1 - As equações de Maurer-Cartan. Veremos agora como todos os teoremas fundamentais da geometria seguem da um único resultado sobre a integrabilidade de campos de vetores tangentes a grupos de Lie.

Definição 1.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie. Denotamos $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Seja $F : \Omega \to G$ uma função suave. A **forma de Maurer-Cartan** *de F é a função $A : \Omega \to Lin(\mathbb{R}^2, \mathfrak{g})$ definida tal que, para todo $x \in \Omega$ por*

$$A(x)(\xi) := F(x)^{-1}DF(x) \cdot \xi. \tag{1}$$

Lema 1.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie. Denotamos $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Seja $F : \Omega \to G$ uma função suave e denotamos A a sua forma de Maurer-Cartan. Então, para todo $x \in \Omega$, e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^2$,

$$dA(x)(\xi, \nu) + [A(x)(\xi), A(x)(\nu)] = 0. \tag{2}$$

Observação: Chamamos (2) a **equação de Maurer-Cartan**.

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}(D_\xi A)(x)(\nu) &= -F(x)^{-1}(DF(x) \cdot \xi)F(x)^{-1}(DF(x) \cdot \nu) + F(x)^{-1}D^2F(x)(\xi, \nu)\\ &= -A(x)(\xi)A(x)(\nu) + F(x)^{-1}D^2F(x)(\xi, \nu)\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}dA(x)(\xi, \nu) &= (D_\xi A)(x)(\nu) - (D_\nu A)(x)(\xi)\\ &= -A(x)(\xi)A(x)(\nu) + A(x)(\nu)A(x)(\xi)\\ &= -[A(x)(\xi), A(x)(\nu)],\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Lema 1.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie. Denotamos $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Seja $A : \Omega \to Lin(\mathbb{R}^2, \mathfrak{g})$ uma função suave que satisfaz as equações de Maurer-Cartan (2). Então, para todo $x_0 \in \Omega$, existe uma vizinhança U de x_0 em Ω e uma única função suave $F : U \to G$ tal que $F(x_0) = Id$ e que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$A(x)(\xi) = F(x)^{-1}DF(x) \cdot \xi. \tag{3}$$

Além disso, se U é conexo, então F é única.

Prova: Mostramos primeiro a unicidade. Supomos então que U é conexo. Sejam $F, F' : U \to G$ duas soluções. Seja $x \in U$ e seja $\gamma : [0, 1] \to U$ uma curva suave que vai de x_0 a x.

Definimos $\tilde{F} := F \circ \gamma$ e $\tilde{F}' := F' \circ \gamma$. Então $\tilde{F}(0) = F(x_0) = F'(x_0) = \tilde{F}'(0)$. Utilizando a regra de cadeia, obtemos, para todo t,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}F(\gamma(t))\\ &= DF(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\\ &= F(\gamma(t))A(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))\\ &= \tilde{F}(t)A(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)).\end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos, para todo t,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}'(t) = \tilde{F}'(t)A(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)).$$

Como $\tilde{F}$ e $\tilde{F}'$ são soluções do mesmo problema de valor inicial,

$$F(x) = \tilde{F}(1) = \tilde{F}'(1) = F'(x),$$

como desejado.

Mostramos agora a existência. Para simplificar, podemos supor que $x_0 = 0$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, definimos o campo de vetores $\tilde{A}_i : \Omega \times \mathrm{End}(m) \to \mathbb{R}^2 \times \mathrm{End}(m)$ tal que, para todo $(x, M) \in \Omega \times \mathrm{End}(m)$,

$$\tilde{A}_i(x, M) := (\partial_i, MA(x)(\partial_i)).$$

Para cada $i \in \{1, 2\}$, denotamos Φ_i o fluxo de $\tilde{A}_i$. Utilizando as equações de Maurer-Cartan, obtemos, para todo $(x, M) \in \Omega \times \mathrm{End}(m)$,

$$\begin{aligned}[\tilde{A}_1, \tilde{A}_2](x, M) &= (D_{(\partial_1, MA(x)(\partial_1))}\tilde{A}_2)(x, M) - (D_{(\partial_2, MA(x)(\partial_2))}\tilde{A}_1)(x, M)\\ &= (0, M(D_{\partial_1}A)(x)(\partial_2) + MA(x)(\partial_1)A(x)(\partial_2))\\ &\qquad - (0, M(D_{\partial_2}A)(x)(\partial_1) + MA(x)(\partial_2)A(x)(\partial_1)\\ &= (0, M(dA(x)(\partial_1, \partial_2) + [A(x)(\partial_1), A(x)(\partial_2)]))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Segue que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $s, t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $(\Phi_{1,s} \cdot \Phi_{2,t})(x_0, \mathrm{Id})$ e $(\Phi_{2,t} \cdot \Phi_{1,s})(x_0, \mathrm{Id})$ são bem definidos e são iguais. Definimos então as funções $X :]-\epsilon, \epsilon[^2 \to \mathbb{R}^2$ e $F :]-\epsilon, \epsilon[^2 \to \mathrm{End}(m)$ por

$$\begin{aligned}X(s, t) &:= (\pi_1 \circ \Phi_{1,s} \circ \Phi_{2,t})(x_0, \mathrm{Id}), \text{ e}\\ F(s, t) &:= (\pi_2 \circ \Phi_{1,s} \circ \Phi_{2,t})(x_0, \mathrm{Id}),\end{aligned}$$

onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathrm{End}(m) \to \mathbb{R}^2$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathrm{End}(m) \to \mathrm{End}(m)$ são as projeções canônicas.

Mostramos primeiro que $X(s,t) = (s,t)$. De fato, para todo s, t,

$$\frac{\partial X}{\partial s}(s,t) = \pi_1\left(\left(\frac{\Phi_{1,s}}{\partial s} \circ \Phi_{2,t}\right)(x_0, \mathrm{Id})\right) = \pi_1((\tilde{A}_1 \circ \Phi_{1,s} \circ \Phi_{2,t})(x_0, \mathrm{Id})) = \partial_1.$$

Da mesma maneira, mostramos que, para todo s, t,

$$\frac{\partial X}{\partial t}(s,t) = \partial_2.$$

Como $X(0,0) = (0,0)$, segue que $X(s,t) = (s,t)$, como desejado.

Estudamos agora as propriedades da função F. Para todo s, t,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) &= \pi_2\left(\left(\frac{\partial \Phi_{1,s}}{\partial s} \circ \Phi_{2,t}\right)(x_0, \mathrm{Id})\right) \\
&= \pi_2((\tilde{A}_1 \circ \Phi_{1,s} \circ \Phi_{2,t})(x_0, \mathrm{Id})) \\
&= \pi_2(\tilde{A}_1(X(s,t), F(s,t))) \\
&= F(s,t)A(X(s,t))(\partial_1) \\
&= F(s,t)A(s,t)(\partial_1).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, mostramos que, para todo s, t,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = F(s,t)A(s,t)(\partial_1).$$

Segue que F é uma solução de (3) com $F(0) = \mathrm{Id}$. Enfim, como $A(x)(\partial_1), A(x)(\partial_2) \in \mathfrak{g}$ para todo $x \in \Omega$, os campos $\tilde{A}_1$ e $\tilde{A}_2$ são tangentes a $\Omega \times G$ e os fluxos Φ_1 e Φ_2 preservam essa subvariedade. Em particular, $F(s,t) \in G$ para todo (s,t), o que completa a prova. $\square$

2 - As equações de Codazzi-Mainardi.

Definição 2.1

Para $\alpha, \beta \in Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, definimos a função bilinear $\alpha \wedge \beta \in Bilin(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que, para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^2$,

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi, \nu) := \alpha(\xi)\beta(\nu) - \beta(\xi)\alpha(\nu). \tag{4}$$

Observação: A função $\alpha \wedge \beta$ é sempre antissimétrica.

Definição 2.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Seja $h : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma forma bilinear simétrica. Seja $e_1, e_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um referencial de g. Para cada $i \in \{1, 2\}$, definimos a forma $\epsilon_h^i : \Omega \to Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que, para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\epsilon_h^i(\xi) := h(\xi, e_i). \tag{5}$$

No caso em que $g := I^\phi$ e $h := II^\phi$ são respectivamente a primeira forma fundamental e a segunda forma fundamental de uma parametrização ϕ, para cada $i \in \{1, 2\}$, denotamos

$$\epsilon_1^i := \epsilon_g^i \text{ e } \epsilon_2^i := \epsilon_h^i. \tag{6}$$

Com essa notação, podemos expressar a equação de Gauss de uma maneira mais conveniente para as aplicações dessa seção.

Teorema 2.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização. Denotamos I e II respectivamente a sua primeira forma fundamental e a sua segunda forma fundamental. Seja $e_1, e_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ um referencial de I. Denotamos ω a forma de conexão desse referencial. Então

$$d\omega = \epsilon_2^1 \wedge \epsilon_2^2. \tag{7}$$

Deduzimos agora mais duas relações satisfeitas pelas formas fundamentais de uma parametrização.

Lema 2.4

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Seja $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização. Denotamos I e II respectivamente a primeira forma fundamental e a sua segunda forma fundamental. Seja $e_1, e_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ um referencial de I. Denotamos ω a forma de convexão desse referencial. Então

$$\begin{aligned} d\epsilon_2^1 &= -\omega \wedge \epsilon_2^2, \text{ e} \\ d\epsilon_2^2 &= \omega \wedge \epsilon_2^1. \end{aligned} \tag{8}$$

Observação: Chamamos (8) as **Equações de Codazzi-Mainardi**.

Prova: De fato,

$$\begin{aligned} D_{\partial_1}(\epsilon_2^1(\partial_2)) &= D_{\partial_1}(\mathrm{II}(e_1, \partial_2)) \\ &= D_{\partial_1}\langle D_{e_1}\phi, D_{\partial_2}N\rangle \\ &= \langle D_{\partial_1}D_{e_1}\phi, D_{\partial_2}N\rangle + \langle D_{e_1}\phi, D_{\partial_1}D_{\partial_2}N\rangle \\ &= -\omega(\partial_1)\langle D_{e_2}\phi, D_{\partial_2}N\rangle + \langle D_{e_1}\phi, D_{\partial_1}D_{\partial_2}N\rangle \\ &= -\omega(\partial_1)\epsilon_2^2(\partial_2) + \langle D_{e_1}\phi, D_{\partial_1}D_{\partial_2}N\rangle. \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos,

$$D_{\partial_2}(\epsilon_2^1(\partial_1)) = -\omega(\partial_2)\epsilon_2^2(\partial_1) + \langle D_{e_1}\phi, D_{\partial_2}D_{\partial_1}N\rangle.$$

Segue que

$$d\epsilon_2^1(\partial_1,\partial_2) = D_{\partial_1}(\epsilon_2^1(\partial_2)) - D_{\partial_2}(\epsilon_2^1(\partial_1)) = -(\omega\wedge\epsilon_2^2)(\partial_1,\partial_2),$$

como desejado. A derivação da segunda relação é idêntica, e isso completa a prova. □

Exercício**: Seja $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. Seja $g:\Omega\to\mathrm{Bilin}_+(\mathbb{R}^2\oplus\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Seja $h:\Omega\to\mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^2\oplus\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ uma forma bilinear. Sejam $e_1,e_2:\Omega\to\mathbb{R}^2$ e $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2:\Omega\to\mathbb{R}^2$ dois referenciais de g. Denotamos ω e $\tilde{\omega}$ suas respectivas formas de conexão. Mostre que $(\epsilon_h^1,\epsilon_h^2,\omega)$ satisfaz as equações de Codazzi-Mainardi se e somente se $(\tilde{\epsilon}_h^1,\tilde{\epsilon}_h^2,\tilde{\omega})$ as satisfaz.

Esse exercício mostra que a propriedade de satisfazer as equações de Codazzi-Mainardi depende apenas de (g,h) e não do referencial de g escolhido.

Teorema 2.5, Teorema Fundamental de Superfícies, Bonnet

Seja $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g:\Omega\to Bilin_+(\mathbb{R}^2\oplus\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Seja $h:\Omega\to Bilin(\mathbb{R}^2\oplus\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ uma forma bilinear simétrica. Se (g,h) satisfaz a equação de Gauss (7) *e as equações de Codazzi-Mainardi* (8) *então, para todo $x_0\in\Omega$, existe uma vizinihança U de x_0 em Ω e uma parametrização $\phi:U\to\mathbb{R}^3$ tal que*

$$\begin{aligned} I^\phi &= g|_U,\ e\\ II^\phi &= h|_U. \end{aligned} \tag{9}$$

Além disso, se U é conexa, então ϕ é única a menos de movimentos rígidos de $\mathbb{R}^3$.

Prova: Seja e_1,e_2 um referential de g. Utilizamos primeiro o Lema 1.3 para construir um referencial em $\mathbb{R}^3$ da superfície desejada. Definimos $A:\Omega\to\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathfrak{so}(3))$ por

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \omega & \epsilon_2^1\\ -\omega & 0 & \epsilon_2^2\\ -\epsilon_2^1 & -\epsilon_2^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Como (g,h) satisfaz a equação de Gauss e as equações de Codazzi-Mainardi, A satisfaz a equação de Maurer-Cartan (2). Segue pelo Lema 1.3 que existe uma vizinhança U de x_0 em Ω e uma função $F:U\to\mathrm{SO}(3)$ tal que $F(x_0)=\mathrm{Id}$ e que, para todo $x\in\Omega$ e para todo $\xi\in\mathbb{R}^2$,

$$A(x)(\xi) = F(x)^{-1}DF(x)(\xi).$$

Definimos $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,N:U\to\mathbb{R}^3$ tal que, para todo $x\in\Omega$,

$$M(x) = (\tilde{e}_1(x),\tilde{e}_2(x),N(x)).$$

Mostramos agora que existe uma parametrização primitiva de $(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)$. Para esse fim, definimos a forma $\alpha:U\to\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ tal que, para todo x e para cada $i\in\{1,2\}$,

$$\alpha(x)(e_j(x)) = \tilde{e}_i(x).$$

Temos

$$\begin{aligned} d\alpha(e_1, e_2) &= D_{e_1}\alpha(e_2) - D_{e_2}\alpha(e_1) - \alpha([e_1, e_2]) \\ &= D_{e_1}\tilde{e}_2 - D_{e_2}\tilde{e}_1 - \alpha([e_1, e_2]) \\ &= \omega(e_1)\tilde{e}_1 - \epsilon_2^2(e_1)N + \omega(e_2)\tilde{e}_2 + \epsilon_2^1(e_2)N - \alpha([e_1, e_2]) \\ &= \omega(e_1)\alpha(e_1) + \omega(e_2)\alpha(e_2) - \alpha([e_1, e_2]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue que, reduzindo U se for necessário, existe $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ tal que $d\phi = \alpha$. Isto é,

$$D_{e_1}\phi = \tilde{e}_1 \text{ e } D_{e_2}\phi = \tilde{e}_2.$$

Verificamos que ϕ é uma imersão com primeira forma fundamental I, campo normal unitário N e segunda forma fundamental II. Isso mostra a existência. □

Teorema 2.6

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Denotamos κ a curvatura de g. (Ω, g) é em todo lugar localmente isométrica à um plano se e somente se $\kappa = 0$.

Prova: Seja $h = 0$. Seja $x_0 \in \Omega$. Seja e_1, e_2 um referencial de g. Trivialmente, (g, h) satisfaz as equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi. Segue então pelo Teorema Fundamental de Superfícies que existe uma vizinhança U de x_0 em Ω e uma parametrização $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{I}^\phi = g$ e $\mathrm{II}^\phi = h$. Como $\mathrm{II}^\phi = 0$, ϕ parametriza uma porção de um plano afim, como desejado. □

Teorema 2.7

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Denotamos κ a curvatura de g. (Ω, g) é em todo lugar localmente isométrica a uma esfera de raio r se e somente se $\kappa = 1/r^2$.

Prova: Seja $h := (1/r)g$. Seja $x_0 \in \Omega$. Seja e_1, e_2 um referencial de g. Denotamos ω a forma de conexão desse referencial. Para cada $i \in \{1, 2\}$, $\epsilon_h^i = \epsilon_g^i/r$. Em particular,

$$\begin{aligned} d\epsilon_h^1(e_1, e_2) &= \frac{1}{r} d\epsilon_g^1(e_1, e_2) \\ &= \frac{1}{r} D_{e_1}\epsilon_g^1(e_2) - \frac{1}{r} D_{e_2}\epsilon_g^1(e_1) - \frac{1}{r}\epsilon_g^1([e_1, e_2]) \\ &= -\frac{1}{r}\omega(e_1) \\ &= -(\omega \wedge \epsilon_h^2)(e_1, e_2). \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos

$$d\epsilon_h^2(e_1, e_2) = (\omega \wedge \epsilon_h^1)(e_1, e_2).$$

Enfim, por hipótese,

$$d\omega(e_1, e_2) = \kappa = \frac{1}{r^2} = (\epsilon_h^1 \wedge \epsilon_h^2)(e_1, e_2).$$

Segue que (g, h) satisfaz as equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi. Segue então pelo Teorema Fundamental de Superfícies que existe uma vizinhança U de x_0 em Ω e uma parametrização $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{I}^\phi = g$ e $\mathrm{II}^\phi = h$. Em particular, como

$$\mathrm{II}^\phi = \frac{1}{r}\mathrm{I}^\phi,$$

ϕ parametriza uma porção de uma esfera de raio r, como desejado. $\square$