerar todo o espaço tangente $\mathrm{T}_{F(x)} N$.

Para uma variedade suave M, a **diagonal** Δ_M de $M \times M$ é a subvariedade mergulhada

$$\Delta_M := \left\{p \in M : (p, p) \in M \times M\right\}.$$

Lema 1. Seja M variedade de dimensão 2. Para quaisquer curvas suaves $\alpha, \beta\colon \mathbb{S}^1 \to M$, defina $(\alpha, \beta): \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to M \times M$ e denote a transversalidade entre $\operatorname{im}(\alpha)$ por $\operatorname{im}(\beta)$ por $\alpha \pitchfork \beta$. Nessas condições,

$$\alpha \pitchfork \beta \iff (\alpha, \beta) \pitchfork \Delta_M.$$

Demonstração. Em cada interseção $\alpha(s) = \beta(t)$, a transversalidade $\alpha \pitchfork \beta$ significa que $\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\alpha_s\right) \oplus \operatorname{im}\left(\mathrm{D}\beta_t\right) = \mathbb{R}^2$ e a transversalidade $(\alpha, \beta) \pitchfork \Delta_M$ significa que a soma da imagem de $\mathrm{D}(\alpha, \beta)_{(s,t)}$ e do espaço tangente a Δ_M em $(\alpha(s), \beta(t))$ tem dimensão 4.

Se $\alpha \pitchfork \beta$, então a imagem de $\mathrm{D}(\alpha,\beta)_{(s,t)}$ tem dimensão 2. Observamos que todo elemento do espaço tangente a Δ_M em $(\alpha(s), \beta(t))$ tem a forma (u, u) para algum $u \in \mathbb{R}^2$. Como por hipótese $\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\alpha_s\right)$ e $\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\beta_t\right)$ geram $\mathbb{R}^2$, concluímos que a interseção entre a imagem de $\mathrm{D}(\alpha, \beta)_{(s,t)}$ e o espaço tangente $\mathrm{T}_{(\alpha(s),\beta(t))}\Delta_M$ é trivial e, portanto, (α, β) é transversa a Δ. Reciprocamente, se $(\alpha, \beta) \pitchfork \Delta_M$, como $\mathrm{T}_{(\alpha(s),\beta(t))}\Delta_M$ tem dimensão 2, necessariamente a imagem de $\mathrm{D}(\alpha, \beta)_{(s,t)}$ é isomorfa a $\mathbb{R}^2$. Assim, as imagens de $\mathrm{D}\alpha_s$ e $\mathrm{D}\beta_t$ são subespaços distintos e, então, α é transversa a β. □

2.1 Suavidade das componentes

Em todo o texto, definimos o círculo $\mathbb{S}^1$ pela variedade quociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ equipada com a projeção $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$. Assim, por exemplo, quando escrevemos uma função $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto f(t)$, estamos pensando em uma função 2π-periódica $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $x \mapsto g(x) = f([x])$, sendo $[x] = \pi(x)$ a classe de $x \in \mathbb{R}$ em $\mathbb{S}^1$. Além disso, a diferencial $\mathrm{D}g_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de g em x é descrita por $v \mapsto g'(x)\, v = f'([x])\, v$. Por fim, para $t = [x]$, identificamos $\mathrm{D}f_t = \mathrm{D}g_x$.

Definição 1. Sejam L uma variedade compacta e $\left(M, \mathrm{d}_M\right)$ uma variedade com função distância d_M. Definimos o **espaço de funções suaves** $C_0^\infty(L, M) := \left\{F\colon L \to M \text{ suave}\right\}$ com métrica d_0 definida por $\mathrm{d}_0(F, G) := \sup\left\{\mathrm{d}_M\left(F(\ell), G(\ell)\right) : \ell \in L\right\}$.

Pelo Teorema de aproximação de Whitney [3, 1], sabemos que a curva contínua $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ é homotópica a uma curva suave $\beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$. Assim, todos os elementos do grupo fundamental $\pi_1\left(\mathscr{C}^n\right)$ têm representantes suaves e, consequentemente, podemos restringir nossa atenção às curvas suaves.

Podemos substituir o Teorema de aproximação de Whitney por um argumento elementar. Seja $\mathrm{d}_{\mathscr{C}^n}$ a função distância em $\mathscr{C}^n$ definida por

$$\mathrm{d}_{\mathscr{C}^n}(p, q) := \sup\{\mathrm{d}_{\mathbb{S}^2}(p_i, q_i) : i = 1, \ldots, n\}$$

para $p = (p_i)$ e $q = (q_i)$ pontos de $\mathscr{C}^n$. Com ela, definimos a função distância d_0 de $C^0_0(\mathbb{S}^1, \mathscr{C}^n) := \{\mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n \text{ contínua}\}$ por $\mathrm{d}_0(F, G) := \sup\{\mathrm{d}_{\mathscr{C}^n}(F(\ell), G(\ell)) : \ell \in L\}$. Pela compacidade de $\mathbb{S}^1$, a distância entre o compacto $\mathrm{im}(\alpha)$ e o fechado $\Delta^n_{\mathbb{S}^2}$ é positiva.

Lema 2. Seja $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ contínua. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ suave tal que $\mathrm{d}_0(\alpha, \beta) < \varepsilon$.

Demonstração. Sejam $\iota\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$ a inclusão $p \mapsto p$ e $\varepsilon \in (0, 1)$. Dada $\alpha_i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ componente contínua de α, consideramos a composição $\iota \circ \alpha_i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$ e, molificando $\iota \circ \alpha_i$ em $\mathbb{R}^3$, sabemos que existe $\hat{\beta}_i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$ suave tal que $\left\|(\alpha_i - \hat{\beta}_i)(t)\right\|_{\mathbb{R}^3} < \mathrm{sen}(\varepsilon)$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$. Agora, definimos $\beta := (\pi \circ \hat{\beta}_i)^n_{i=1}$, sendo $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^2$ a projeção radial. Por geometria plana, temos $\mathrm{d}_{\mathbb{S}^2}(\alpha_i(t), \beta_i(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$ e, portanto, $\mathrm{d}_{\mathscr{C}^n}(\alpha(t), \beta(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$. Assim, β é a curva desejada. □

Lema 3. Seja $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ contínua. Existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\beta : \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ contínua, se $\mathrm{d}_0(\alpha, \beta) < \varepsilon$, então β está na mesma classe de α em $\Pi^n(\mathbb{S}^2)$.

Demonstração. Sejam $\pi\colon \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{S}^2$ a projeção radial e $\varepsilon = \mathrm{d}_{\mathscr{C}^n}\left(\mathrm{im}(\alpha), \Delta^n_{\mathbb{S}^2}\right)$. Definimos a homotopia $H\colon [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ por $H(s, \cdot) := \left(\pi \circ ((1 - s)\alpha_i + s\beta_i)\right)^n_{i=1}$. Como $\mathrm{d}_0(\alpha, \beta) < \varepsilon$, segue que $H(s, \cdot)$ é uma trança pura todo $s \in [0, 1]$ e, portanto, H é uma homotopia entre α e β. □

Lema 4. Toda $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ contínua é homotópica a uma $\beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ suave.

Demonstração. Sejam $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ contínua e $\varepsilon > 0$ tal que, para toda β contínua, $\mathrm{d}_0(\alpha, \beta) < \varepsilon$ implique α homotópica a β. Pelo Lema 2, existe $\beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ suave tal que $\mathrm{d}_0(\alpha, \beta) < \varepsilon$ e, então, α é homotópica a β. □

2.2 A regularidade das componentes

Definição 2. Para uma curva contínua $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$, definimos a **imagem** $\mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\alpha)$ de α em $\mathbb{S}^2$ por $\mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\alpha) := \bigcup^n_{k=1} \mathrm{im}(\alpha_k)$.

Pelo Lema 4, toda α contínua é homotópica a $\tilde{\beta}$ suave. Como a curva $\tilde{\beta}$ está na classe suave $C^\infty_0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2)$, a medida de $\mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\tilde{\beta})$ em $\mathbb{S}^2$ é zero. Assim, existe um ponto p no complemento $\mathbb{S}^2 \setminus \mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\tilde{\beta})$. Para esse $p \in \mathbb{S}^2$ e todo $k = 1, \ldots, n$, definimos a projeção estereográfica $\pi_p\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2$ de polo p e as curvas suaves

$$\begin{aligned} \beta_k\colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\pi_p \circ \tilde{\beta}_k)(t). \end{aligned}$$

Agora, fixada uma curva suave $\beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, considere

$$\begin{aligned} \Gamma = \Gamma_\beta\colon \mathbb{S}^1 \times C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) &\to \mathbb{R}^2 \\ (t, \varphi) &\mapsto \beta'(t) + \varphi'(t). \end{aligned}$$

Lema 5. Para todo $t \in \mathbb{S}^1$, existe $E_t \subset C_0^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right)$ de dimensão finita tal que $\mathrm{D}\Gamma_{(t,0)}\big|_{0\times E_t}$ seja sobrejetiva.

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{S}^1$. Escolhemos as curvas suaves $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $\varphi_k(s) = \operatorname{sen}(s-t)\, e_k$ e definimos $E_t = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Denotamos por $\mathrm{D}_2\Gamma$ a derivada parcial de Γ com respeito à segunda componente. Consideramos

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} \colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ s, (a, b) &\mapsto \beta'(s) + a\varphi_1'(s) + b\varphi_2'(s) \end{aligned}$$

e, calculando $\mathrm{D}_2\tilde{\Gamma}\big|_{E_t}$ em $(t, 0)$, temos

$$\mathrm{D}_2\tilde{\Gamma}\big|_{E_t} = \begin{pmatrix} \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Segue que $\mathrm{D}_2\tilde{\Gamma}\big|_{E_t}$ tem posto máximo e, portanto, é sobrejetiva para todo $t \in \mathbb{S}^1$. Concluímos que para todo $t \in \mathbb{S}^1$, existe $E_t \subset C^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right)$ de dimensão finita tal que $\mathrm{D}\Gamma_{(t,0)}\big|_{0\times E_t}$ seja sobrejetiva. □

Dados $\delta > 0$ e $E \subset C_0^\infty(L, M)$ subespaço, definimos a **bola aberta** $B_\delta^E(0) := \left\{\varphi \in E \colon \mathrm{d}_0(\varphi) < \delta\right\}$ de raio δ, centro 0 e restrita a E.

Lema 6. Existe um subespaço $E \subset C_0^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right)$ e um $\delta > 0$ tais que Γ restrita a $\mathbb{S}^1 \times B_\delta^E(0)$ seja submersão.

Demonstração. Pela sobrejetividade de $\mathrm{D}\Gamma_{(t,0)}\big|_{0\times E_t}$ ser uma condição aberta em t, para todo $t \in \mathbb{S}^1$ existe uma vizinhança aberta U_t de t tal que $\mathrm{D}\Gamma_{(s,0)}\big|_{0\times E_t}$ seja sobrejetiva para todo $s \in U_t$. Pela compacidade de $\mathbb{S}^1$, existem finitos pontos $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{S}^1$ tais que $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=1}^n U_{t_i}$.

Definimos $E := \bigoplus_{k=1}^m E_{t_k}$. Assim, $\mathrm{D}\Gamma_{(t,0)}\big|_{0\times E}$ é sobrejetiva para todo $t \in \mathbb{S}^1$ e, então, concluímos que para todo $t \in \mathbb{S}^1$, a diferencial $\mathrm{D}\Gamma_{(t,0)}$ é sobrejetiva. Por fim, notamos que, por suavidade, existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{D}\Gamma_{(t,x)}$ é sobrejetiva para todo $x \in B_\delta(0) \cap E = B_\delta^E(0)$. Para esse δ, a restrição $\Lambda := \Gamma\big|_{\mathbb{S}^1 \times B_\delta^E(0)}$ é submersão. □

Lema 7 (Troca de núcleos)**.** Se as aplicações lineares entre espaços vetoriais $A \colon E \to F$ e $B \colon E \to G$ são sobrejetivas, então $A\big|_{\ker(B)}$ é sobrejetiva se, e somente se, $B\big|_{\ker(A)}$ é sobrejetiva.

Demonstração. Sejam $A \colon E \to F$ e $B \colon E \to G$ lineares e sobrejetivas. Devido à simetria do enunciado do Lema sob transposições entre A e B, é suficiente demonstrar que $A\big|_{\ker(B)}$ sobrejetiva implica $B\big|_{\ker(A)}$ sobrejetiva. Assim, suponha que $A\big|_{\ker(B)} \colon \ker(B) \to F$ seja sobrejetiva. Dado $g \in G$, encontraremos $e \in E$ tal que $B(e) = g$ e $A(e) = 0$.

Como B é sobrejetiva, existe $e_1 \in E$ tal que $B(e_1) = g$. Definindo $f := A(e_1)$, pela sobrejetividade de $A\big|_{\ker(B)}$ existe $e_2 \in \ker(B)$ tal que $A(e_2) = f$. Em seguida, defina $e := e_1 - e_2$. Temos as igualdades $A(e) = A(e_1 - e_2) = A(e_1) - A(e_2) = f - f = 0$ e $B(e) = B(e_1 - e_2) = B(e_1) - B(e_2) = g - 0 = g$. Dessa maneira, concluímos que para todo $g \in G$ existe $e \in \ker(A)$ tal que $B(e) = g$. □

Sejam $\Lambda := \Gamma\big|_{\mathbb{S}^1 \times B_\delta^E(0)}$ submersão, $M := \Lambda^{-1}(0)$ e $\pi \colon M \to B_\delta^E(0)$ a projeção canônica na segunda variável. Observamos que M é subvariedade de $\mathbb{S}^1 \times B_\delta^E(0)$ de codimensão 2 por Λ ser submersão.

Lema 8. Seja x valor regular de π. Para todo $t \in \mathbb{S}^1$, temos $\Gamma(t,x) \neq 0$.

Demonstração. Seja x valor regular de π. Suponha que $t \in \mathbb{S}^1$ seja tal que $\Gamma(t,x) = 0$, ou seja, $(t,x) \in M$. A diferencial $\mathrm{D}\pi\big|_{\mathrm{T}_{(t,x)}M}$ é sobrejetiva, pois x é valor regular de π. Denotando $p = (t,x)$, como $\mathrm{T}_pM = \ker\left(\mathrm{D}\Gamma_p\right)$, segue que $\mathrm{D}\pi\big|_{\mathrm{T}_pM}$ sobrejetiva é equivalente a $\mathrm{D}\pi\big|_{\ker(\mathrm{D}\Gamma_p)}$ sobrejetiva. Já que π e Γ são submersões, pelo Lema da troca de núcleos, $\mathrm{D}\pi\big|_{\mathrm{T}_pM}$ é sobrejetiva se, e somente se, $\mathrm{D}\Gamma\big|_{\ker(\mathrm{d}\pi_p)}$ é sobrejetiva. A dimensão de $\ker\left(\mathrm{D}\pi_p\right)$ é no máximo 1, logo, é impossível que $\mathrm{D}\Gamma\big|_{\ker(\mathrm{D}\pi_p)}$, que tem contradomínio de dimensão 2, seja sobrejetiva. Consequentemente, $\mathrm{D}\pi\big|_{\mathrm{T}_pM} = \mathrm{D}\pi\big|_{\mathrm{T}_{(t,x)}M}$ não é sobrejetiva, o que leva ao absurdo de x não ser valor regular. Assim, para quaisquer x valor regular de π e $t \in \mathbb{S}^1$, temos $\Gamma(t,x) \neq 0$. □

Lema 9. Toda curva suave $\beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ é homotópica a uma curva suave $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ de componentes $\gamma^k\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ imersas em $\mathbb{S}^2$.

Demonstração. Seja $2n\varepsilon > 0$ a distância de $\mathrm{im}\left(\beta\right)$ a $\Delta^n_{\mathbb{S}^2}$. Para as curvas β_k definidas no início da subseção, definimos os mapas $\Gamma^k = \Gamma^{\beta_k}$. Pelo Teorema de Sard [2, 1], os valores regulares das projeções π^k são densos em $B^E_\delta(0)$, então existem valores regulares arbitrariamente pequenos, digamos, de módulo no máximo ε. Assim, para cada k existe x_k tal que $\Gamma^k(t, x_k) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$.

Pela definição de Γ^k, isso quer dizer que $\beta_k'(t) + f_k'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$. Dessa forma, temos uma perturbação limitada f_k de β_k que faz $\beta_k + f_k$ ser curva regular, logo, imersa em $\mathbb{S}^2$. Fazendo isso para todo k, vemos que $\beta = \left(\beta_k\right)$ é homotópico a $\gamma := \left(\gamma_k\right) = \left(\beta_k + f_k\right)$, que é uma trança, pela limitação nos módulos de x_k. Essa trança γ é suave, tem componentes imersas e é homotópica a β. □

2.3 Transversalidade entre componentes

Para duas curvas suaves $\alpha, \beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, consideramos a função

$$\begin{aligned} \Gamma = \Gamma_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^4 \\ (s,\, t,\, x) &\mapsto \left(\alpha(s),\, \beta(t) + x\right). \end{aligned}$$

Podemos definir $\Delta_{\mathbb{R}^2} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ como o núcleo $\ker(G) = G^{-1}(0)$ da transformação linear bijetiva $G\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ descrita por $\left(x,\, y\right) \mapsto x - y$. Por $\Delta_{\mathbb{R}^2}$ ser subespaço linear, o espaço tangente $\mathrm{T}_{(x,\,x)}\Delta_{\mathbb{R}^2}$ é isomorfo a $\Delta_{\mathbb{R}^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Lema 10. A função Γ é transversa a $\Delta_{\mathbb{R}^2}$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma(s,\, t,\, x) \in \Delta_{\mathbb{R}^2}$. Devido a $0 \times \mathbb{R}^2$ estar incluído na imagem da derivada $\mathrm{D}_3\Gamma(s,\, t,\, x)$ em relação à variável x, sabemos que $0 \times \mathbb{R}^2$ está incluído na imagem da diferencial $\mathrm{D}\Gamma_{(s,\,t,\,x)}$. Como $\mathrm{T}_{(y,\,y)}\Delta_{\mathbb{R}^2} \cong \Delta_{\mathbb{R}^2}$ para todo $y \in \mathbb{R}^2$, segue que a imagem de $\mathrm{D}\Gamma_{(s,\,t,\,x)}$ e o espaço tangente $\mathrm{T}_{\Gamma(s,\,t,\,x)}\Delta_{\mathbb{R}^2} \cong \Delta_{\mathbb{R}^2}$ geram $\mathbb{R}^4$, logo, Γ é transversa a $\Delta_{\mathbb{R}^2}$. □

Sejam $M = \Gamma^{-1}\left(\Delta_{\mathbb{R}^2}\right)$ variedade e $\pi\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção dada por $(s, t, x) \mapsto x$.

Lema 11. Se x é valor regular de $\pi\big|_M$ e $p=(s,\,t,\,x)\in M$, então $\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\Gamma_p\big|_{\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1\oplus\mathrm{T}_t\mathbb{S}^1}\right)\oplus\mathrm{T}_{\Gamma(p)}\Delta_{\mathbb{R}^2}=\mathbb{R}^4$.

Demonstração. Sejam x valor regular de $\pi\big|_M$ e $p=(s,\,t,\,x)\in M$. Como M é definido pelo conjunto de nível $\left(G\circ\Gamma\right)^{-1}(0)$, segue que $\mathrm{T}_pM=\ker\left(\mathrm{D}\left(G\circ\Gamma\right)_p\right)$. Então, pelo Lema da troca de núcleos, $\mathrm{D}\pi\big|_{\mathrm{T}_pM}=\mathrm{D}\pi\big|_{\ker(\mathrm{D}(G\circ\Gamma)_p)}$ é sobrejetiva se, e somente se, $\mathrm{D}\left(G\circ\Gamma\right)_p\big|_{\ker(\mathrm{D}\pi_p)}$ for sobrejetiva. Temos $\ker\left(\mathrm{D}\pi_p\right)=\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1\oplus\mathrm{T}_t\mathbb{S}^1$, de modo que a sobrejetividade de $\mathrm{D}\pi\big|_{\mathrm{T}_pM}$ é equivalente à sobrejetividade de $\mathrm{D}G_{\Gamma(p)}\circ\mathrm{D}\Gamma_p\big|_{\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1\oplus\mathrm{T}_t\mathbb{S}^1}$. Por sua vez, como a dimensão de $\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1\oplus\mathrm{T}_t\mathbb{S}^1$ é 2, necessariamente a interseção

$$\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\Gamma_p\big|_{\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1\oplus\mathrm{T}_t\mathbb{S}^1}\right)\cap\ker\left(\mathrm{D}G_{\Gamma(p)}\right)=\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\Gamma_p\big|_{\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1\oplus\mathrm{T}_t\mathbb{S}^1}\right)\cap\mathrm{T}_{\Gamma(p)}\Delta_{\mathbb{R}^2}=\{0\}$$

é trivial e, portanto, $\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\Gamma_p\big|_{\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1\oplus\mathrm{T}_t\mathbb{S}^1}\right)\oplus\mathrm{T}_{\Gamma(p)}\Delta_{\mathbb{R}^2}=\mathbb{R}^4$. $\square$

Lema 12. Se x é valor regular de π, então α é transversa a $\beta_x=\beta+x$.

Demonstração. Substituindo $p=(s,\,t,\,x)$ em $\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\Gamma_p\big|_{\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1\oplus\mathrm{T}_t\mathbb{S}^1}\right)\oplus\mathrm{T}_{\Gamma(p)}\Delta_{\mathbb{R}^2}=\mathbb{R}^4$, temos

$$\operatorname{im}\left(\mathrm{D}\left(\alpha,\,\beta_x\right)_{(s,\,t,\,x)}\right)\oplus\mathrm{T}_{(\alpha(s),\,\beta_x(t))}\Delta_{\mathbb{R}^2}=\mathbb{R}^4,$$

precisamente a definição de transversalidade entre $\left(\alpha,\beta_x\right)$ e $\Delta_{\mathbb{R}^2}$. Em virtude do Lema 1, α é transversa a β_x. $\square$

Lema 13. Dadas uma curva suave e imersa $\alpha\colon\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^2$, uma curva suave $\beta\colon\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^2$ e dado $\varepsilon>0$, existe $\zeta\colon\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^2$ suave, imersa em $\mathbb{S}^2$, transversa a α, homotópica a β e tal que $\mathrm{d}_0\left(\beta,\zeta\right)<\varepsilon$.

Demonstração. Sejam p no complementar de $\operatorname{im}(\alpha)\cup\operatorname{im}\left(\beta\right)$ e $\pi_p\colon\mathbb{S}^2\setminus p\to\mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica de polo p. Sabemos que podemos assumir β imersa em $\mathbb{S}^2$. As curvas $\tilde{\alpha}=\pi\circ\alpha$ e $\tilde{\beta}=\pi_p\circ\beta$ são suaves, logo, podemos definir $\Gamma_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ e $M=\Gamma^{-1}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}\left(\Delta_{\mathbb{R}^2}\right)$. Pelo Teorema de Sard [2, 1], existe x de norma $<\varepsilon$ que é valor regular da projeção na segunda variável $\pi\colon M\to\mathbb{R}^2$ e, pelo Lema 19, sabemos que α é transversa a $\zeta:=\beta_x$. É consequência imediata que $\mathrm{d}_0\left(\beta,\zeta\right)<\varepsilon$. $\square$

Lema 14. Toda curva contínua $\alpha\colon\mathbb{S}^1\to\mathscr{C}^n$ é homotópica a uma curva $\zeta\colon\mathbb{S}^1\to\mathscr{C}^n$ suave e de componentes ζ_k imersas em $\mathbb{S}^2$ e transversas dois a dois.

Demonstração. Pelos Lemas 4 e 9, podemos assumir α suave e imersa em $\mathbb{S}^2$. Seja $2n\varepsilon=\mathrm{d}_{\mathscr{C}^n}\left(\operatorname{im}(\alpha),\Delta^n_{\mathbb{S}^2}\right)$. O passo inicial é encontrar ζ_2 suave, imersa, homotópica a α_2, transversa a α_1 e tal que $\mathrm{d}_0\left(\alpha_2,\zeta_2\right)<\varepsilon$, o que é realizado pelo Lema 13. Como a transversalidade é uma condição aberta, encontramos γ_{i+1} transversa às componentes α_j com $j\le i$ com $\mathrm{d}_0\left(\alpha_i,\zeta_i\right)<\varepsilon$. Pela limitação $\mathrm{d}_0\left(\alpha_i,\zeta_i\right)<\varepsilon$ para todo i, segue que $\zeta:=(\zeta_i)$ é uma trança pura com todas as propriedades desejadas no enunciado. $\square$

2.4 A autotransversalidade de uma componente

Lema 15. Se $\gamma\colon\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^2$ é curva suave e imersa, então existe $\varepsilon>0$ tal que $\gamma\big|_U$ seja injetiva para todo aberto $U\subset\mathbb{S}^1$ de diâmetro $<\varepsilon$.

Demonstração. Seja $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ curva regular suave. Pela regularidade, $\mathrm{D}\gamma_t\colon \mathbb{R} \to \mathrm{T}_{\gamma(t)}\mathbb{S}^2$ é injetiva em todo $t \in \mathbb{S}^1$. Assim, $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ é um mapa suave de posto constante igual a 1 entre duas variedades. Pelo Teorema do posto [1], para todo $t_0 \in \mathbb{S}^1$, existe uma carta $\varphi\colon U \to V$ centrada em $\gamma\left(t_0\right)$ tal que $U = \left(-\delta, \delta\right)^2$ e, para todo $t \in \left(t_0 - \delta,\, t_0 + \delta\right)$, temos $\left(\varphi^{-1} \circ \gamma\right)(t) = \left(t - t_0, 0\right)$.

Dessa forma, para todo $t \in \mathbb{S}^1$ existe uma vizinhança $B\left(t, \delta_t\right)$ de t tal que $\gamma\big|_{B(t,\delta_t)}\colon B\left(t, \delta_t\right) \to \mathbb{S}^1$ seja injetiva. Devido à compacidade de $\mathbb{S}^1$, existe um número de Lebesgue $\varepsilon > 0$ para a cobertura aberta $\left\{B\left(t, \delta_t\right) \subset \mathbb{S}^1 \colon t \in \mathbb{S}^1\right\}$ de $\mathbb{S}^1$. Concluímos, assim, que $\gamma\big|_U$ é injetiva para todo aberto U de diâmetro $< \varepsilon$. $\square$

Dada uma $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ imersão suave, seja $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma\big|_U$ seja injetiva para todo aberto $U \subset \mathbb{S}^1$ de diâmetro $< \varepsilon$. Definimos o compacto $L_\varepsilon = \left\{(s,t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \colon \mathrm{d}_{\mathbb{S}^1}(s,t) \geq \varepsilon/2\right\}$ e a função

$$\begin{aligned}\Gamma\colon L_\varepsilon \times C_0^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right) &\to \mathbb{R}^4 \\ \left(s,\, t,\, \varphi\right) &\mapsto \left(\gamma(s) + \varphi(s),\, \gamma(t) + \varphi(t)\right).\end{aligned}$$

Assim como na subseção anterior, definimos $G\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\left(x,\, y\right) \mapsto x - y$ e $\Delta_{\mathbb{R}^2} = G^{-1}(0)$.

Lema 16. Para todo $(s,\, t)$ no interior de L_ε, existe um subespaço $E_{s,\,t} \subset C^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right)$ de dimensão finita tal que a diferencial $\mathrm{D}\left(G \circ \Gamma\right)_{(s,\,t,\,0)}\big|_{0 \times E_{s,\,t}}$ restrita a $0 \times E_{s,\,t}$ seja sobrejetiva.

Demonstração. Sejam $(s,t) \in \operatorname{int}\left(L_\varepsilon\right)$ e $\left\{e_1, e_2\right\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Definimos $\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3,\, \varphi_4$ em $C^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right)$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= e_1, & \varphi_1(t) &= 0, \\ \varphi_2(s) &= e_2, & \varphi_2(t) &= 0, \\ \varphi_3(s) &= 0, & \varphi_3(t) &= e_1, \\ \varphi_4(s) &= 0, & \varphi_4(t) &= e_2. \end{aligned}$$

Em seguida, definimos $E_{s,t} = \operatorname{span}\left\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\right\} \subset C^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right)$. As composições das curvas suaves

$$\begin{aligned}\Phi_k\colon \mathbb{R} &\to L_\varepsilon \times E_{s,t} \\ x &\mapsto \left(s,\, t,\, x\varphi_k\right)\end{aligned}$$

com Γ têm derivadas em zero iguais a $\left(\Gamma \circ \Phi_k\right)'(0)$ para $k = 1, 2, 3, 4$ que formam uma base de $\mathbb{R}^4$. Como a diferencial de G é sempre sobrejetiva, concluímos que $\mathrm{D}\left(G \circ \Gamma\right)_{(s,\,t,\,0)}\big|_{0 \times E_{s,\,t}}$ é sobrejetiva. $\square$

Lema 17. Existem um subespaço $E \subset C_0^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right)$ e $\delta > 0$ tais que $G \circ \Gamma$ restrita a $L_\varepsilon \times B_\delta^E(0)$ seja submersão suave em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Para todo $(s,\, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, existe um aberto $U_{s,\,t}$ tal que, para todo $\left(q,\, r\right) \in U_{s,\,t}$, a diferencial $\mathrm{D}\left(G \circ \Gamma\right)_{(q,r,0)}$ restrita a $0 \times E_{q,r}$ seja sobrejetiva. A explicação vem do fato de a sobrejetividade da diferencial ser uma condição aberta em $(s,\, t)$. Assim, pela compacidade de L_ε, existe um número finito de pontos $(s_1,\, t_1), \ldots, (s_m,\, t_m)$ tais que $L_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^m U_{s_k,\,t_k}$. Definimos $E := \bigoplus_{k=1}^m E_{s_k,\,t_k}$ e concluímos que, para todo $(s,\, t) \in L_\varepsilon$, a diferencial $\mathrm{D}\left(G \circ \Gamma\right)_{(s,\,t,\,0)}$ restrita a $0 \times E$ é sobrejetiva e, então, $\mathrm{D}\left(G \circ \Gamma\right)_{(s,\,t,\,0)}$

é sobrejetiva. Finalmente, como a sobrejetividade é uma propriedade aberta, existe $\delta > 0$ tal que $G \circ \Gamma$ restrita a $L_\epsilon \times B^E_\delta(0)$ seja uma submersão, como desejado.

□

Sejam $\Lambda := \left(G \circ \Gamma\right)\big|_{L_\varepsilon \times E}$ submersão, $M := \Lambda^{-1}(0)$ e $\pi\colon M \to E$ a projeção canônica na variável φ. Definimos $\Lambda^\varphi(s, t) := \Lambda\left(s, t, \varphi\right)$.

Lema 18. Se φ é valor regular de π, então $\mathrm{D}\Lambda^\varphi$ é sobrejetiva em todo ponto de $(\Lambda^\varphi)^{-1}(0)$.

Demonstração. Pela definição de M como $\Lambda^{-1}(0)$, segue que $\mathrm{T}_p M = \ker\left(\mathrm{D}\Lambda_p\right)$. Seja φ valor regular de π e suponha que $\Lambda\left(s, t, \varphi\right) = 0$. Isso implica $\left(s, t, \varphi\right) \in M$ e, como

$$\mathrm{D}\pi\big|_{\mathrm{T}_{(s,t,\varphi)}M} = \mathrm{D}\pi\big|_{\ker\left(\mathrm{D}\Lambda_{(s,t,\varphi)}\right)}$$

é sobrejetiva pela regularidade de x, pelo Lema de troca de núcleos, $\mathrm{D}\Lambda\big|_{\ker\left(\mathrm{D}\pi_{(s,t,\varphi)}\right)}$ também é sobrejetiva. Temos $\mathrm{D}\Lambda\big|_{\mathrm{T}_s\mathbb{S}^1 \oplus \mathrm{T}_t\mathbb{S}^1}$ sobrejetiva e, portanto, $\mathrm{D}\Lambda^\varphi_{(s,t)}$ é sobrejetiva, como desejado. □

Lema 19. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ imersão suave. Existe $\omega\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ suave, imersa em $\mathbb{S}^2$, autotransversa, homotópica a γ e tal que $\mathrm{d}_0\left(\gamma, \omega\right) < \varepsilon$.

Demonstração. Definimos $\gamma^\varphi(s) := \gamma(s) + \varphi(s)$. Seja $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $\gamma\big|_U$ seja injetiva para todo aberto $U \subset \mathbb{S}^1$ de diâmetro $< \varepsilon'$. Como γ é regular, existe $\delta > 0$ tal que $\|s - t\| < \varepsilon'$ implica $\left\|\gamma(s) - \gamma(t)\right\| \geq \delta\|s - t\|$. Se $\left\|\varphi'\right\| < \delta/2$, então para todo $\|s - t\| < \varepsilon'$ temos $\gamma^\varphi(s) \neq \gamma^\varphi(t)$.

Suponha que $\gamma^\varphi(s) = \gamma^\varphi(t)$. Necessariamente, $\|s - t\| \geq \varepsilon'/2$ e, então, $(s, t) \in L_{\varepsilon'}$. Como $\mathrm{D}\Lambda^\varphi_{(s,t)}$ é sobrejetiva, segue que $\Gamma^\varphi := \Gamma\left(\cdot, \cdot, \varphi\right)$ é transversa a $\Delta_{\mathbb{R}^2}$ nesse ponto. Segue pelo Lema 1 que $\omega := \gamma^\varphi$ é autotransversa nesse ponto, como desejado. □

Lema 20. Toda curva contínua $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ é homotópica a uma curva $\omega\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ suave e de componentes ω_k imersas em $\mathbb{S}^2$, transversas dois a dois e autotransversas.

Demonstração. Pelos Lemas 4, 9 e 15, sabemos que podemos supor α suave, imersa em $\mathbb{S}^2$ e autotransversa. Seja $2n\varepsilon > 0$ a distância entre $\mathrm{im}(\alpha)$ e $\Delta^n_{\mathbb{S}^2}$. Para cada componente α_i, encontramos curvas $\tilde{\omega}_i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ suaves, imersas em $\mathbb{S}^2$, autotransversas e com $\mathrm{d}_0(\alpha_i, \tilde{\omega}_i) < \varepsilon$. Como a transversalidade é uma condição aberta, sabemos que a trança $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_i)$ é homotópica a uma trança ω de componentes transversas dois a dois e com as propriedades mencionadas de $\tilde{\omega}$, como queríamos. □

3 Índice de uma trança pura

Lembramos da projeção estereográfica $\pi_p\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2$ de polo p e do índice $\mathrm{ind}_{\mathbb{R}^2\setminus 0}(\alpha)$ de uma curva plana fechada $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$ ao redor da origem.

Definição 3. Sejam $\omega\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ suave e de componentes ω_k imersas, autotransversas e transversas dois a dois, e um ponto p no complementar de $\mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\omega) \subset \mathbb{S}^2$. Formamos as curvas $\tilde{\omega}_k = \pi_p \circ \omega_k$. Definimos o **índice** de ω em p por

$$\mathrm{ind}\left(\omega, p\right) := \sum_{j<k} \mathrm{ind}_{\mathbb{R}^2\setminus 0}\left(\pi_p \circ \omega_j - \pi_p \circ \omega_k\right) \pmod{n-1}.$$

Esse índice é trivialmente aditivo sob a operação do grupo $\Pi^n\left(\mathbb{S}^2\right)$. O objetivo do restante dessa seção será demonstrar que o índice não depende do ponto p.

3.1 Mesma componente conexa

Lema 21. Seja $\omega\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ suave e de componentes ω_k imersas, autotransversas e transversas dois a dois. Se p e q pertencem à mesma componente conexa do complemento de $\mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\omega)$, então $\mathrm{ind}\left(\omega, p\right) = \mathrm{ind}\left(\omega, q\right)$.

Demonstração. Sejam p no complementar de $\mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\omega)$ e U_p um aberto de p contido na componente conexa que contém p. Definimos a função $\xi\colon U_p \to C_0^\infty\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\right)^n$ que leva q em $\pi_q \circ \omega_k$. Essa ξ está bem definida, pois q nunca está em $\mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\omega)$, e é contínua. Portanto, o inteiro

$$\sum_{j<k} \mathrm{ind}_{\mathbb{R}^2\setminus 0}\left(\xi_j\left(q\right) - \xi_k\left(q\right)\right)$$

é constante em U_p. Concluímos que $\mathrm{ind}(\omega, \cdot)$ é constante em cada componente conexa. □

3.2 Componentes conexas adjacentes

Lema 22. Seja $\omega\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ suave e de componentes ω_k imersas, autotransversas e transversas dois a dois. Se ω_k componente e $t \in \mathbb{S}^1$ são tais que $\omega_k(t)$ não seja autointerseção ou interseção com outra componente ω_j, então existe U aberto contendo $\omega_k(t)$ tal que o índice $\mathrm{ind}(\omega, \cdot)$ seja constante para $U \setminus \mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\omega)$.

Demonstração. Seja $\omega_k(t)$ como nas hipóteses do enunciado. Sem perda de generalidade, podemos supor $t = 0$. Pela forma local das imersões [1], existe uma carta $\varphi : U \to (-2\varepsilon, 2\varepsilon)^2$ centrada em $\omega_k(0)$ tal que $\varphi \circ \omega_k(s) = (s, 0)$ para $s \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$. Pelas hipóteses que evitam interseções, podemos escolher U e ε tais que $U \cap \mathrm{im}_{\mathbb{S}^2}(\omega) = \omega_k((-2\varepsilon, 2\varepsilon))$. Identificando $U = (-2\varepsilon, 2\varepsilon)^2$ por meio de φ, sabemos que $\mathrm{ind}(\omega, \cdot)$ é constante em $U^+ = (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times (0, 2\varepsilon)$ e em $U^- = (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times (-2\varepsilon, 0)$. Para $\delta \ll \varepsilon$, definimos $p_\delta := (0, \delta)$ e $p_{-\delta} := (0, -\delta)$. Será suficiente mostrar que

$$\mathrm{ind}\left(\omega, p_\delta\right) = \mathrm{ind}\left(\omega, p_{-\delta}\right) \pmod{n-1}.$$

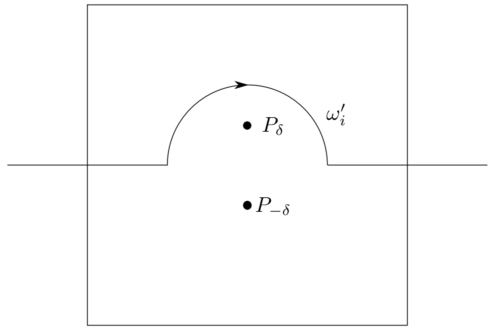

Figura 1.

Definimos (ver Figura 1)

$$\omega_i'(t) := \begin{cases} \omega(t), & t \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \left(t, \sqrt{\varepsilon^2 - t^2}\right), & t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \end{cases}$$

e, para todo $j \neq i$, definimos

$$\omega_j' := \omega_j.$$

Observamos que $\omega' := \left(\omega_1', \ldots, \omega_n'\right)$ é uma trança pura. Em seguida, definimos (ver Figura 2)

$$\omega_i''(t) := \begin{cases} \omega_i'(t), & t \notin [-\varepsilon, \varepsilon], \\ (2(t+\varepsilon) - \varepsilon, 0) & t \in [-\varepsilon, 0), \\ (\varepsilon - 4t, 0) & t \in [0, \varepsilon/2), \\ \left(4t - 3\varepsilon, \sqrt{\varepsilon^2 - (4t - 3\varepsilon)^2}\right), & t \in [\varepsilon/2, \varepsilon], \end{cases}$$

e, para todo $j \neq i$, definimos

$$\omega_j''(t) := \begin{cases} \omega_j(t), & t \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \omega_j(2(t+\varepsilon) - \varepsilon) & t \in [-\varepsilon, 0) \\ \omega_j(\varepsilon), & t \in [0, \varepsilon]. \end{cases}$$

Observamos que $\omega'' := \left(\omega_1'', \ldots, \omega_n''\right)$ também é uma trança pura. Finalmente, definimos

$$\nu_i(t) := \begin{cases} \left(\varepsilon - \frac{2\varepsilon(t+\pi)}{\pi}, 0\right), & t \in [-\pi, 0] \\ \left(-\varepsilon + \frac{2\varepsilon t}{\pi}, \sqrt{\varepsilon^2 - \left(\frac{2\varepsilon t}{\pi} - \varepsilon\right)^2}\right), & t \in (0, \pi], \end{cases}$$

Para todo $j \neq i$, definimos $\nu_j(t) = \omega_j(\varepsilon)$. Verificamos que $\nu := (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ também é uma trança pura.

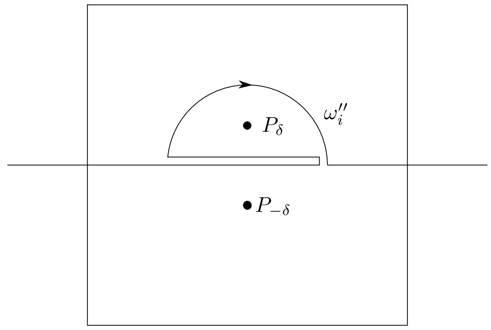

Figura 2.

Como ω é homotópica a ω' no complementar de $\{p_{-\delta}\}$,

$$\operatorname{ind}(\omega, p_{-\delta}) = \operatorname{ind}(\omega', p_{-\delta}).$$

Em seguida, como p_δ e $p_{-\delta}$ se encontram na mesma componente conexa do complementar de $\operatorname{im}(\omega')$, pelo Lema 21,

$$\operatorname{ind}(\omega', p_{-\delta}) = \operatorname{ind}(\omega', p_\delta).$$

Observamos agora que, no complementar de p_δ, ω' é homotópica a ω'', que é homotópica à concatenação $\omega \cdot \nu$. Segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(\omega, p_{-\delta}) &= \operatorname{ind}(\omega', p_\delta) \\
&= \operatorname{ind}(\omega'', p_\delta) \\
&= \operatorname{ind}(\omega, p_\delta) + \operatorname{ind}(\nu, p_\delta) \\
&= \operatorname{ind}(\omega, p_\delta) \pmod{n-1},
\end{aligned}$$

como desejado. □

3.3 Componentes conexas quaisquer

Lema 23. Seja $\omega\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ suave e de componentes imersas em $\mathbb{S}^2$, transversas dois a dois e autotransversas. Sejam p e q pontos de $\mathbb{S}^2 \setminus \operatorname{im}_{\mathbb{S}^2}(\omega)$. Temos

$$\operatorname{ind}(\omega, p) = \operatorname{ind}(\omega, q)$$

e, portanto, $\operatorname{ind}(\omega)$ está bem definido.

Demonstração. Sob as hipóteses do enunciado, seja $\tau\colon [0,1] \to \mathbb{S}^2$ uma curva suave tal que $\tau(0) = p$, $\tau(1) = q$ e τ não passa por nenhuma das finitas autointerseções ou interseções dois a dois das componentes de ω. Pelos Lemas 21 e 22, para todo $t \in [0,1]$ existe uma vizinhança $U_{\tau(t)}$ centrada em $\tau(t)$ no qual o índice é constante. Assim, $\operatorname{ind}(\omega, p) = \operatorname{ind}(\omega, q)$. □

3.4 O índice de uma trança pura contínua

Lema 24. Se $\beta\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ é suave, então $\operatorname{ind}\left(\beta\right)$ está bem definido.

Demonstração. Sabemos que β é homotópica a ω como no Lema 23. Assim, $\operatorname{ind}(\omega)$ está bem definido e, claramente, não varia sob homotopias, de modo que $\operatorname{ind}\left(\beta\right) = \operatorname{ind}(\omega)$. $\square$

Lema 25. Se $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathscr{C}^n$ é uma trança pura contínua, então $\operatorname{ind}(\alpha)$ está bem definido.

Demonstração. Se α é uma trança contínua e β e γ são tranças suaves homotópicas a α, necessariamente existe uma homotopia suave entre β e γ e, portanto, $\operatorname{ind}\left(\beta\right) = \operatorname{ind}\left(\gamma\right)$. Chamamos esse índice comum a todas as tranças puras suaves homotópicas a α de $\operatorname{ind}(\alpha)$. $\square$

Como a definição do índice é claramente aditiva sob concatenações, pelo Lema 25 concluímos o seguinte Teorema.

Teorema 1. ind é bem definido e induz um homomorfismo sobrejetivo de $\Pi^n\left(\mathbb{S}^2\right)$ em $\mathbb{Z}/(n-1)\,\mathbb{Z}$.

Referências

[1] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer New York, 2012.

[2] Arthur Sard. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48(12):883–890, 1942.

[3] Hassler Whitney. Differentiable manifolds. *The Annals of Mathematics*, 37(3):645, July 1936.