1 - O operador de Weingarten.

Definição 1.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos I e II a sua primeira e a sua segunda forma fundamental, respectivamente. O **operador de Weingarten** *de ϕ é a função $A : U \to End(\mathbb{R}^m)$ definido tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,*

$$I(x)(A(x)\xi, \nu) = II(x)(\xi, \nu).$$

Isto é, para todo x, $A(x)$ é a matriz de $II(x)$ com respeito a $I(x)$.

Observação: Como $\mathrm{I}(x)$ é em todo ponto não degenerada, $A(x)$ é sempre bem definida. Além do mais, como $\mathrm{II}(x)$ é em todo ponto simétrica, $A(x)$ é também simétrica com respeito a $\mathrm{I}(x)$ para todo x. Isto é, para todo $x \in U$, se $e_1, ..., e_m$ é uma base orthonormalizada de $\mathrm{I}(x)$ e se

$$A_{ij}(x) := \mathrm{I}(x)(A(x)e_i, j)$$

são os componentes de $A(x)$ com respeito a essa base, então

$$A_{ij}(x) = A_{ji}(x).$$

Começamos como sempre com o estudo da lei de transformação com respeito a reparametrizações que é satisfeita pelo operator de Weingarten.

Definição 1.2

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Um **campo de endomorfismos** *sobre U é uma função $A : U \to End(\mathbb{R}^m)$.*

Definição 1.3

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo. Seja $A : V \to End(\mathbb{R}^m)$ um campo de endomorfismos. O **pull-back** *de A por τ é o campo de endomorfismos $\tau^* A : U \to End(\mathbb{R}^m)$ definido tal que, para todo $x \in U$,*

$$(\tau^* A)(x) = Df(x)^{-1} A(y) Df(x),$$

onde $y := \tau(x)$.

Exercício:* Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ a identidade. Isto é, para todo $x \in U$,

$$\phi(x) = x.$$

Mostre que, para todo campo de endomorfismos $A : U \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$,

$$\phi^* A = A.$$

Exercício:** Sejam $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\phi : U \to V$ e $\psi : V \to W$ difeomorfismos. Mostre que, para todo campo de endomorfismos $A : W \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$,

$$(\psi \circ \phi)^* A = \phi^*(\psi^* A).$$

Esses exercícios mostram que a operação de pull-back para campos de endomorfismos é um functor contravariante. Formalmente, esse functor é chamado a **regra de pull-back para tensores de tipo** $(1, 1)$. Em particular, um campo de endomorfismos é um tensor de tipo $(1, 1)$.

Lema 1.4

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^{m+1}$ parametrizações. Denotamos $A^\phi : U \to End(\mathbb{R}^m)$ e $A^\psi : V \to End(\mathbb{R}^m)$ os seus respectivos operadores de Weingarten. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \tau$. Então

$$A^\phi = \pm\tau^* A^\psi,$$

onde aqui τ^* é a regra de pull-back para campos de endomorfismos.

Prova: Denotamos I^ϕ a I^ψ as respectivas primeiras formas fundamentais de ϕ e de ψ. Da mesma forma, denotamos II^ϕ e II^ψ as respectivas segundas formas fundamentais dessas parametrizações. Sejam $x \in U$ e $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$ e denotamos $y := \tau(x)$. Lembramos que, enquanto I satisfaz a regra de pull-back de tensores de tipo $(0, 2)$, II também satisfaz essa regra a menos de uma troca de sinal. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^\phi(x)((\tau^*A)(x)\xi, \nu) &= (\tau^*\mathrm{I}^\psi)(x)((\tau^*A)(x)\xi, \nu)\\
&= \mathrm{I}^\psi(D\tau(x)(\tau^*A^\psi)(x)\xi, D\tau(x)\nu)\\
&= \mathrm{I}^\psi(A^\psi(y)D\tau(x)\xi, D\tau(x)\nu)\\
&= \mathrm{II}^\psi(D\tau(x)\xi, D\tau(x)\nu)\\
&= (\tau^*\mathrm{II}^\psi)(x)(\xi, \nu)\\
&= \pm\mathrm{II}^\phi(x)(\xi, \nu).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\tau^*A^\psi(x) = \pm A^\phi(x),$$

como desejado. □

Como nos casos da primeira e da segunda forma fundamental, concebemos o operador de Weingarten como um objeto definido sobre a subvariedade $X := \phi(U)$. De fato, para todo $p := \phi(x) \in X$, podemos definir o endomorfismo $\tilde{A}(p)$ de T_pX por

$$\tilde{A}(p)D\phi(x)\xi := D\phi(x)A(p)\xi.$$

Segue pelo Lema 1.4 que, para todo $p \in X$, $\tilde{A}(p)$ é bem definida a menos de uma troca de sinal independentemente da parametrização ϕ escolhida. Assim, interpretamos o operador de Weingarten como uma família de endomorfismos das fibras tangentes de X.

Exercício:** Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ uma hipersuperfície. Denotamos A o seu operador de Weingarten. Mostre que X é um subconjunto aberto de uma esfera de raio r se e somente se

$$A = \pm\frac{1}{r}\mathrm{Id}.$$

Exercício:** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ um subconjunto aberto cujo bordo $\partial\Omega$ seja uma hipersuperfície suave. Denotamos A o operador de Weingarten de $\partial\Omega$. Mostre que se Ω é convexo, então

$$A \geq 0.$$

Isto é, todos os autovalores de A são não-negativos.

Exercício:*** Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ um hipersuperfície compacta. Denotamos A o seu operador de Weingarten. Mostre que, se $A > 0$ em todo ponto, então X é o bordo de um subconjunto convexo Ω de $\mathbb{R}^{m+1}$.

2 - Curvaturas. A segunda forma fundamental contém todas as informações sobre a curvatura da hipersuperfície.

Definição 2.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos A o seu operador de Weingarten. Definimos a **curvatura média** *de ϕ por*

$$H^\phi := Tr(A),$$

e definimos a **curvatura extrínseca** *de ϕ por*

$$K^\phi := Det(A).$$

Observação: Vários autores costumam definir

$$H^\phi := \frac{1}{m}\mathrm{Tr}(A)$$

e

$$K^\phi := \sqrt{\mathrm{Det}(A)}.$$

Essas definições têm o merito de fornecer funções homogêneas de ordem 1 em A e iguais a 1 no caso de uma esfera de raio 1, que são duas propriedades desejáveis numa função de curvatura.

Exercício:** Mostre que, a menos de uma troca de sinal, a curvatura média e a curvatura extrínsica satisfazem a regra de pull-back de funções.

Esse exercício mostre que a curvatura média e a curvatura extrínseca podem ser concebidas como funções definidas sobre a hipersuperfície $X := \phi(U)$.

Exercício:** Os polinômios simétricos fundamentais $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}_0} : \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ são definidas tais que, para todo $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$,

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Id} + tA) = \sum_k \binom{m}{k} t^k \sigma_k(A).$$

Observamos que $\sigma_k = 0$ para $k > m$. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos A o operador de Weingarten de ϕ. Para todo k, definimos a **k-curvatura** de ϕ por

$$K_k(x) := \sigma_k(A(x)).$$

Mostre que, a menos de uma troca de sinal, a k-curvatura satisfaz a regra de pull-back para funções.

Esse exercício mostra que, para todo k, a k-curvatura também pode ser concebida como uma função definida sobre a hipersuperfície $X := \phi(U)$.

Exercício:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização. Denotamos $N : U \to \mathbb{S}^2$ seu campo normal unitário. Supomos que ϕ tem curvatura extrínseca constante igual a 1. Mostre que $\phi_\pm := \phi \pm N$ tem curvatura média constante igual a ± 1.

Esse exercício é um exemplo simples de transformação geométrica que envia uma classe de superfícies em uma outra.

Exercício:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ suave. Denotamos

$$X := \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$$

o gráfico de f. Denotamos $H : U \to \mathbb{R}$ a função de curvatura média de X. Isto é, para todo $x \in U$, $H(x)$ é a curvatura média de X no ponto $(x, f(x))$ com respeito ao campo normal unitário orientado para cima. Mostre que

$$H = \frac{1}{(1 + \|Df\|^2)^{3/2}}\big(- f_{xx} - f_{yy} - f_{xx}f_y^2 + 2f_xf_yf_{xy} - f_{yy}f_x^2\big).$$

Verifique que

$$H = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \|Df\|^2}}\nabla f\right).$$

Exercício:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ suave. Denotamos $K : U \to \mathbb{R}$ a função de curvatura extrínseca do gráfico de f. Mostre que

$$K = \frac{1}{(1 + \|Df\|^2)^2}\mathrm{Det}(\mathrm{Hess}(f)).$$

Exercício:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ suave. Denotamos $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ a parametrização gráfica do gráfico de f. Seja $\Omega \subseteq U$ um aberto relativamente compacto. Mostre que a área de $\phi(\Omega)$ é

$$\mathrm{Area}(\phi, \Omega) = \int_\Omega \sqrt{(1 + \|Df\|^2)}dx_1...dx_m$$

Seja $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Para todo t, denotamos ϕ_t a parametrização gráfica do gráfico de $f_t := f + t\chi$. Mostre que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Area}(\phi_t, \Omega)\bigg|_{t=0} = \int_\Omega H\chi dx_1...dx_m$$

(Dica: utilize o Teorema de Green).

Esse exercício mostra que a curvatura média se interpreta como a primeira variação da área da superfície. Dizemos que uma superfície é **mínima** quando sua curvatura média é em todo ponto igual a zero. As superfícies minimas são então as superfícies que são críticas para o funtional de área.

Exercício:** Mostre que a curvatura média se interpreta também como a primeira variação do volume de hipersuperfícies em qualquer dimensão.

Exercício:** Mostre que não existe superfície mínima compacta em $\mathbb{R}^3$.

Exercício:** Mostre que o **Toro de Clifford**

$$T := \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1/2\big\}$$

é uma superfície mínima da esfera

$$\mathbb{S}^3 := \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\big\}\,.$$

Exercício:** Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Seja $f : I \to]0, \infty[$ suave. Denotamos X a superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x. Denotamos $H : I \to \mathbb{R}$ a função de curvatura média de X. Isté é, para todo $x \in I$, $H(x)$ é a curvatura média dessa superfície com respeito ao seu campo normal unitário externo no ponto $(x, 0, f(x))$. Mostre que

$$H = \frac{1}{f(1 + f_x^2)^{3/2}}\big(- f f_{xx} + (1 + f_x^2)\big).$$

Mostre que

$$H f f_x = \frac{\partial}{\partial x}\bigg(\frac{f}{\sqrt{1 + f_x^2}}\bigg).$$

Em particular, quando H é constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}\bigg(\frac{f}{\sqrt{1 + f_x^2}} - \frac{1}{2} f^2 H\bigg) = 0.$$

Chamamos a função

$$F := \frac{f}{\sqrt{1 + f_x^2}} - \frac{1}{2} f^2 H$$

o **fluxo** da superfície X. Esso exercício mostra que, quando $f_x \neq 0$, a superfície de revolução X tem curvatura média constante igual a H se e somente se o seu fluxo F é constante.

Exercício:** Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Seja $f : I \to]0, \infty[$ suave. Mostre que a superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x é mínima se e somente se

$$f(x) = \frac{1}{A}\cosh(Ax + B),$$

onde $A > 0$ e $B \in \mathbb{R}$ são constantes.

Exercício:** Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Seja $f : I \to]0, \infty[$ suave. Denotamos $K : I \to \mathbb{R}$ a função de curvatura extrínseca da superfície de revolução X gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x. Mostre que

$$K = \frac{-f_{xx}}{f(1 + f_x^2)^2)}.$$

Mostre que

$$K f f_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1 + f_x^2}\right).$$

Também chamamos a função

$$F := \frac{1}{2}\frac{1}{(1 + f_x^2)} - \frac{1}{2}K f^2$$

o **fluxo** da superfície X. Esso exercício mostra que, quando $f f_x \neq 0$, a superfície de revolução X tem curvatura extrínseca constante igual a K se e somente se F é constante.

3 - Curvaturas principais e direções principais.

Definição 3.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Denotamos $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Seja $A : U \to$ End$(\mathbb{R}^m)$ o operador de Weingarten de ϕ. Chamamos os autovalores $\kappa_1 \leq ... \leq \kappa_m$ de A as **curvaturas principais** *de ϕ e chamamos os autovetores $v_1, ..., v_m$ de A as* **direções principais** *de ϕ.*

Observação: A curvatura média e a curvatura extrínseca de ϕ são relacionadas às curvaturas principais por

$$H = \kappa_1 + ... + \kappa_m \text{ e}$$
$$K = \kappa_1 \cdots \kappa_m.$$

Mostramos que as regras de transformao por reparametrização das curvaturas principais e das direções principais são respectivamente aquelas de funções e de campos de vetores.

Lema 3.2

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^{m+1}$ parametrizações. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \tau$. Denotamos $\kappa_1^\psi \leq ... \leq \kappa_m^\psi$ as curvaturas principais de ψ e $v_1^\psi, ..., v_m^\psi$ as correspondentes direções principais. Então, as curvaturas principais de ϕ são $\kappa_i^\phi := \pm\kappa_i^\psi \circ \tau$ e as direções principais correspondentes são

$$e_i^\phi(x) := Dt(x)^{-1} e_i^\psi(\tau(x)).$$

Prova: Denotamos A^ϕ e A^ψ os operadores de Weingarten de ϕ e de ψ respectivamente. Pelo Lema 1.4, para todo x,

$$A^\phi(x) = \pm\tau^* A^\psi(x) = \pm D\tau(x)^{-1} A^\psi(\tau(x)) D\tau(x).$$

Segue que, para todo x e para todo i,

$$\begin{aligned} A^{\phi}(x) D\tau(x)^{-1} e_i^{\psi}(\tau(x)) &= \pm D\tau(x)^{-1} A^{\psi}(\tau(x)) e_i^{\psi}(\tau(x)) \\ &= \pm(\kappa_i^{\psi} \circ \tau)(x) D\tau(x)^{-1} e_i^{\psi}(\tau(x)), \end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Como nos casos anteriores, o Lema 3.2 significa que as curvaturas principais e as direções principais podem ser concebidas como funções e campos de vetores sobre a subvariedade $X := \phi(U)$.

Exercício:** Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Seja $f : I \to]0, \infty[$ uma função suave. Seja

$$X^f := \left\{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = f(x)^2\right\}$$

a superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x. Definimos os campos

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &:= \left(1, \frac{yf'(x)}{f(x)}, \frac{zf'(x)}{f(x)}\right) \text{ e} \\ E_\theta(x, y, z) &:= (0, -z, y). \end{aligned}$$

Mostre que E_x e E_θ são tangentes a X. Mostre que E_x e E_θ são em todo ponto direções principais de X. Determine as curvaturas principais de X que correspondem a essas direções principais. As curvas integrais das direções principais são chamadas **linhas de curvatura** da superfície. Definimos

$$\begin{aligned} F_{x,t}(x, y, z) &:= \left(x + t, \frac{yf(x+t)}{f(x)}, \frac{zf(x+t)}{f(x)}\right) \text{ e} \\ F_{\theta,t}(x, y, z) &:= (x, \cos(\theta)y - \sin(\theta)z, \sin(\theta)y + \cos(\theta)z). \end{aligned}$$

Mostre que $F_{x,t}$ e $F_{\theta,t}$ são os fluxos de E_x e de E_θ, respectivamente. Determine os domínios máximos destes fluxos.