1 - A derivada covariante. Neste capitulo, estudamos a teoria de hipersuperfícies de um ponto de visto mais moderno. Introduzimos a derivada convariante, que pode ser concebida como o componente tangential da derivada ao longo da hipersuperfície de um campo de vetores dado. Veremos na última seção como ela serve para expressar varios resultados geométricos de maneira mais simples e mais geral.

Lema e Definição 1.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos $N : U \to \mathbb{S}^m$ e $II : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ respectivamente o seu campo normal unitário e a sua segunda forma fundamental. Existe uma unica função suave $\Omega : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$D\phi(x)\Omega(x)(\xi,\nu) = D^2\phi(x)(\xi,\nu) + II(x)(\xi,\nu)N(x). \tag{1}$$

Chamamos Ω a **forma de conexão** *de ϕ.*

Observação: Lembramos que a campo normal unitário N aparece na definição da segunda forma fundamental II. Em particular, quando trocamos o sinal de N, trocamos tambm o sinal de II. Assim, não há ambigiuidade na definição do produto $\mathrm{II}(x)(\xi,\nu)N(x)$, apesar das ambiguidades nas definições II e N.

Observação: A forma de conexão Ω é um objeto diferente da forma de conexão ω estudada nas seções anteriores. As duas não devem ser confundidas.

Prova: Mostramos primeiro a unicidade. Sejam $\Omega, \Omega' : U \to \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ duas funções que satisfazem (1). Para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$D\phi(x)(\Omega(x)(\xi,\nu) - \Omega'(x)(\xi,\nu)) = 0.$$

Segue pela injetividade de $D\phi(x)$ que

$$\Omega(x)(\xi,\nu) = \Omega'(x)(\xi,\nu),$$

como desejado.

Mostramos agora a existência. Definimos $M : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m+1})$ por

$$M(x)(\xi,t) := D\phi(x)\xi + tN(x).$$

Observe-se que, para todo x, $M(x)$ é sobrejetivo. Segue pelo teorema de posto-nullidade que, para todo x, $M(x)$ é um isomorfismo linear. Definimos

$$\Omega(x)(\xi,\nu) := (\pi_1 \circ M(x)^{-1})(D^2\phi(x)(\xi,\nu) + \mathrm{II}(x)(\xi,\nu)N(x))$$

onde $\pi_1 : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é a projeção sobre o primeiro fator. Como

$$\begin{aligned}\langle D^2\phi(x)(\xi,\nu) + \mathrm{II}(x)(\xi,\nu)N(x), N(x)\rangle &= \langle D^2\phi(x)(\xi,\nu), N(x)\rangle + \mathrm{II}(x)(\xi,\nu)\\ &= -\langle D\phi(x)\xi, DN(x)\nu\rangle + \mathrm{II}(x)(\xi,\nu)\\ &= 0,\end{aligned}$$

segue que

$$(\pi_2 \circ M(x)^{-1})(D^2\phi(x)(\xi,\nu) + \mathrm{II}(x)(\xi,\nu)N(x)) = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}
D\phi(x)\Omega(x)(\xi,\nu) &= M(x)(\Omega(x)(\xi,\nu),0)\\
&= M(x)M(x)^{-1}(D^2\phi(x)(\xi,\nu) + \mathrm{II}(x)(\xi,\nu)N(x))\\
&= D^2\phi(x)(\xi,\nu) + \mathrm{II}(x)(\xi,\nu)N(x),
\end{aligned}$$

como desejado. □

Apesar da forma de conexão não ser invariante por reparametrização, o excesso compensa exatamente o excesso que aparece na formula de transformação da derivada de um campo de vetores.

Lema 1.2

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^{m+1}$ parametrizações. Denotamos Ω^ϕ e Ω^ψ as suas respectivas formas de conexão. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \tau$. Para todo par de campos de vetores $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^m$ e para todo $x \in U$,

$$D\tau(x)\Omega^\phi(x)(\tau^*\xi(x), \tau^*\nu(x)) = \Omega^\psi(y)(\xi(y),\nu(y)) + D^2\tau(x)(\xi(x),\nu(x)), \tag{2}$$

onde $y := \tau(x)$.

Prova: Seja $x \in U$. Denotamos $y := \tau(x)$. Então

$$\begin{aligned}
D\phi(x)\Omega^\phi(x)(\xi(x),\nu(x)) &= D^2\phi(x)(\xi(x),\nu(x)) + \mathrm{II}^\phi(x)(\xi(x),\nu(x))N^\phi(x)\\
&= D^2(\psi\circ\tau)(x)(\xi(x),\nu(x)) + (\tau^*\mathrm{II}^\psi)(x)(\xi(x),\nu(x))(N^\psi\circ\tau)(x)\\
&= D\psi(y)D^2\tau(x)(\xi(x),\nu(x)) + D^2\psi(y)(D\tau(x)\xi(x), D\tau(x)\nu(x))\\
&\qquad + \mathrm{II}^\psi(y)(D\tau(x)\xi(x), D\tau(x)\nu(x))N^\psi(y)\\
&= D\psi(y)\big(D^2\tau(x)(\xi(x),\nu(x)) + \Omega^\psi(y)(D\tau(x)\xi(x), D\tau(x)\nu(x))\big).
\end{aligned}$$

Segue que

$$D\psi(y)D\tau(x)\Omega^\phi(x)(\xi(x),\nu(x)) = D\psi(y)\big(\Omega^\psi(y)((\tau_*\xi)(y),(\tau_*\nu)(y)) + D^2\tau(x)(\xi(x),\nu(x))\big).$$

o que prova o resultado. □

Definição 1.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Seja $\Omega : U \to$ Bilin$(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ sua forma de conexão. Definimos a **derivada covariante** *∇ de ϕ tal que, para todo par de campos de vetores $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$,*

$$\nabla_\xi \nu := D_\xi \nu + \Omega(\xi,\nu). \tag{3}$$

Lema 1.4

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^{m+1}$ parametrizações. Denotamos ∇^ϕ e ∇^ψ suas respectivas derivadas covariantes. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \tau$. Para todo par de campos de vetores $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^m$,

$$\tau^*(\nabla^\psi_\xi \nu) = \nabla^\phi_{\tau^*\xi}\tau^*\nu. \tag{4}$$

Prova: Pelo Lemma 2.2 do Capitulo "Conceitos de Derivação I" e (2),

$$\begin{aligned}\tau^*(\nabla^\psi_\xi \nu) &= \tau^*(D_\xi \nu) + \tau^*(\Omega^\psi(\xi, \nu))\\ &= D_{\tau^*\xi}\tau^*\nu + \Omega^\phi(\tau^*\xi, \tau^*\nu)\\ &= \nabla^\phi_{\tau^*\xi}\tau^*\nu,\end{aligned}$$

como desejado. □

Lema 1.5

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos ∇ sua derivada convariante e denotamos respectivamente $N : U \to \mathbb{S}^m$ e $II : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ o seu compo normal unitário e a sua segunda forma fundamental. Para todo par $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores,

$$D_\xi(D\phi \cdot \nu) = D\phi \cdot (\nabla_\xi \nu) - II(\xi, \nu)N. \tag{5}$$

Observação: Assim, intepretamos ∇ e II respectivamente como o componente tangential e o componente normal da derivada do espaço ambiente.

Prova: De fato

$$\begin{aligned}D_\xi(D\phi \cdot \nu) &= D\phi \cdot (D_\xi \nu) + D^2\phi(\xi, \nu)\\ &= D\phi \cdot (D_\xi \nu + \Omega(\xi, \nu)) - \mathrm{II}(\xi, \nu)N\\ &= D\phi \cdot (\nabla_\xi \nu) - \mathrm{II}(\xi, \nu)N,\end{aligned}$$

como desejado. □

2 - Propriedades da derivada covariante.

Lemma 2.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Seja ∇ sua derivada covariante. Para todo par de campos de vetores $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ e para toda função $f : U \to \mathbb{R}$,

$$\nabla_{f\xi}\nu = f\nabla_\xi \nu. \tag{6}$$

Prova: De fato, para todo x,

$$\begin{aligned}(\nabla_{f\xi}\nu)(x) &= (D_{f\xi}\nu)(x) + \Omega(x)(f(x)\xi(x), \nu(x))\\ &= f(x)((D_\xi \nu)(x) + \Omega(x)(\xi(x), \nu(x)))\\ &= f(x)(\nabla_\xi \nu)(x),\end{aligned}$$

como desejado. □

Lemma 2.2

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Seja ∇ sua derivada covariante. Para todo par de campos de vetores $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ e para toda função $f : U \to \mathbb{R}$,

$$\nabla_\xi (f\nu) = (D_\xi f)\nu + f(\nabla_\xi \nu). \tag{7}$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi f\nu)(x) &= (D_\xi f\nu)(x) + \Omega(x)(\xi(x), f(x)\nu(x)) \\ &= (D_\xi f)(x)\nu(x) + f(x)\big((D_\xi \nu)(x) + \Omega(x)(\xi(x), \nu(x))\big) \\ &= (D_\xi f)(x)\nu(x) + f(x)(\nabla_\xi \nu)(x),\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Lema 2.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Seja ∇ sua derivada covariante. Para todo par de campos de vetores $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$,

$$\nabla_\xi \nu - \nabla_\nu \xi = [\xi, \nu]. \tag{8}$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}\nabla_\xi \nu - \nabla_\nu \xi &= D_\xi \nu + \Omega(\xi, \nu) - D_\nu \xi - \Omega(\nu, \xi) \\ &= D_\xi \nu - D_\nu \xi \\ &= [\xi, \nu],\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Definição 2.4

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos ∇ sua derivada covariante. Seja $B : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma forma bilinear. Para todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^m$, a **derivada covariante** *de B na direção de ξ é a função $(\nabla_\xi B) : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ definida tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,*

$$(\nabla_\xi B)(\nu, \mu) := (D_\xi B)(\nu, \mu) - B(\Omega(\xi, \mu), \nu) - B(\mu, \Omega(\xi, \nu)). \tag{9}$$

Lemma 2.5

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos ∇ sua derivada covariante. Seja $B : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma forma bilinear. Então, para todo triple $\xi, \nu, \mu : U \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores

$$D_\xi(B(\nu, \mu)) = (\nabla_\xi B)(\nu, \mu) + B(\nabla_\xi \nu, \mu) + B(\nu, \nabla_\xi \mu). \tag{10}$$

Prova: De fato

$$\begin{aligned}D_\xi(B(\nu, \mu)) &= (D_\xi B)(\nu, \mu) + B(D_\xi \nu, \mu) + B(\nu, D_\xi \mu) \\ &= (\nabla_\xi B)(\nu, \mu) + B(D_\xi \nu + \Omega(\xi, \nu), \mu) + B(\nu, D_\xi \mu + \Omega(\xi, \mu)) \\ &= (\nabla_\xi B)(\nu, \mu) + B(\nabla_\xi \nu, \mu) + B(\nu, \nabla_\xi \mu),\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Lemma 2.6

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos respectivamente ∇ e I a sua derivada covariante e a sua primeira forma fundamental. Então,

$$\nabla I = 0. \tag{11}$$

Prova: Sejam $\xi, \nu, \mu : U \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Por definição

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi \mathrm{I})(\nu, \mu) &= D_\xi(\mathrm{I}(\nu, \mu)) - \mathrm{I}(\nabla_\xi \nu, \mu) - \mathrm{I}(\nu, \nabla_\xi \mu)\\ &= D_\xi \langle D\phi \cdot \nu, D\phi \cdot \mu\rangle - \langle D\phi \cdot \nabla_\xi \nu, D\phi \cdot \mu\rangle - \langle D\phi \cdot \nu, D\phi \cdot \nabla_\xi \mu\rangle\\ &= \langle D^2\phi(\xi, \nu) + D\phi \cdot D_\xi \nu - D\phi \cdot \nabla_\xi \nu, D\phi \cdot \mu\rangle\\ &\qquad + \langle D\phi \cdot \nu, D^2\phi(\xi, \mu) + D\phi \cdot D_\xi \mu - D\phi \cdot \nabla_\xi \mu\\ &= \langle D^2\phi(\xi, \nu) - D\phi \cdot \Omega(\xi, \nu), D\phi \cdot \mu\rangle + \langle D\phi \cdot \nu, D^2\phi(\xi, \mu) - D\phi \cdot \Omega(\xi, \mu)\rangle\\ &= 0,\end{aligned}$$

como desejado. □

Lemma 2.7

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos respectivamente Ω e I a sua forma de conexão e a sua primeira forma fundamental. Então, para todo i, j, k,

$$I_{kp}\Omega^p_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} I_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} I_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} I_{ij}\right) \tag{12}$$

Em particular, Ω e ∇ apenas dependem de I.

Observação: Vemos então que a derivada covariante é um conceito intrinseco da métrica que é independente da parametrização.

Prova: De fato, para todo i, j, k,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{kp}\Omega^p_{ij} &= \mathrm{I}(\Omega(\partial_i, \partial_j), \partial_k)\\ &= \mathrm{I}(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k)\\ &= D_{\partial_i}\mathrm{I}(\partial_j, \partial_k) - \mathrm{I}(\partial_j, \nabla_{\partial_i}\partial_k)\\ &= D_{\partial_i}\mathrm{I}(\partial_j, \partial_k) - \mathrm{I}(\Omega(\partial_k, \partial_i), \partial_j)\\ &= D_{\partial_i}\mathrm{I}(\partial_j, \partial_k) - \mathrm{I}_{jp}\Omega^p_{ki}.\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}2\mathrm{I}_{kp}\Omega^p_{ij} &= (\mathrm{I}_{kp}\Omega^p_{ij} + \mathrm{I}_{jp}\Omega^p_{ki}) - (\mathrm{I}_{jp}\Omega^p_{ki} + \mathrm{I}_{ip}\Omega^p_{jk}) + (\mathrm{I}_{ip}\Omega^p_{jk} + \mathrm{I}_{kp}\Omega^p_{ij})\\ &= D_{\partial_i}\mathrm{I}_{jk} - D_{\partial_k}\mathrm{I}_{ij} + D_{\partial_j}\mathrm{I}_{ik},\end{aligned}$$

como desejado. □

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : U \to \mathrm{Bilin}_+(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Mostre que existe uma única função bilinear $\nabla : C^\infty(U, \mathbb{R}^m) \oplus C^\infty(U, \mathbb{R}^m) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ que satisfaz (6), (7), (8) e (11). Chamamos esse operador a **derivada covariante de Levi-Civita** de g.

3 - A derivada covariante é a geometria.

Definição 3.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Uma **derivada covariante** *sobre U é uma função bilinear $\nabla : C^\infty(U,\mathbb{R}^m) \oplus C^\infty(U,\mathbb{R}^m) \to C^\infty(U,\mathbb{R}^m)$ que satisfaz (6) e (7). Isto é, para todo par $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre U e para toda função $f : U \to \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \nabla_{f\xi}\nu &= f\nabla_\xi \nu, \text{ e} \\ \nabla_\xi f\nu &= f\nabla_\xi\nu + (D_\xi f)\nu. \end{aligned}$$

Dizemos que a derivada covariante ∇ é sem torsão quando satisfaz, para todo par $\xi,\nu : U \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre U,

$$\nabla_\xi\nu - \nabla_\nu\xi = [\xi,\nu].$$

Definição 3.2

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sem torsão sobre U. A **curvatura de Riemann** *de ∇ é a função $R : C^\infty(U,\mathbb{R}^m) \oplus C^\infty(U,\mathbb{R}^m) \oplus C^\infty(U,\mathbb{R}^m) \to C^\infty(U,\mathbb{R}^m)$ definida por*

$$R_{\xi\nu}\mu := \nabla_\xi\nabla_\nu\mu - \nabla_\nu\nabla_\xi\mu - \nabla_{[\xi,\nu]}\mu. \tag{13}$$

Exercício*: Mostre que R é trilinear em ξ, ν e μ. Mostre que R é antisimétrica em ξ e ν.

Exercício***: Mostre que existe um única função $\tilde{R} : U \to \mathrm{Trilin}(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ tal que, para todo triple ξ, ν e μ de campos de vetores sobre U,

$$R_{\xi\nu}\mu = \tilde{R}(\xi,\nu,\mu).$$

Lema 3.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : U \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana sobre U. Denotamos U a sua derivada covariante de Levi-Civita. Seja $e_1, e_2 : U \to \mathbb{R}^2$ um referencial de g. Denotamos ω a sua forma de conexão. Então, para todo campo de vetores ξ,

$$\begin{aligned} \nabla_\xi e_1 &= -\omega(\xi)e_2 \text{ e} \\ \nabla_\xi e_2 &= \omega(\xi)e_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Prova: De fato, como $\nabla g = 0$, para todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^2$,

$$g(\nabla_\xi e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_\xi e_j) = D_\xi(g(e_i,e_j)) = 0.$$

Segue que

$$g(\nabla_\xi e_1, e_1) = g(\nabla_\xi e_2, e_2) = 0,$$

e que
$$g(\nabla_\xi e_1, e_2) = -g(\nabla_\xi e_2, e_1).$$
Em particular, para todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi e_1 &= g(\nabla_\xi e_1, e_2)e_2 \\
&= g(\xi, e_1)g(\nabla_{e_1} e_1, e_2) + g(\xi, e_2)g(\nabla_{e_2} e_1, e_2) \\
&= -g(\xi, e_1)g(\nabla_{e_1} e_2, e_1) + g(\xi, e_2)g(\nabla_{e_2} e_1, e_2) \\
&= -g(\xi, e_1)g(\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1, e_1) + g(\xi, e_2)g(\nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{e_1} e_2, e_2) \\
&= -g(\xi, e_1)g([e_1, e_2], e_1) - g(\xi, e_2)g([e_1, e_2], e_2) \\
&= -g(\xi, e_1)\omega(e_1) - g(\xi, e_2)\omega(e_2) \\
&= -\omega(\xi),
\end{aligned}$$

o que prova a primeira relação. A segunda relação é deduzida da mesma maneira, e isso completa a prova. □

Teorema 3.4

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : U \to \mathit{Bilin}_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana sobre U. Denotamos κ a sua curvatura. Denotamos ∇ a derivada covariante de Levi-Civita de g. Denotamos R a sua curvatura de Riemann. Então, para toda referencial $e_1, e_2 : U \to \mathbb{R}^2$ de g,
$$\kappa = g(R_{e_1 e_2} e_2, e_1). \tag{15}$$

Prova: De fato, utilizando (14), temos

$$\begin{aligned}
g(R_{e_1 e_2} e_2, e_1) &= g(\nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_2, e_1) - g(\nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_2, e_1) - g(\nabla_{[e_1,e_2]} e_2, e_1) \\
&= g(\nabla_{e_1}\omega(e_2)e_1, e_1) - g(\nabla_{e_2}\omega(e_1)e_1, e_1) - \omega([e_1, e_2])g(e_1, e_1) \\
&= D_{e_1}\omega(e_2) + \omega(e_2)g(\nabla_{e_1} e_1, e_1) \\
&\qquad - D_{e_2}\omega(e_1) - \omega(e_1)g(\nabla_{e_2} e_1, e_1) - \omega([e_1, e_2]) \\
&= d\omega(e_1, e_2) \\
&= \kappa,
\end{aligned}$$

como desejado. □

Teorema 3.5

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ϕ uma parametrização. Denotamos I e II respectivamente a sua primeira e a sua segunda forma fundamental. Denotamos ∇ a derivada covariante de Levi-Civita de I. Denotamos R a sua curvatura de Riemann. Então, para todo quadruple $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 : U \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre U,

$$I(R_{\xi_1 \xi_2}\xi_3, \xi_4) = II(\xi_1, \xi_4)II(\xi_2, \xi_3) - II(\xi_1, \xi_3)II(\xi_2, \xi_4). \tag{16}$$

Observação: O Teorema Egregium de Gauss é um caso particular de essa relação.

Prova: De fato, utilizando (5), temos

$$\begin{aligned}
g(R_{\xi_1\xi_2}\xi_3,\xi_4) &= g(\nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2}\xi_3,\xi_4) - g(\nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_1}\xi_3,\xi_4) - g(\nabla_{[\xi_1,\xi_2]}\xi_3,\xi_4)\\
&= \langle D_{\xi_1}D\phi\cdot(\nabla_{\xi_2}\xi_3), D\phi\cdot\xi_4\rangle - \langle D_{\xi_2}D\phi\cdot(\nabla_{\xi_1}\xi_3), D\phi\cdot\xi_4\rangle\\
&\qquad - \langle D_{[\xi_1,\xi_2]}D\phi\cdot\xi_3, D\phi\cdot\xi_4\rangle\\
&= \langle D_{\xi_1}D_{\xi_2}D\phi\cdot\xi_3 + D_{\xi_1}(\mathrm{II}(\xi_2,\xi_3)N), D\phi\cdot\xi_4\rangle\\
&\qquad - \langle D_{\xi_2}D_{\xi_1}D\phi\cdot\xi_3 - D_{\xi_2}(\mathrm{II}(\xi_1,\xi_3)N), D\phi\cdot\xi_4\rangle\\
&\qquad\qquad - \langle D_{[\xi_1,\xi_2]}D\phi\cdot\xi_3, D\phi\cdot\xi_4\rangle\\
&= \mathrm{II}(\xi_2,\xi_3)\langle DN\cdot\xi_1, D\phi\cdot\xi_4\rangle - \mathrm{II}(\xi_1,\xi_3)\langle DN\cdot\xi_2, D\phi\cdot\xi_4\rangle\\
&= \mathrm{II}(\xi_1,\xi_4)\mathrm{II}(\xi_2,\xi_3) - \mathrm{II}(\xi_1,\xi_3)\mathrm{II}(\xi_2,\xi_4),
\end{aligned}$$

como desejado. □

Teorema 3.6

Seja $U\subseteq\mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U\to\mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos respectivamente ∇ e II a sua derivada covariante e a sua segunda forma fundamental. Então, para todo triple de campo de vetores $\xi,\nu,\mu : U\to\mathbb{R}^m$,

$$(\nabla_\xi II)(\nu,\mu) = (\nabla_\mu II)(\nu,\xi). \tag{17}$$

Prova: De fato

$$\begin{aligned}
(\nabla_\xi\mathrm{II})(\nu,\mu) &= D_\xi(\mathrm{II}(\nu,\mu)) - \mathrm{II}(\nabla_\xi\nu,\mu) - \mathrm{II}(\nu,\nabla_\xi\mu)\\
&= D_\xi\langle D\phi\cdot\nu, DN\cdot\mu\rangle - \langle D\phi\cdot\nabla_\xi\nu, DN\cdot\mu\rangle - \langle D\phi\cdot\nu, DN\cdot\nabla_\xi\mu\rangle\\
&= \langle D_\xi D\phi\cdot\nu, DN\cdot\mu\rangle + \langle D\phi\cdot\nu, D^2N(\xi,\mu)\rangle + \langle D\phi\cdot\nu, DN\cdot D_\xi\nu\rangle\\
&\qquad - \langle D\phi\cdot\langle_\xi\nu, DN\cdot\mu\rangle - \langle D\phi\cdot\nu, DN\cdot\nabla_\xi\mu\rangle\\
&= \langle D\phi\cdot\nu, D^2N(\xi,\mu) - DN\cdot\Omega(\xi,\mu)\rangle,
\end{aligned}$$

o que é simétrico em ξ e μ, como desejado. □

Exercício**: Seja $U\subseteq\mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\phi : U\to\mathbb{R}^3$ uma parametrização. Seja e_1, e_2 uma referencial da primeira forma fundamental de ϕ. Mostre que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{e_1}\mathrm{II})(e_2,e_1) - (\nabla_{e_2}\mathrm{II})(e_1,e_1) &= \big(d\epsilon^1_2 + \omega\wedge\epsilon^2_1\big)(e_1,e_2) \text{ e}\\
(\nabla_{e_1}\mathrm{II})(e_2,e_2) - (\nabla_{e_2}\mathrm{II})(e_1,e_2) &= \big(d\epsilon^2_2 - \omega\wedge\epsilon^2_1\big)(e_1,e_2).
\end{aligned}$$

Esse exercício mostra que, no caso de uma superfície, (17) é equivalente às equações de Codazzi-Mainardi.