1 - Derivação de funções.

Definição 1.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *aberto. Dado um campo de vetores* $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ *e uma função suave* $f : U \to \mathbb{R}$, *a* **derivada** *de* f *na direção de* ξ *é a função* $D_\xi f : U \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$D_\xi f := \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{1}$$

Exercício*: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Mostre que a aplicação

$$D : C^\infty(U, \mathbb{R}^m) \oplus C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}); (\xi, f) \mapsto D_\xi f. \tag{2}$$

é bilinear.

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Mostre que, para todo $f, g \in C^\infty(U)$,

$$D_\xi(fg) = (D_\xi f)g + f(D_\xi g). \tag{3}$$

Essa identidade é chamada a **regra de Cauchy**.

Em particular, D define uma aplicação linear $D : \xi \mapsto D_\xi$ de $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ em $\mathcal{L} := \mathrm{Lin}(C^\infty(U, \mathbb{R}), C^\infty(U, \mathbb{R}))$.

Exercício***: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Mostre que $D_\xi f = 0$ para todo f se e somente se $\xi = 0$. Em outros termos, a aplicação linear de $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ em $\mathcal{L}$ definida por D é injetiva.

Exercício***: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $L \in \mathcal{L}$ um operador diferencial linear que satisfaz a regra de Cauchy (3). Mostre que existe um campo de vetores ξ tal que, para todo f,

$$D_\xi f = Lf.$$

Isso significa, em particular, que todo operador diferencial linear que satisfaz à regra de Cauchy é um operador de ordem 1.

Esses exercícios mostram que D define um isomorfismo linear de $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ no espaço de operadores diferenciais lineares que satisfazem a regra de Cauchy. É precisamente por esse motivo que os geômetros costumam identificar campos de vetores com operadores diferenciais lineares de primeira ordem. Em particular, os elementos da base canônica $e_1, ..., e_m$ são identificados respectivamente com os operadores $\partial_1, ..., \partial_m$. Desta maneira, todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ se escreve da forma

$$\xi(x) = \xi^i(x)\partial_i.$$

Em particular, para todo f

$$D_\xi f = \xi^i \partial_i f,$$

o que mostra o valor intuitivo dessa notação.

Exercício***: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Para $f \in C^\infty(M)$, seja $M_f \in \mathcal{L}$ o operador de multiplicação por f. Isto é, para todo $g \in C^\infty(M)$,

$$M_f g := fg.$$

Lembre que o **comutador** de duas aplicações lineares A e B é a aplicação linear $[A, B]$ definida por

$$[A, B] := AB - BA.$$

Definimos $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{L}$ por

$$\mathcal{D}_0 := \{M_f \mid f \in C^\infty(U)\}.$$

Mostre que $\mathcal{M}_0$ é um subespaço linear de $\mathcal{L}$. Mostre que

$$\mathcal{D}_0 = \{L \in \mathcal{L} \mid [L, M_f] = 0 \ \forall f \in C^\infty(U)\}.$$

Denotamos

$$\mathcal{D}_1 := \{L \in \mathcal{L} \mid [L, M_f] \in \mathcal{D}_0 \ \forall f \in C^\infty(U)\}.$$

Mostre que $\mathcal{M}_1$ também é um subespaço linear de $\mathcal{L}$. Mostre que $\mathcal{M}_1$ é o espaço de todos os operadores lineares de primeiro ordem $L : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$. Para todo $k \geq 1$, definimos recursivamente

$$\mathcal{D}_{k+1} := \{L \in \mathcal{L} \mid [L, M_f] \in \mathcal{D}_k \ \forall f \in C^\infty(U)\}.$$

Mostre que, para todo k, $\mathcal{M}_k$ é o espaço de todos os operadores diferenciais lineares de ordem k de $C^\infty(U)$ em $C^\infty(U)$.

Estudamos agora como a operação de derivação de uma função na direção de um campo de vetores se transforma com respeito às reparametrizações.

Lema 1.2

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja $\xi : V \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Seja $f : V \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo. Então

$$D_{\tau^*\xi}(\tau^* f) = \tau^*(D_\xi f).$$

Prova: Seja $x \in U$. Denotamos $y := \tau(x)$. Utilizando a regra de cadeia, temos

$$\begin{aligned}
(D_{\tau^*\xi}\tau^* f)(x) &= (\tau^*\xi)^i(x)\frac{\partial(\tau^* f)}{\partial x_i}(x) \\
&= (D\tau(x)^{-1}\xi(y))^i \frac{\partial \tau^j}{\partial x_i}(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \\
&= (D\tau(x)^{-1})^i_k \xi(y)^k (D\tau(x))^j_i \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \\
&= \xi(y)^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \\
&= (D_\xi f)(y) \\
&= (\tau^*(D_\xi f))(x),
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Definição 1.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Uma **1-forma** *sobre U é uma função $\alpha : U \to Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.*

Definição 1.4

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Dado uma 1-forma $\alpha : V \to Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e um difeomorfismo $\tau : U \to V$, definimos o **pull-back** *de α por τ tal que, para todo $x \in U$,*

$$(\tau^* \alpha)(x) := \alpha(y) \circ D\tau(x),$$

onde $y := \tau(x)$.

Exercício**: Seja $\partial_1, ..., \partial_m$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Seja $dx^1, ..., dx^m$ a sua base dual em $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Isto é, para todo $i, j \in \{1, ..., m\}$,

$$dx^i(\partial_j) = \delta^i_j.$$

Para todo aberto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e para toda função $f : U \to \mathbb{R}^m$, definimos a 1-forma $df : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ tal que, para todo $x \in U$,

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx^i.$$

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo. Mostre que, para toda $f \in C^\infty(V)$,

$$d(\tau^* f) = \tau^*(df).$$

onde, no lado direto, utilizamos a regra de pull-back para 1-formas.

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Dado um campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ e uma 1-forma $\alpha : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, definimos a função $\alpha(\xi) : U \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(\xi)(x) := \alpha(x)(\xi(x)).$$

Mostre que, para todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ e para toda função $f : U \to \mathbb{R}$,

$$df(\xi) = D_\xi f.$$

2 - Derivação de campos de vetores. Agora estudamos como derivar campos de vetores de maneira invariante. Veremos que isso não é tão simples como no caso de funções. Antes de começar, temos que entender melhor a natureza sutil da dificuldade que encontramos. Por isso, olhamos primeiro as propriedades das operações de pull-back que já foram introduzidas até o presente momento. Vemos que em todos os caso, dado um objeto ξ, um difeomorfismo τ, e um ponto x do domínio de τ,

(1) $(\tau^*\xi)(x)$ apenas depende de $D\tau(x)$ e de $\xi(\tau(x))$, e

(2) $(\tau^*\xi)(x)$ é uma função linear de $\xi(\tau(x))$.

Consideramos agora o conceito ingênuo de derivação para campos de vetores.

Definição 2.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Dados dois campos de vetores $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$, a **derivada** *de ν na direção de ξ é o campo de vetores $D_\xi \nu : U \to \mathbb{R}^m$ definido por*

$$(D_\xi \nu)^i := \xi^j \frac{\partial \nu^i}{\partial x_j}. \tag{4}$$

Lema 2.2

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo. Então, para todo $x \in U$,

$$(D_{\tau^*\xi} \tau^* \nu)(x) = (\tau^*(D_\xi \nu))(x) - (D\tau(x)^{-1} \circ D^2\tau(x))((\tau^*\xi)(x), (\tau^*\nu)(x)). \tag{5}$$

Prova: Seja $x \in U$. Denotamos $y := \tau(x)$. Utilizando a regra de cadeia, temos

$$\begin{aligned}
(D_{\tau^*\xi} \tau^* \nu)^i(x) &= (\tau^*\xi)^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau^*\nu)^i(x) \\
&= (D\tau(x)^{-1})^j_m \xi^m(y) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (D\tau^{-1})^i_n (\nu^n \circ \tau) \right)(x) \\
&= (D\tau(x)^{-1})^j_m \xi^m(y) (D\tau(x)^{-1})^i_n D\tau(x)^k_j \frac{\partial \nu^n}{\partial x_k}(y) \\
&\quad - (D\tau(x)^{-1})^j_m \xi^m(y) (D\tau(x)^{-1})^i_p (D^2\tau(x))^p_{qj} (D\tau(x)^{-1})^q_n (\nu^n \circ \tau)(x) \\
&= (D\tau(x)^{-1})^i_j ((D_\xi \nu)^j \circ \tau)(x) \\
&\quad - (D\tau(x)^{-1})^i_m D^2\tau(x)^m_{pq} ((\tau^*\xi)^p(x), (\tau^*\nu)^q(x)),
\end{aligned}$$

como desejado. □

Esse lema mostra que a transformação com respeito a reparametrizações da derivada para campos de vetores definida em (4) não pode ser escrita em termos de nenhuma regra de pull-back que satisfaz as propriedades (1) e (2) listadas acima. De fato, como (5) depende da segunda derivada de τ, essa transformação não pode satisfazer a (1), e como essa fórmula não é linear em $D_\tau \nu$, ela também não pode satisfazer a (2). Por isso, é necessário estudar conceitos mais sutis de derivação para campos de vetores.

Definição 2.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Dados dois campos de vetores $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$, a **derivada de Lie** *de ν com respeito a ξ é o campo de vetores $\mathcal{L}_\xi \nu : U \to \mathbb{R}^m$ definido por*

$$\mathcal{L}_\xi \nu := \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t^* \nu \bigg|_{t=0},$$

onde Φ_t é o fluxo de ξ.

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Seja Φ o fluxo de ξ. Seja Ω o domínio máximo de Φ. Mostre que, para todo $x \in U$, e para todo $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $(x, s), (x, t), (x, s + t) \in \Omega$,

$$\Phi(\Phi(x, s), t) = \Phi(x, s + t).$$

Isto é

$$(\Phi_t \circ \Phi_s)(x) = \Phi_{s+t}(x).$$

Segue desse exercício que $\mathcal{L}_\xi \nu$ é bem definido em todo ponto. De fato, seja $x \in U$ e sejam $r, \epsilon > 0$ tais que $B_r(x) \times] - \epsilon, \epsilon[\subseteq \Omega$. Então, para todo $y \in B_r(x)$ e para todo $t \in] - \epsilon, \epsilon[$,

$$(\Phi_{-t} \circ \Phi_t)(y) = y.$$

Isto é, para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, a restrição de Φ_t à $B_r(x)$ é um difeomorfismo sobre sua imagen, com inversa Φ_{-t}. Em particular, para todo $t \in] - \epsilon, \epsilon[$, $\Phi_t^* \nu$ é bem definido sobre $B_r(x)$, e a derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi \nu$ também é bem definida.

Definição 2.4

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Dados dois campos de vetores $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$, o **colchete de Lie** *de (ξ, ν) é o campo de vetores $[\xi, \nu] : U \to \mathbb{R}^m$ definido por*

$$[\xi, \nu]^i := D_\xi \nu^i - D_\nu \xi^i = \xi^j \frac{\partial \nu^i}{\partial x_j} - \nu^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}. \tag{6}$$

Exercício*: Mostre que $\mathcal{L}_\xi \nu$ et $[\xi, \nu]$ definem aplicações bilineares do espaço $C^\infty(U, \mathbb{R}^m) \oplus C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ em $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$.

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Sejam $\xi, \nu, \mu : U \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Mostre que

$$[\xi, \nu] = -[\nu, \xi], \tag{7}$$

e que

$$[\xi, [\nu, \mu]] + [\nu, [\mu, \xi]] + [\mu, [\xi, \nu]] = 0. \tag{8}$$

Chamamos (8) a **relação de Jacobi**. Esse exercício mostra que o colchete de Lie define uma estrutura de álgebra de Lie sobre o espaço $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$.

Exercício*: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Sejam $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ campos de vectores. Mostre que, para toda função $f : U \to \mathbb{R}$,

$$D_{[\xi,\nu]} f = D_\xi(D_\nu f) - D_\nu(D_\xi f) = [D_\xi, D_\nu] f.$$

Isto é, em termos abstratos

$$D_{[\xi,\nu]} = [D_\xi, D_\nu].$$

Esse exercício mostra que a operação $\xi \mapsto D_\xi$ define um homeomorfismo de álgebras de Lie de $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ em $\mathcal{L}$.

Lema 2.5

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Sejam $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Então

$$\mathcal{L}_\xi \nu = [\xi, \nu].$$

Em particular, $\mathcal{L}_\xi \nu$ é antissimétrico em ξ e ν. Isto é

$$\mathcal{L}_\xi \nu + \mathcal{L}_\nu \xi = 0.$$

Prova: Seja Φ o fluxo de ξ. Seja Ω o seu domínio máximo. Seja $x \in U$. Sejam $r > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que $B_r(x) \times]-\epsilon, \epsilon[\subseteq \Omega$. Então, para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$(\Phi_t^* \nu)(x) = (D\Phi_t(x)^{-1})\nu(\Phi_t(x)).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi \nu)^i(x) &= \frac{\partial}{\partial t}(D\Phi_t(x)^{-1})^i_j \nu^j(\Phi_t(x))\bigg|_{t=0} \\
&= (D\Phi_0(x)^{-1})^i_j \frac{\partial \nu^j}{\partial x_m}(\Phi_t(x)) \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(x)^m \bigg|_{t=0} \\
&\quad - (D\Phi_0(x)^{-1})^i_m \frac{\partial}{\partial t} D\Phi_t(x)^m_n \bigg|_{t=0} (D\Phi_0(x)^{-1})^n_j \nu^j(\Phi_0(x)).
\end{aligned}$$

Como $\Phi_0, D\Phi_0 = \mathrm{Id}$, segue que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi \nu)^i(x) &= \frac{\partial \nu^j}{\partial x_m}(x) \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(x)^m \bigg|_{t=0} - \frac{\partial}{\partial t} D\Phi_t(x)^i_j \bigg|_{t=0} \nu^j(x) \\
&= \xi^j(x) \frac{\partial \nu^i}{\partial x_j}(x) - \nu^j(x) \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}(x) \\
&= [\xi, \nu](x),
\end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

Mostramos agora que a derivada de Lie é invariante por difeomorfismo.

Lema 2.6

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo. Então

$$\tau^*([\xi, \nu]) = [\tau^* \xi, \tau^* \nu].$$

Isto é, em termos da derivada de Lie

$$\tau^*(\mathcal{L}_\xi \nu) = \mathcal{L}_{\tau^* \xi} \tau^* \nu.$$

Prova: Provamos esse resultado de três maneiras diferentes.

Primeira prova: Seja $x \in U$. Por (5),

$$\begin{aligned}
[\tau^*\xi, \tau^*\nu](x) &= (D_{\tau^*\xi}\tau^*\nu)(x) - (D_{\tau^*\nu}\tau^*\xi)(x) \\
&= (\tau^*(D_\xi\nu))(x) - D\tau(x)^{-1}D^2\tau(x)((\tau^*\xi)(x), (\tau^*\nu)(x)) \\
&\quad - (\tau^*(D_\nu\xi))(x) - D\tau(x)^{-1}D^2\tau(x)((\tau^*\xi)(x), (\tau^*\nu)(x)) \\
&= (\tau^*(D_\xi\nu - D_\nu\xi))(x) \\
&= (\tau^*[\xi, \nu])(x),
\end{aligned}$$

como desejado.

Segunda prova: Para todo $f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
D_{\tau^*[\xi,\nu]}\tau^* f &= \tau^* D_{[\xi,\nu]} f \\
&= \tau^*(D_\xi D_\nu f - D_\nu D_\xi f) \\
&= D_{\tau^*\xi}\tau^*(D_\nu f) - D_{\tau^*\nu}\tau^*(D_\xi f) \\
&= D_{\tau^*\xi}(D_{\tau^*\nu}\tau^* f) - D_{\tau^*\nu}(D_{\tau^*\xi}\tau^* f) \\
&= D_{[\tau^*\xi, \tau^*\nu]}\tau^* f.
\end{aligned}$$

Segue por unicidade que

$$\tau^*[\xi, \nu] = [\tau^*\xi, \tau^*\nu],$$

como desejado.

Terceira prova: Sejam Φ e Ψ os fluxos de $\tau^*\xi$ e de ξ respectivamente. Seja $x \in U$, e sejam $r, \epsilon > 0$ tais que $B_\epsilon(x) \times]-\epsilon, \epsilon[$ esteja contido no domínio máximo de Φ. Lembramos que $\tau(B_\epsilon(x)) \times]-\epsilon, \epsilon[$ está contido no domínio máximo de Ψ e que, para todo $y \in B_r(x)$ e para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$(\tau \circ \Phi_t)(y) = (\Psi_t \circ \tau)(y).$$

Segue que, para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$\begin{aligned}
& ((\tau \circ \Phi_t)^*\nu)(x) = ((\Psi_t \circ \tau)^*\nu)(x) \\
\Rightarrow \quad & (\Phi_t^*(\tau^*\nu))(x) = (\tau^*(\Psi_t^*\nu))(x).
\end{aligned}$$

Derivando em $t = 0$, temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\tau^*\xi}\tau^*\nu)(x) &= \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_t^*(\tau^*\nu))(x)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\tau^*(\Psi_t^*\nu))(x)\bigg|_{t=0} \\
&= \tau^* \frac{\partial}{\partial t}(\Psi_t^*\nu)\bigg|_{t=0}(x) \\
&= (\tau^*\mathcal{L}_\xi\nu)(x),
\end{aligned}$$

como desejado. □

Essas três maneiras diferentes de provar o Lema 2.6 refletem as três maneiras diferentes de entender os conceitos do colchete de Lie e da derivada de Lie. A primeira maneira concebe o colchete de Lie $[\xi, \nu]$ como a componente antisimétrica da derivada $D_\xi \nu$. A segunda o concebe como o comutator dos operadores lineares D_ξ e D_ν. Enfim, a terceira concebe a derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi \nu$ como a derivada de ν com respeito ao fluxo do campo ξ. Em geral, na matemática, o fato de um conceito poder ser interpretado de diversas maneiras diferentes é usualmente prova de que ele tem um papel fundamental na teoria que está sendo estudada.

Exercício**: Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ abertos. Seja $\phi : U \to V$ uma imersão. Sejam $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^{m+n}$ campos de vetores tais que $\phi^*\xi$ e $\phi^*\nu$ existem. Mostre que $\tau^*[\xi, \nu]$ também existe e que

$$\phi^*[\xi, \nu] = [\phi^*\xi, \phi^*\nu].$$

Exercício**: Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Seja $\phi : U \to V$ uma submersão. Sejam $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ campos de vetores tais que $\phi_*\xi$ e $\phi_*\nu$ existem. Mostre que $\phi_*[\xi, \nu]$ também existe, e que

$$\phi_*[\xi, \nu] = [\phi_*\xi, \phi_*\nu].$$

Enfim, a identificação da derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi \nu$ com o comutator de $[\xi, \nu]$ é reforçada pelos seguintes resultados.

Lema 2.7

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Sejam $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Denotamos Φ o fluxo de ξ. Para todo $t \in \mathbb{R}$, denotamos U_t o domínio máximo de Φ_t. Então

$$\mathcal{L}_\xi \nu = 0$$

se e somente se, para todo t,

$$\Phi_t^* \nu = \nu|_{U_t}.$$

Prova: Supomos que $[\xi, \nu] = 0$. Seja Ω o domínio máximo de Φ. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $x \in U_t$. Isto é $(x, t) \in \Omega$. Como Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \times [0, t] \subseteq \Omega$. Para $0 \leq \tau_0 \leq t$, em $B_r(x)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_\tau^* \xi \bigg|_{\tau=\tau_0} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_{\tau+\tau_0}^* \xi \bigg|_{\tau=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau} (\Phi_\tau \circ \Phi_{\tau_0})^* \xi \bigg|_{\tau=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_{\tau_0}^* \Phi_\tau^* \xi \bigg|_{\tau=0} \\
&= \Phi_{\tau_0}^* \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_\tau^* \xi \bigg|_{\tau=0} \\
&= \Phi_{\tau_0}^* \mathcal{L}_\nu \xi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue que,

$$(\Phi_t^* \nu)(x) = (\Phi_0^* \nu)(x) = \nu(x),$$

como desejado. Como a recíproca segue trivialmente da definição da derivada de Lie, isso completa a prova. □

Lema 2.8

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Sejam $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Sejam Φ^ξ e Φ^ν os seus respectivos fluxos. Se $[\xi, \nu] = 0$ então, para todo subconjunto compacto K de U, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in K$ e para todo $s, t \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$(\Phi_s^\nu \circ \Phi_t^\xi)(x) = (\Phi_t^\xi \circ \Phi_s^\nu)(x). \tag{9}$$

Reciprocamente, para todo $x \in U$, se existem $r > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que, para todo $y \in B_r(x)$ e para todo $|s|, |t|$, os dois lados de (9) existem e são iguais, então

$$[\xi, \nu](x) = 0.$$

Observação: Em outros termos, os campos de vetores ξ e ν comutam se e somente se os seus respectivos fluxos Φ^ξ e Φ^ν comutam.

Prova: Supomos que $[\xi, \nu] = 0$. Sejam Ω^ξ e Ω^ν os domínios máximos de Φ^ξ e de Φ^ν respectivamente. Seja K um subconjunto compacto de U. Sejam $r_1, \epsilon_1 > 0$ tais que, para todo $x \in K$, $B_{r_1}(x) \times]-\epsilon_1, \epsilon_1[\subseteq \Omega^\xi$. Seja $\epsilon < \epsilon_1$ tal que, para todo $x \in K$, $\{x\} \times]-\epsilon, \epsilon[\subseteq \Omega^\nu$ e que, para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\Phi^\nu(x, t) \in B_r(x)$.

Seja $x \in K$. Denotamos $\tilde{U} := B_{r_1}(x)$. Seja $\tilde{\Omega}^\nu$ o domínio máximo do fluxo da restrição de ν a $\tilde{U}$. Por construção, $\{x\} \times]-\epsilon, \epsilon[\subseteq \tilde{\Omega}^\nu$. Sejam $s, t \in]-\epsilon, \epsilon[$. Observamos que Φ_t é definido sobre $\tilde{U} := B_{r_1}(x)$ e sua restrição a essa bola é um difeomorfismo sobre sua imagem, com inverso Φ_{-t}. Denotamos então $\tilde{V} := \Phi_t(\tilde{U})$ e $\tau := \Phi_t$. Pelo Lema 2.7, $\tau^* \nu = \nu$. Segue que $\{\tau(x)\} \times]-\epsilon, \epsilon[$ também está contido no domínio máximo da restrição de ν a $\tilde{V}$ e que, para todo $s \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$(\Phi_s^\nu \circ \tau)(x) = (\tau \circ \Phi_s^\nu)(x).$$

Substituindo $\tau := \Phi_t^\xi$, obtemos

$$(\Phi_s^\nu \circ \Phi_t^\xi)(x) = (\Phi_t^\xi \circ \Phi_s^\nu)(x),$$

como desejado.

Seja $x \in U$. Para s, t suficientemente pequenos, $(\Phi_s^\nu \circ \Phi_t^\xi)(x)$ é bem definida. Derivando primeiro com respeito a s e logo com respeito a t, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (\Phi_s^\nu \circ \Phi_t^\xi)(x)^i \bigg|_{s=t=0} = \frac{\partial}{\partial t} (\nu^i \circ \Phi_t^\xi)(x) \bigg|_{t=0} = \frac{\partial \nu^i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t^\xi(x)^j \bigg|_{t=0} = \xi^j(x) \frac{\partial \nu^i}{\partial x_j}(x). \tag{10}$$

Supomos agora que, para todo s, t suficientemente pequenos,

$$(\Phi_s^\nu \circ \Phi_t^\xi)(x) = (\Phi_t^\xi \circ \Phi_s^\nu)(x).$$

Aplicando (10) aos dois lados, obtemos

$$\xi^j(x) \frac{\partial \nu^i}{\partial x_j}(x) = \nu^j(x) \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}(x).$$

Segue então que $[\xi, \nu](x) = 0$, como desejado. □