1 - Cartas Isométricas. Abordamos agora uma questão fundamental da teoria de subvariedades, a saber, aquela da existência ou não de cartas isométricas. Desde o início do nosso estudo da geometria de subvariedades, percebemos que a dificuldade dos problemas abordados frequentemente depende da parametrização escolhida. Para muitos desses problemas, a parametrização isométrica, caso exista, seria a melhor parametrização de todas. É por isso que a questão de existência ou não de cartas isométricas interessa tanto aos geômetros. Nesse capítulo, veremos que o estudo desse problema leva diretamente ao conceito de curvatura, que ocupa, hoje em dia, um lugar central no estudo da geometria riemanniana. Em particular, veremos como no caso de superfícies a resposta a essa questão é expressa de maneira particularmente simples em termos do operador de Weingarten da superfície no famoso *Teorema Egregium* de Gauss.

Seja primeiro $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja p um ponto de X. Seja $\phi : U \to X$ uma parametrização de X em torno de p. Para simplificar a notação, vamos supor que $\phi(0) = p$. Agora, é conveniente introduzir a seguinte terminologia.

Definição 1.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : U \to \mathrm{Bilin}_+(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Para todo $x \in U$, dizemos que g é **plana** *perto de x quando existem um aberto $V \subseteq \mathbb{R}^m$, uma vizinhança $x \in W \subseteq U$ e um difeomorfismo $\tau : V \to W$ tal que*

$$(\tau^* g)_{ij} = \delta_{ij}.$$

Vemos que, com essa terminologia, a subvariedade X tem uma parametrização isométrica em torno de p se e somente se a primeira forma fundamental I^ϕ de ϕ é plana perto de 0. De fato, supomos que exista uma parametrização isométrica $\psi : V \to X$ de X em torno de p. Podemos supor que $\phi(U) = \psi(V)$. Denotamos $\tau : V \to U$ a reparametrização. Isto é, τ é o único difeomorfismo tal que

$$\psi = \phi \circ \tau.$$

Como ψ é isométrica,

$$\tau^* \mathrm{I}^\phi_{ij} = \mathrm{I}^\psi_{ij} = \delta_{ij},$$

Vamos nos restringir a partir de agora ao caso em que X é uma superfície. Estudar se ou não uma métrica em dimensão superior é plana é um tema central da teoria de Geometria Riemanniana, e foge do propósito do presente curso.

Estudamos primeiro um problema mais geral.

Definição 1.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : \Omega \to \mathrm{Bilin}_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica. Um **referencial** *de g é um par $e_1, e_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de campos de vetores tal que, para todo x, e para cada $i, j \in \{1, 2\}$,*

$$g(x)(e_1(x), e_2(x)) = \delta_{ij}.$$

Exercício[!]**:** Mostre que existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e uma métrica $g : U \to \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que g não é a primeira forma fundamental de nenhuma imersão.

Lema 1.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : U \to Bilin(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Para todo $x_0 \in U$, g é plana perto de x_0 se e somente se existe um referencial e_1, e_2 de g definido numa vizinhança de x_0 tal que

$$[e_1, e_2] = 0.$$

Prova: Supomos que existe um referencial e_1, e_2 de g definido numa vizinhança de x_0 tal que $[e_1, e_2] = 0$. Podemos supor que o domínio do mesmo também é U. Sejam Φ^1 e Φ^2 os respectivos fluxos de e_1 e de e_2. Como $[e_1, e_2] = 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t_1, t_2 \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$\tau(t_1, t_2) := (\Phi^1_{t_1} \circ \Phi^2_{t_2})(x_0) = (\Phi^2_{t_2} \circ \Phi^1_{t_1})(x_0).$$

Seja $(t_1, t_2) \in]-\epsilon, \epsilon[^2$ e denotamos $x := \tau(t_1, t_2)$. Então

$$\begin{aligned}
(\tau_* \partial_1)(x) &= D\tau(t_1, t_2)\partial_1 \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\Phi^1_t \circ \Phi^2_{t_2})(x_0)\Big|_{t=t_1} \\
&= (e_1 \circ \Phi^1_t \circ \Phi^2_{t_2})(x_0) \\
&= (e_1 \circ \tau)(t_1, t_2) \\
&= e_1(x).
\end{aligned}$$

Segue que $\tau_* \partial_1 = e_1$. Da mesma forma, $\tau_* \partial_2 = e_2$. Segue que

$$\begin{aligned}
(\tau^* g)_{ij}(t_1, t_2) &= (\tau^* g)(t_1, t_2)(\partial_i, \partial_j) \\
&= g(x)((\tau_* \partial_i)(x), (\tau_* \partial_j)(x)) \\
&= g(x)(e_i(x), e_j(x)) \\
&= \delta_{ij},
\end{aligned}$$

o que mostra que g é plana perto de x_0, como desejado.

Reciprocamente, supomos que g é plana perto de x_0. Sejam V um aberto de $\mathbb{R}^2$, W uma vizinhança de x_0 em U e $\tau : V \to W$ um difeomorfismo tal que, para cada $i, j \in \{1, 2\}$,

$$(\tau^* g)_{ij} = \delta_{ij}.$$

Para cada $i \in \{1, 2\}$, denotamos $e_i := \tau_* \partial_i$. Sejam $x \in W$ e $i, j \in \{1, 2\}$. Denotamos $y := \tau^{-1}(x)$. Então

$$g(x)(e_i(x), e_j(x)) = g(x)((\tau_* \partial_i)(x), (\tau_* \partial_j)(x)) = (\tau^* g)(y)(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}$$

Segue que e_1, e_2 é um referencial de g sobre W. Enfim,

$$[e_1, e_2] = [\tau_* \partial_1, \tau_* \partial_2] = \tau_*[\partial_1, \partial_2] = 0,$$

o que prova o resultado. □

Segue pelo Lema 1.3 que o problema de determinar se uma dada métrica é plana se transforma no problema de determinar se existe um referencial e_1, e_2 dessa métrica cujo colchete de Lie é sempre igual a 0.

2 - Curvatura. No Lema 1.3 temos um critério para que uma dada métrica seja plana numa vizinhança de um ponto. Contudo, em geral esse critério é difícil de ser verificado. Nessa seção, vamos estudar como a obstrução à existência de um referencial com colchete de Lie igual a zero pode ser escrita em termos da função de curvatura. Para fazer isso, será conveniente introduzir um conceito que é dual àquele de colchete de Lie de um referencial.

Definição 2.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Seja $e_1, e_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ um referencial de g. A **forma de conexão** *de e_1, e_2 é a 1-forma $\omega : \Omega \to Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definida tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,*

$$\omega(x)(\xi) := g([e_1, e_2], \xi). \tag{1}$$

Observação: Trivialmente $[e_1, e_2] = 0$ se e somente se $\alpha = 0$.

Lema 2.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Seja $e_1, e_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ um referencial de g. Denotamos ω a sua 1-forma de conexão. Seja $\theta : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função suave e definimos o referencial $e_1^\theta, e_2^\theta : \Omega \to \mathbb{R}^2$ por

$$(e_1^\theta, e_2^\theta) := (e_1, e_2) \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Então a forma de conexão ω^θ de e_1^θ, e_2^θ satisfaz, para todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\omega^\theta(x)(\xi) = \omega(x)(\xi) - D_\xi\theta. \tag{2}$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned} [e_1^\theta, e_2^\theta] &= [\cos(\theta)e_1 + \operatorname{sen}(\theta)e_2, -\operatorname{sen}(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2] \\ &= [e_1, e_2] - (D_{e_1}\theta)e_1 - (D_{e_2}\theta)e_2. \end{aligned}$$

Segue que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \omega^\theta(x)(\xi) &= g([e_1^\theta, e_2^\theta], \xi) \\ &= g([e_1, e_2], \xi) - g((D_{e_1}\theta)e_1 - (D_{e_2}\theta)e_2, \xi) \\ &= \omega(x)(\xi) - D_\xi\theta, \end{aligned}$$

como desejado. □

Definição 2.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\omega : \Omega \to Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma 1-forma. Definimos $d\omega : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que, para todo $i, j \in \{1, 2\}$,

$$d\omega(\partial_1, \partial_2) := D_{\partial_1}\omega(\partial_2) - D_{\partial_2}\omega(\partial_1). \tag{3}$$

Chamamos $d\omega$ a **derivada exterior**

Exercício*: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\omega : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma 1-forma. Mostre que, para todo $x \in \Omega$, $d\omega(x)$ é antisimétrica.

Exercício*: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função suave. Mostre que

$$d(df) = 0.$$

Exercício**: Seja $\omega : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma 1-forma. Mostre que, para todo $x \in \Omega$, existe uma vizinhança U de x em Ω e uma função $f : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$df = \omega|_U.$$

Esses exercícios mostram que, para toda 1-forma ω, $d\omega$ é precisamente a obstrução local à existência de uma primitiva f da mesma. De fato, $d\omega = 0$ se e somente se o campo de vetores $(\omega(\partial_2), -\omega(\partial_1))^t$ é conservativo e nesse caso uma primitiva pode ser construida mediante o Teorema de Green.

Temos agora todos os ingredientes necessários para estudar a obstrução à existência de um referential com colchete de Lie igual a zero.

Lema e Definição 2.4

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : U \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Existe uma função $\kappa : U \to \mathbb{R}$ tal que, para todo referencial $e_1, e_2 : U \to \mathbb{R}^2$ de g,

$$\kappa := d\omega(e_1, e_2), \tag{4}$$

onde ω é a forma de conexão de e_1, e_2. Chamamos κ a **curvatura** *de g.*

Prova: Mostramos que κ é independente do referencial escolhido. Observamos primeiro que (4) é invariante por troca de ordem de e_1 e e_2. Seja $x_0 \in U$. Seja $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 : U \to \mathbb{R}^2$ um outro referencial de g definido numa vizinhança de x_0. A menos de trocar a ordem desses dois campos, existe $r > 0$ e uma função $\theta : B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ tal que

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) := (e_1, e_2) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Segue pelo Lema 2.2 que a forma de conexão $\tilde{\omega}$ de esse referencial satisfaz, para todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\tilde{\omega}(x)(\xi) = \omega(x)(\xi) - d\theta(x)(\xi).$$

Utilizando a antissimetria de $d\omega$, temos então

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa} &= d\tilde{\omega}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)\\ &= d\omega(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)\\ &= d\omega(\cos(\theta)e_1 + \mathrm{sen}(\theta)e_2, -\mathrm{sen}(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2)\\ &= (\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta))d\omega(e_1, e_2)\\ &= \kappa,\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Teorema 2.5

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Seja $x_0 \in U$. Então g é plana perto de x_0 se e somente se a sua curvatura é igual a zero numa vizinhança de x_0.

Prova: Supomos que g é plana perto de x_0. Pelo Lema 1.3, existe um referencial e_1, e_2 de g definido numa vizinhança U de x_0 tal que $[e_1, e_2] = 0$. Em particular, $\kappa(x) = 0$ para todo $x \in V$, como desejado.

Reciprocamente, seja $r > 0$ e supomos que κ seja igual a zero em $B_r(x_0)$. Seja $e_1, e_2 : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^2$ um referencial de g definido nesse disco. Denotamos ω a forma de conexão desse referencial. Como

$$d\omega(e_1, e_2) = \kappa = 0,$$

existe $\theta : B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\omega = d\theta.$$

Definimos

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) := (e_1, e_2)\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta)\\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Denotamos $\tilde{\omega}$ a forma de conexão de $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$. Pelo Lema 2.2,

$$\tilde{\omega} = \omega - d\theta = 0.$$

Em particular, $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = 0$, e o resultado segue pelo Lema 1.3. $\square$

Exercício**: Determine a curvatura da métrica

$$g(r, \theta) := dr^2 + \sin^2(r)d\theta^2.$$

Exercício**: Determine a curvatura da métrica

$$g(t, \theta) := dr^2 + \sinh^2(r)d\theta^2.$$

Exercício**: Determine a curvatura da métrica

$$g(t, r) := dr^2 + \cos^2(r)dt^2.$$

Exercício****:** Determine a curvatura da métrica

$$g(t,r) := dr^2 + \cosh^2(r)dt^2.$$

Exercício****:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $g : U \to \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma métrica riemanniana. Dizemos que g é **conforme** quando existe uma função $f : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$g_{ij} = e^{2f}\delta_{ij}.$$

Mostre que, nesse caso, a curvatura κ de g satisfaz

$$\kappa = -e^{-2f}\Delta f,$$

onde Δ é o operador laplaciano.

Exercício****:** Determine a curvatura da métrica

$$g_{ij}(x) := \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2}\delta_{ij}.$$

Exercício****:** Determine a curvatura da métrica

$$g_{ij}(x) := \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2}\delta_{ij}.$$

Exercício****:** Determine a curvatura da métrica

$$g_{ij}(x,y) := \frac{1}{y^2}\delta_{ij}.$$

Exercício****:** Determine a curvatura da métrica

$$g_{ij}(x,y) := e^{-y}\delta_{ij}.$$

3 - Invariância. Antes de continuar, estudaremos as regras de transformação satisfeitas pelos objetos geométricos introduzidos na seção anterior. A seguinte fórmula para a derivada exterior vai simplificar esse trabalho.

Lema 3.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\alpha : \Omega \to Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma 1-forma. Então, para todo par $\xi, \nu : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de campos de vetores sobre Ω,

$$d\alpha(\xi,\nu) = D_\xi\alpha(\nu) - D_\nu\alpha(\xi) - \alpha([\xi,\nu]). \tag{5}$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned} d\alpha(\xi,\nu) &= \xi^i\nu^j\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} - \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\right) \\ &= \xi^i\frac{\partial}{\partial x_i}(\nu^j\alpha_j) - \nu^j\frac{\partial}{\partial x_j}(\xi^i\alpha_i) - \alpha_j\left(\xi^i\frac{\partial\nu^j}{\partial x_i}\right) + \alpha_i\left(\nu^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x_j}\right) \\ &= D_\xi\alpha(\nu) - D_\nu\alpha(\xi) - \alpha([\xi,\nu]), \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Lema 3.2

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ abertos. Seja $\alpha : V \to Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma 1-forma. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo. Então,

$$d(\tau^*\alpha) = \tau^*(d\alpha). \tag{6}$$

Prova: Utilizando o Lema 3.1, para todo par $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^2$ de campos de vetores, obtemos

$$\begin{aligned} d(\tau^*\alpha)(\tau^*\xi, \tau^*\nu) &= D_{\tau^*\xi}(\tau^*\alpha(\tau^*\nu)) - D_{\tau^*\nu}(\tau^*\alpha(\tau^*\xi)) - \tau^*\alpha([\tau^*\xi, \tau^*\nu]) \\ &= D_{\tau^*\xi}((\alpha(\nu)) \circ \tau) - D_{\tau^*\nu}((\alpha(\xi)) \circ \tau) - \tau^*\alpha(\tau^*[\xi, \nu]) \\ &= (D_\xi(\alpha(\nu))) \circ \tau - (D_\nu(\alpha(\xi))) \circ \tau - (\alpha[\xi, \nu]) \circ \tau \\ &= (d\alpha(\xi, \nu)) \circ \tau \\ &= (\tau^*(d\alpha))(\tau^*\xi, \tau^*\nu), \end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

Lema 3.3

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ abertos. Sejam $g : U \to Bilin(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $g : V \to Bilin(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ métricas riemannianas. Sejam e_1, e_2 e f_1, f_2 referenciais de g e de h, respectivamente. Denotamos α e β suas respectivas formas de conexão. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que, para cada i, $\tau^* f_i = e_i$. Então

$$\begin{aligned} \tau^* h &= g, \ \text{e} \\ \tau^*\beta &= \alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

Prova: De fato, para todo $i, j \in \{1, 2\}$,

$$(\tau^*h)(e_i, e_j) = (\tau^*h)(\tau^*f_i, \tau^*f_j) = h(f_i, f_j) \circ \tau = \delta_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Como e_i, e_j forma em todo ponto uma base de $\mathbb{R}^2$, segue que $g = \tau^*h$, como desejado.

Para todo campo de vetors $\xi := \tau^*\nu : V \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= g([e_1, e_2], \tau^*\nu) \\ &= (\tau^*h)([\tau^*f_1, \tau^*f_2], \tau^*\nu) \\ &= (\tau^*h)(\tau^*[f_1, f_2], \tau^*\nu) \\ &= (h([f_1, f_2], \nu)) \circ \tau \\ &= \beta(\nu) \circ \tau \\ &= (\tau^*\beta)(\tau^*\nu) \\ &= (\tau^*\beta)(\xi), \end{aligned}$$

como desejado. □

Lema 3.4

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ abertos. Sejam $g : U \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $h : V \to Bilin_+(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ métricas riemannianas. Denotamos $\kappa^g : U \to \mathbb{R}$ e $\kappa^h : V \to \mathbb{R}$ as suas respectivas curvaturas. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que $\tau^* h = g$. Então

$$\kappa^g = \kappa^h \circ \tau.$$

Observação: Em particular, no caso em que g é a primeira forma fundamental I^ϕ de uma parametrização $\phi : U \to \mathbb{R}^{2+m}$, podemos considerar a curvatura como uma função definida sobre a subvariedade $X := \phi(U)$.

Prova: Seja $e_1, e_2 : V \to \mathbb{R}^2$ um referencial de h e denotamos ω a sua forma de conexão. Observamos que $\tau^* e_1, \tau^* e_2$ também é um referencial de g. Pela Lema 3.3, a forma de conexão de $\tau^* e_1, \tau^* e_2$ é $\tau^* \omega$. Segue que

$$\begin{aligned} \kappa^g &= (d(\tau^*\omega))(\tau^* e_1, \tau^* e_2) \\ &= (\tau^*(d\omega))(\tau^* e_1, \tau^* e_2) \\ &= \tau^*(d\omega(e_1, e_2)) \\ &= \kappa^h \circ \tau, \end{aligned}$$

como desejado. □

4 - O Teorema Egregium de Gauss. Voltamos agora ao caso em que a métrica é a primeira forma fundamental de uma parametrização. Nesse caso, cabe esclarecer primeiro a relação entre a forma de conexão de um referencial desse métrica e a derivada da imagem desse referencial na superfície parametrizada.

Lemma 4.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização. Seja $e_1, e_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ um referencial da primeira forma fundamental I de ϕ. Então, para todo campo de vetores $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} &\langle D_\xi(D_{e_1}\phi), D_{e_1}\phi\rangle = 0, \\ &\langle D_\xi(D_{e_2}\phi), D_{e_2}\phi\rangle = 0 \text{ e} \\ &\langle D_\xi(D_{e_1}\phi), D_{e_2}\phi\rangle = -\langle D_\xi(D_{e_2}\phi), D_{e_1}\phi\rangle, \end{aligned} \tag{8}$$

Prova: Por definição, para cada $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\langle D_{e_i}\phi, D_{e_j}\phi\rangle = \delta_{ij}.$$

Derivando essa relação obtemos, para todo campo de vetores $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^2$,

$$\langle D_\xi(D_{e_i}\phi), D_{e_j}\phi\rangle + \langle D_{e_i}\phi, D_\xi(D_{e_j}\phi)\rangle = 0,$$

o que prova o resultado. □

Lema 4.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização. Seja $e_1, e_2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ um referencial da sua primeira forma fundamental I. Denotamos ω a forma de conexão desse referencial. Então, para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\omega(x)(\xi) = -\langle D_\xi D_{e_1}\phi, D_{e_2}\phi\rangle. \tag{9}$$

Prova: Definimos a 1-forma $\alpha : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(x)(\xi) := \langle D_\xi D_{e_1}\phi, D_{e_2}\phi\rangle.$$

Observamos que, por (8), para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(x)(\xi) = -\langle D_\xi D_{e_2}\phi, D_{e_1}\phi\rangle.$$

Queremos mostrar que $\omega = -\alpha$. Utilizando (8) novamente, obtemos

$$\begin{aligned}\omega(\xi) &= \mathrm{I}([e_1, e_2], \xi)\\ &= \langle D_{[e_1,e_2]}\phi, D_\xi\phi\rangle\\ &= \langle \xi, e_1\rangle\langle D_{e_1}D_{e_2}\phi, D_{e_1}\phi\rangle + \langle \xi, e_2\rangle\langle D_{e_1}D_{e_2}\phi, D_{e_2}\phi\rangle\\ &\qquad - \langle \xi, e_1\rangle\langle D_{e_2}D_{e_1}\phi, D_{e_1}\phi\rangle - \langle \xi, e_2\rangle\langle D_{e_2}D_{e_1}\phi, D_{e_2}\phi\rangle\\ &= -\langle \xi, e_1\rangle\alpha(e_1) - \langle \xi, e_2\rangle\alpha(e_2)\\ &= -\alpha(\xi),\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Lema 4.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização. Denotamos respectivamente I, N, II a sua primeira forma fundamental, o seu campo normal unitário e a sua segunda forma fundamental. Seja e_1, e_2 um referencial de I e denotamos ω a sua forma de conexão. Então, para todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}D_\xi(D\phi\cdot e_1) &= -\omega(\xi)(D\phi\cdot e_2) - II(e_1, \xi)N, \text{ e}\\ D_\xi(D\phi\cdot e_2) &= \omega(\xi)(D\phi\cdot e_1) - II(e_2, \xi)N.\end{aligned} \tag{10}$$

Observação: Vemos então que a forma de conexão pode ser vista como o componente tangencial da derivada da imagem do referencial na superfície parametrizada.

Prova: Como $D\phi\cdot e_1$, $D\phi\cdot e_2$ e N forma em todo ponto um referencial ortonormalizado de $\mathbb{R}^2$, utilizando (8) e (9), obtemos

$$\begin{aligned}D_\xi D\phi\cdot e_1 &= \langle D_\xi(D\phi\cdot e_1), D\phi\cdot e_1\rangle(D\phi\cdot e_1)\\ &\qquad + \langle D_\xi(D\phi\cdot e_1), D\phi\cdot e_2\rangle(D\phi\cdot e_2)\\ &\qquad\qquad + \langle D_\xi(D\phi\cdot e_1), N\rangle N\\ &= -\omega(\xi)(D\phi\cdot e_2) - \langle D\phi\cdot e_1, DN\cdot\xi\rangle N\\ &= -\omega(\xi)(D\phi\cdot e_2) - \mathrm{II}(e_1, \xi)N,\end{aligned}$$

como desejado. A derivação da segunda relação é idêntica, e isso completa a prova. $\square$

Teorema 4.4, Teorema Egregium, Gauss, 1827

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização e denotamos κ a curvatura da sua primeira forma fundamental. Então,

$$\kappa = Det(A),$$

onde A é o operador de Weingarten de ϕ.

Prova: Seja e_1, e_2 um referencial de I. Denotamos ω sua forma de conexão. Utilizando (8) e (10), obtemos

$$\begin{aligned}\langle D_{e_1} D_{e_2} D\phi \cdot e_2, D\phi \cdot e_1 \rangle &= \langle D_{e_1}(\omega(e_2)(D\phi \cdot e_1) - \mathrm{II}(e_2, e_2)N), D\phi \cdot e_1 \rangle \\ &= (D_{e_1}\omega(e_2)) + \omega(e_2)\langle D_{e_1}(D\phi \cdot e_1), D\phi \cdot e_1 \rangle \\ &\qquad - (D_{e_1}\mathrm{II}(e_2, e_2))\langle N, D\phi \cdot e_1 \rangle - \mathrm{II}(e_2, e_2)\langle DN \cdot e_1, D\phi \cdot e_1 \rangle \\ &= (D_{e_1}\omega(e_2)) - \mathrm{II}(e_2, e_2)\mathrm{II}(e_1, e_1).\end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos

$$\langle D_{e_2} D_{e_1} D\phi \cdot e_2, D\phi \cdot e_1 \rangle = (D_{e_2}\omega(e_1)) - \mathrm{II}(e_1, e_2)\mathrm{II}(e_1, e_2).$$

Segue por (5) que

$$\begin{aligned}d\omega(e_1, e_2) &= (D_{e_1}\omega(e_2)) - (D_{e_2}\omega(e_1)) - \omega([e_1, e_2]) \\ &= \langle D_{e_1} D_{e_2}(D\phi \cdot e_2), D\phi \cdot e_1 \rangle + \mathrm{II}(e_1, e_1)\mathrm{II}(e_2, e_2) \\ &\qquad - \langle D_{e_2} D_{e_1}(D\phi \cdot e_2), D\phi \cdot e_1 \rangle - \mathrm{II}(e_1, e_2)\mathrm{II}(e_1, e_2) \\ &\qquad\qquad - \langle D_{[e_1, e_2]}(D\phi \cdot e_2), D\phi \cdot e_1 \rangle \\ &= \mathrm{II}(e_1, e_1)\mathrm{II}(e_2, e_2) - \mathrm{II}(e_1, e_2)\mathrm{II}(e_1, e_2) \\ &= \mathrm{Det}(A),\end{aligned}$$

como desejado. $\square$