1 - A taxa de variação angular relativa. Iniciamos esse capítulo introduzindo o conceito de curvatura geodésica de uma curva suave com respeito a uma métrica riemanniana. Em primeiro lugar, estudamos como a forma de conexão de uma referencial pode ser interpretada como a taxa de variação angular *relativa* de uma referencial. Seja Ω um aberto simplesmente connexo. Seja g uma métrica riemanniana sobre Ω. Sejam $e_1, e_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ referenciais orientadas de g e denotamos por ω e $\tilde{\omega}$ suas respectives formas de conexão. Observamos que

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_1)M \tag{1}$$

para uma função suave $M : \Omega \rightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Denotamos

$$J_0 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Como Ω é simplesmente conexo, existe uma função $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$M(x) := \mathrm{Exp}(\theta(x)J) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(x)) & -\mathrm{sen}(\theta(x)) \\ \mathrm{sen}(\theta(x)) & \cos(\theta(x)) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Pelo Lema 2.2 do Capítulo 12,

$$\tilde{\omega} = \omega - d\theta. \tag{4}$$

Em particular, para todo $x \in \Omega$, e para todo vetor ξ,

$$(\omega - \tilde{\omega})(x)(\xi) = d\theta(x)(\xi). \tag{5}$$

Isto é, $(\omega - \tilde{\omega})(x)(\xi)$ mede a taxa de variação angular na direção ξ da referencial $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ com respeito à referencial (e_1, e_2). Em particular, quando $g = \delta$ é a métrica euclideana, podemos supor que $(e_1, e_2) := (\partial_1, \partial_2)$ é constante, e assim $(-\tilde{\omega})(x)(\xi)$ é a taxa de variação angular *absoluta* da referencial $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ na direção de ξ. Observamos que o conceito de taxa de variação angular *absoluta* apenas faz sentido no caso da existência de uma referencial constante, isto é no caso em que g é plane. Contudo, a taxa de variação angular relativa sempre existe, mesmo no caso em que a métrica não for plana.

2 - A curvatura geodésica. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ uma curva suave. Seja g uma métrica riemanniana sobre Ω. Seja $\gamma : I \rightarrow \Omega$ uma curva suave parametrizada por comprimento de arco com respeito à g. Denotamos por $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o seu campo tangente unitário. Isto é

$$T(t) := \dot{\gamma}(t). \tag{6}$$

Denotamos por $N : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo normal unitário de γ compatível com a orientação. Isto é, para todo t, $(T(t), N(t))$ é uma base orientada de $\mathbb{R}^2$.

Seja $e_1, e_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma referencial de g e denotamos por ω a sua forma de conexão. Observamos que existe uma função $M : I \rightarrow \mathrm{SO}(2)$ tal que, para todo t,

$$(T(t), N(t)) = (e_1(t), e_2(t))M(t). \tag{7}$$

Lema e Definição 2.1

Existe uma única função $c : I \to \mathbb{R}$ tal que, para todo t,

$$M^{-1}(t)\dot{M}(t) = (c(t) + \omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)))J_0. \tag{8}$$

Além do mais, c não depende da referencial orientada escolhida. Chamamos c a **curvatura geodésica** *de γ.*

Observação: Conforme à interpretação de $-\omega$ como a taxa de variação angular relativa de (e_1, e_2), vemos que $c(t)$ é a taxa de variação angular de (T, N).

Prova: De fato, como $M(t) \in \mathrm{SO}(2)$ para todo t,

$$M^{-1}(t)\dot{M}(t) \in \mathfrak{so}(2).$$

Como $\mathfrak{so}(2)$ é unidimensional, existe uma função $f : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$M^{-1}(t)\dot{M}(t) = f(t)J_0.$$

A função

$$c(t) := f(t) - \omega(\gamma(t))(\dot{(\gamma)}(t))$$

trivialmente possui as desejadas propriedades.

Mostramos agora que c não depende da referencial escolhida. Seja $e_1', e_2' : \Omega \to \mathbb{R}$ um outra referencial orientada de g e denotamos por ω' a sua forma de conexão. Seja $N : \Omega \to \mathrm{SO}(2)$ tal que, para todo x,

$$(e_1'(x), e_2'(x)) = (e_1(x), e_2(x))N(x).$$

Pelo Lema 2.2 do Capítulo 12, para todo $x \in \Omega$ e para todo vetor ξ,

$$(\omega(x)(\xi) - \omega'(x)(\xi))J_0 = -N^{-1}(x)DN(x)(\xi).$$

Trivialmente, para todo t,

$$(T(t), N(t)) = (e_1'(x), e_2'(x))M'(x),$$

onde $M'(x) := N(x)^{-1}M(x)$. Assim

$$\begin{aligned}
c(t)J_0 &= M^{-1}(t)\dot{M}(t) - \omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))J_0\\
&= (M')^{-1}(t)N^{-1}(t)(\dot{N}(t)M'(t) + N(t)\dot{M}'(t)) - \omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))J_0\\
&= -(\omega - \omega')(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))(M')^{-1}(t)J_0M'(t) + (M')^{-1}(t)\dot{M}'(t) - \omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))J_0\\
&= (M')^{-1}(t)\dot{M}'(t) - \omega'(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))J_0,
\end{aligned}$$

e segue que

$$(M')^{-1}(t)\dot{M}'(t) = (c(t) + \omega'(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)))J_0,$$

como desejado. □

3 - O teorema de Gauss-Bonnet. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Dizemos que uma curva $\gamma : I \to \Omega$ é **suave por partes** quando existe um subconjunto finito $Q \subseteq I$ tal que γ seja suave em $I \setminus Q$ e os dois limites laterias de $\dot{\gamma}$ existem em cada ponto de Q. Chamamos os elements de Q as **quinas** de γ.

Definição 3.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto simplesmente connexo. Seja $\gamma : I \to \Omega$ uma curva simples, fechada e suave por partes e denotamos por Q o conjunto de quinas de γ. Denotamos respectivamente por $T : (I \setminus Q) \to \mathbb{R}^2$ e por $(N \setminus Q) : I \to \mathbb{R}^2$ o campo tangente unitário e o campo normal unitário, escolhidos tais que, para todo t, $(T(t), N(t))$ seja positivamente orientada. Dizemos que a curva γ é **positivamente orientada** *quando N aponta por dentro do domínio limitado definido por γ.*

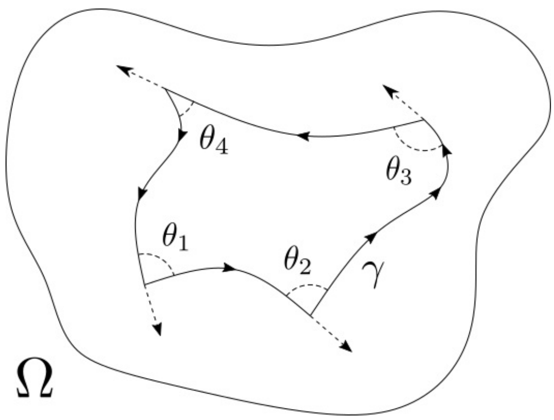

Figure 3.1 - o teorema de Gauss-Bonnet - Estudamos uma curva simples, fechada, suave por partes e positivamente orientada.

Teorema 3.2, Gauss-Bonnet

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto simplesmente connexo e seja g uma métrica riemanniana sobre Ω. Seja $\gamma : I \to \Omega$ uma curva simples, fechada, suave por partes e positivamente orientada e denotamos por Q o conjunto de quinas de γ. Denotamos respectivamente por $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ e por $c : (I \setminus Q) \to \mathbb{R}$ a curvatura de g e a curvatura geodésica de γ com respeito à g. Então

$$\int_{\mathrm{Int}(\gamma)} \kappa dA + \int_\gamma c dl = (2-m)\pi + \sum_{i=1}^m \theta_i, \tag{9}$$

onde $Int(\gamma)$ denota o domínio limitado definido por γ, dA denota o elemento de área de g, dl denota o elemento de comprimento de γ com respeito a g, e $\theta_1, \cdots, \theta_m$ denotam os ângulos internos das quinas de γ (ver a Figura 3.1).

Observação: Observamos que quando κ é c são triviais, (9) se reduz a

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = (m-2)\pi, \tag{10}$$

que é um resultado clássico para curvas poligonais em $\mathbb{R}^2$.

Prova: Seja $e_1, e_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ e denotamos por ω a sua forma de conexão. Supomos que γ é parametrizada por comprimento de arco com respeito a g. Denotamos por $0 < q_1 < \cdots < q_m < 1$ as quinas de γ. Denotamos por $T : (I \setminus Q) \to \mathbb{R}^2$ o campo tangente unitário de γ e denotamos por $N : (I \setminus Q) \to \mathbb{R}^2$ o único campo normal unitário definido tal que, para todo t, $(T(t), N(t))$ seja positivamente orientada. Observamos agora que existe uma única função $\theta : (I \setminus Q) \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(0) = 0$, para todo t,

$$(T(t), N(t)) = (e_1(t), e_2(t))\mathrm{Exp}(\theta(t)J_0),$$

e para toda quina q_i de γ,

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{t \to q_i^+} \theta(t) - \mathop{\mathrm{Lim}}_{t \to q_i^-} \theta(t) = \pi - \theta_i.$$

Pelo teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Int}(\gamma)} \kappa \mathrm{dA} &= \int_{\mathrm{Int}(\gamma)} \omega \\ &= \int_\gamma \omega(T)\mathrm{dl} \\ &= \int_\gamma \frac{d\theta}{dl} - c\mathrm{dl}.\end{aligned}$$

Contudo, como γ é simples, fechada e postivamente orientada,

$$\int_\gamma \frac{d\theta}{dl}\mathrm{dl} + \sum_{i=1}^m \left(\mathop{\mathrm{Lim}}_{t \to q_i^+} \theta(t) - \mathop{\mathrm{Lim}}_{t \to q_i^-} \theta(t) \right) = 2\pi.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathrm{Int}(\gamma)} \kappa \mathrm{dA} + \int_\gamma c\mathrm{dl} = \int_\gamma \frac{d\theta}{dl}\mathrm{dl} = 2\pi - \sum_{i=1}^m (\pi - \theta_i) = (2-m)\pi + \sum_{i=1}^m \theta_i,$$

como desejado. $\square$

Teorema 3.3, Gauss-Bonnet

Seja Σ uma superfície compacta sem bordo. Seja g uma métrica riemanniana sobre Σ com curvatura κ. Então

$$\int_\Sigma \kappa dA = 2\pi\chi(\Sigma), \tag{11}$$

onde dA denota a forma de área de Σ e $\chi(\Sigma)$ denota a característica de Euler de Σ.

Prova: Seja $\mathcal{T} := (T_i)_{i \in I}$ uma triângulação de Σ e supomos que cada triângulo de $\mathcal{T}$ é contido em uma carta de Σ. Denotamos respectivamente por $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}$ os conjuntos de vertices e de arestas de $\mathcal{T}$. Observamos que a soma de todos os ângulos em $\mathcal{T}$ é igual a $2\pi\,|\mathcal{V}|$. Observamos também que cada aresta pertence ao bordo de exatamente dois triângulos. Além do mais, as orientações de cada aresta nesses dois bordos são opostos. Consequentemente,

$$\sum_{i\in I}\int_{\partial T_i} d\mathrm{dl} = 0.$$

Segue então pelo Teorema 3.2 que

$$\int_{\Sigma}\kappa\mathrm{dA} = \sum_{i\in I}\int_{T_i}\kappa\mathrm{dA} = -\pi\,|\mathcal{T}| + 2\pi\,|\mathcal{V}|\,.$$

Contudo, como trata-se de uma triangulação,

$$3\,|\mathcal{T}| = 2\,|\mathcal{A}|\,,$$

e segue que

$$\int_{\Sigma}\kappa\mathrm{dA} = 2\pi\big(\,|\mathcal{T}| - |\mathcal{A}| + |\mathcal{V}|\,\big) = 2\pi\chi(\Sigma),$$

como desejado. □