1 - O campo normal unitário.

Definição 1.1

Uma superfície em $\mathbb{R}^{2+n}$ é uma subvariedade de dimensão 2.

Uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{m+1}$ é uma subvariedade de codimensão 1.

Lema 1.2

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Existem duas funções $\pm N : U \to \mathbb{S}^m$ tais que, para todo x,

$$N(x) \perp Im(D\phi(x)), \text{ e}$$
$$\|N(x)\| = 1.$$

Chamamos N **o campo normal unitário** de ϕ. Costumamos ignorar a existência de *dois* campos normais. Essa falta de unicidade apenas se torna relevante quando estudamos a geometria global de hipersuperfícies não orientáveis (tais como a fita de Möbius).

Prova do Lema 1.2: Mostramos primeiro a unicidade a menos de troca de sinal. Sejam $N_1, N_2 : U \to \mathbb{S}^m$ tais que, para todo x e para cada i,

$$N_i(x) \perp \mathrm{Im}(D\phi(x)) \text{ e}$$
$$\|N_i(x)\| = 1.$$

Pelo teorema de posto-nulidade, para todo x,

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(D\phi(x))^\perp) = 1.$$

Segue que, para todo x,

$$N_1(x) = \langle N_1(x), N_2(x)\rangle N_2(x),$$

e

$$\langle N_1(x), N_2(x)\rangle = \pm 1.$$

Por continuidade, $\langle N_1(x), N_2(x)\rangle$ é constante, o que prova a unicidade.

Mostramos agora a existência. Seja $e_1, ..., e_m$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Definimos $\alpha : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R})$ tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\alpha(x)(\xi) := \mathrm{Det}(D\phi(x)e_1, ..., D\phi(x)e_m, \xi).$$

Como ϕ é uma imersão, para todo x, $\alpha(x) \neq 0$. Seja $\hat{N} : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ tal que, para todo x, $\hat{N}(x)$ seja o vetor dual de $\alpha(x)$. Isto é, para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\langle N(x), \xi\rangle := \alpha(x)(\xi).$$

Para todo x e para todo i,

$$\langle \hat{N}(x), D\phi(x)e_i\rangle = \alpha(x)(D\phi(x)e_i) = \mathrm{Det}(D\phi(x)e_1, ..., D\phi(x)e_m, D\phi(x)e_i) = 0.$$

Segue que

$$\hat{N}(x) \in \mathrm{Im}(D\phi(x))^{\perp},$$

e concluímos que

$$N(x) := \frac{1}{\|\hat{N}(x)\|}\hat{N}(x)$$

é a função desejada, o que mostra a existência. $\square$

Exemplo: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ uma parametrização. Lembramos que, para todo $\xi, \nu, \mu \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Det}(\xi, \nu, \mu) = \langle \xi \wedge \nu, \mu \rangle.$$

Obtemos então a seguinte fórmula para $\hat{N}(x)$ no caso de superfícies.

$$\begin{aligned}\hat{N}(x) &= D\phi(x)e_1 \wedge D\phi(x)e_2 \\ &= \left(\frac{\partial\phi^2}{\partial x_1}\frac{\partial\phi^3}{\partial x_2} - \frac{\partial\phi^3}{\partial x_1}\frac{\partial\phi^2}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi^3}{\partial x_1}\frac{\partial\phi^1}{\partial x_2} - \frac{\partial\phi^1}{\partial x_1}\frac{\partial\phi^3}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi^1}{\partial x_1}\frac{\partial\phi^2}{\partial x_2} - \frac{\partial\phi^2}{\partial x_1}\frac{\partial\phi^1}{\partial x_2}\right)(x).\end{aligned}$$

Exercício*: Seja $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ a bola unitária centrada em zero. Seja $\phi : B_1 \to \mathbb{R}^3$ a parametrização gráfica da esfera unitária. Isto é

$$\phi(x, y) := (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})^t.$$

Denotamos $N : B_1 \to \mathbb{S}^2$ o seu campo normal unitário. Mostre que

$$N(x, y) = \phi(x, y).$$

Exercício**: Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a parametrização gráfica do paraboloide. Isto é

$$\phi(x, y) := (x, y, x^2 + y^2)^t.$$

Denotamos $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ seu campo normal unitário. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\langle N(x, y), \frac{(0, 0, \lambda)^t - \phi(x, y)}{\|(0, 0, \lambda)^t - \phi(x, y)\|} \right\rangle = \langle N(x, y), (0, 0, 1)^t \rangle.$$

O ponto $(0, 0, \lambda)^t$ é chamado o **foco** do paraboloide.

Exercício**: Seja $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ a bola unitária centrada em zero. Seja $\phi : B_1 \to \mathbb{R}^3$ a parametrização gráfica do elipsoide simétrico com excentricidade a. Isto é

$$\phi(x, y) := (x, y, a^2\sqrt{x^2 + y^2})^t.$$

Denotamos $N : B_1 \to \mathbb{S}^2$ seu campo normal unitário. Determine $\lambda > 0$ tal que, para todo (x, y),

$$\left\langle N(x, y), \frac{(0, 0, \lambda)^t - \phi(x, y)}{\|(0, 0, \lambda)^t - \phi(x, y)\|} \right\rangle = \left\langle N(x, y), \frac{(0, 0, -\lambda)^t - \phi(x, y)}{\|(0, 0, -\lambda)^t - \phi(x, y)\|} \right\rangle.$$

Os pontos $(0, 0, \pm\lambda)^t$ são chamados **focos** do elipsoide.

Lema 1.3

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^{m+1}$ parametrizações. Denotamos $N^\phi : U \to \mathbb{S}^m$ a $N^\psi : V \to \mathbb{S}^m$ seus respectivos campos normais unitários. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \tau$. Então

$$N^\phi = \pm N^\psi \circ \tau.$$

Prova: Denotamos $X := \phi(U) = \psi(V)$. Seja $x \in U$ e seja $y := \tau(x)$. Então, $\|N^\psi(y)\| = 1$, e

$$N^\psi(y) \perp \mathrm{Im}(D\psi(y)) = T_{\psi(y)}X = T_{\phi(x)}X = \mathrm{Im}(D\phi(x)),$$

e o resultado segue por unicidade. □

Segue que, a menos de uma troca de sinal, a regra de transformação por reparametrização para campos normais unitários é a mesma como para funções. Em particular, podemos considerar N como uma função definida sobre $X := \phi(U) = \psi(V)$ com valores na esfera $\mathbb{S}^n$. De fato, definimos $N : X \to \mathbb{S}^m$ tal que, para todo ponto $z = \phi(x) = \psi(y)$ de X,

$$N(z) := N^\phi(x) = N^\psi(y).$$

Segue pelo Lema 1.3 que, a menos de uma troca de sinal, essa função é bem definida, independentemente da parametrização escolhida. Em particular, para todo $p \in X$,

$$N(p) \perp T_pX,$$

o que justifica o nome de campo normal unitário.

Exercício**: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ uma hipersuperfície com campo normal unitário N. Seja $e_1, ..., e_{m+1}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{m+1}$ e supomos que, para todo $x \in X$,

$$\langle N(x), e_{m+1}\rangle = 0.$$

Mostre que, para todo $x := (x', x_{m+1})^t \in X$, existe uma vizinhança U de x em X, uma hipersuperfície X' de $\mathbb{R}^m$, e $\epsilon > 0$ tais que

$$U = X' \times]x_{m+1} - \epsilon, x_{m+1} + \epsilon[.$$

2 - A segunda forma fundamental.

Definição

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos $N : U \to \mathbb{S}^m$ seu campo normal unitário. A **segunda forma fundamental** *de ϕ (com respeito a N) é a função $II : U \to Bilin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ definida tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,*

$$II(x)(\xi, \nu) := \langle D\phi(x)\xi, DN(x)\nu\rangle.$$

Observação: Uma troca de sinal de N teria por efeito a troca de sinal de II. Segue então que a segunda forma fundamental também é bem definida a menos de uma troca de sinal. Novamente, costumamos ignorar esse fato que raramente tem relevância.

Lema 2.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Denotamos $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Seja $II : U \to$ Bilin$(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ sua segunda forma fundamental. Para todo $x \in U$, $II(x)$ é simétrica. Isto é, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$II(x)(\xi, \nu) = II(x)(\nu, \xi).$$

Prova: Denotamos N o campo normal unitário de ϕ. Por definição, para todo $x \in U$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$\langle Df(x)\xi, N(x)\rangle = 0.$$

Segue pela regra do produto que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$\langle D^2 f(x)(\xi, \nu), N(x)\rangle + \langle Df(x)\xi, DN(x)\nu\rangle = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(x)(\xi, \nu) &= \langle Df(x)\xi, DN(x)\nu\rangle \\
&= -\langle D^2 f(x)(\xi, \nu), N(x)\rangle \\
&= -\langle D^2 f(x)(\nu, \xi), N(x)\rangle \\
&= \langle Df(x)\nu, DN(x)\xi\rangle \\
&= \mathrm{II}(x)(\nu, \xi),
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Lema 2.2

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\psi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ parametrizações. Denotamos $II^\phi : U \to$ Sim$(\mathbb{R}^m)$ e $II^\psi : V \to$ Sim$(\mathbb{R}^m)$ suas respectivas segundas formas fundamentais. Seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \tau$. Então, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$II^\phi(x)(\xi, \nu) = \pm II^\psi(\tau(x))(D\tau(x)\xi, D\tau(x)\nu).$$

Prova: Denotamos $N^\phi : U \to \mathbb{S}^m$ e $N^\psi : V \to \mathbb{S}^m$ os respectivos campos normais unitários de ϕ e de ψ. Seja $x \in U$ e sejam $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$. Pelo Lema 1.3 e a regra de cadeia,

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}^\phi(x)(\xi, \nu) &= \langle D\phi(x)\xi, DN^\phi(x)\nu\rangle \\
&= \pm\langle D(\psi \circ \tau)(x)\xi, D(N^\psi \circ \tau)(x)\nu\rangle \\
&= \pm\langle D\psi(\tau(x))D\tau(x)\xi, DN^\psi(\tau(x))D\tau(x)\nu\rangle \\
&= \pm\mathrm{II}^\psi(x)(D\tau(x)\xi, D\tau(x)\nu),
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Segue pelo Lema 2.2 que, a menos de uma troca de sinal, a regra de pull-back para as primeira formas fundamentais também se aplica às segundas formas fundamentais. Concluímos em particular que essa regra de pull-back tem uma relevância que vai além do estudo desses dois objetos. De fato, essa regra é chamada a **regra de pull-back para tensores de tipo** $(0,2)$. Dizemos então que tanto a métrica quanto a segunda forma fundamental são tensores de tipo $(0,2)$. A definição formal do conceito de tensor vai além do propósito deste curso. Por enquanto, é suficiente saber que um tensor de tipo $(0,2)$ é um objeto matemático cuja transformação com respeito às reparametrizações é prescrita por essa regra de pull-back. Enfim, da mesma forma que consideramos a métrica como um objeto definido sobre a subvariedade $X := f(U)$, também consideramos a segunda forma fundamental como um objeto definido sobre essa subvariedade. De fato a métrica é precisamente a restrição de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a TX, enquanto a segunda forma fundamental é a restrição a TX da Hessiana da função de distancia a X em $\mathbb{R}^{m+1}$, como veremos mais a frente.

Exercício****:** Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ uma hipersuperfície. Denotamos II a sua segunda forma fundamental. Mostre que X é um subconjunto aberto de um hiperplano afim se e somente se

$$\mathrm{II} = 0.$$

Exercício****:** Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ uma hipersuperfície. Denotamos I e II a sua primeira e a sua segunda forma fundamental, respectivamente. Mostre que X é um subconjunto aberto de uma hiperesfera de raio r se e somente se

$$r\mathrm{II} \pm \mathrm{I} = 0.$$

Exercício****:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função suave. Denotamos $X \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ seu gráfico. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ a parametrização gráfica de X. Isto é

$$\phi(x) := (x, f(x)).$$

Supomos que $0 \in U$, $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$. Mostre que

$$T_0X = \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

Seja II a segunda forma fundamental de ϕ com respeito ao campo normal unitário orientado para cima. Mostre que

$$\mathrm{II}(0) = -\mathrm{Hess}(f)(0).$$

Exercício****:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos $N : U \to \mathbb{S}^m$ o seu campo normal unitário. Denotamos I e II a sua primeira e a sua segunda forma fundamental, respectivamente. Para todo t, denotamos

$$\phi_t := \phi + tN.$$

Definimos a **terceira forma fundamental** III de ϕ tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathrm{III}(x)(\xi,\nu) := \langle DN(x)\xi, DN(x)\nu\rangle.$$

Mostre que, para todo t, as três formas fundamentais de ϕ_t são relacionadas àquelas de ϕ por

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_t &:= \mathrm{I} + 2t\mathrm{II} + t^2\mathrm{III}, \\ \mathrm{II}_t &:= \mathrm{II} + t\mathrm{III} \text{ e} \\ \mathrm{III}_t &:= \mathrm{III}. \end{aligned}$$

Exercício****:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{S}^{m+1} \subseteq \mathbb{R}^{m+2}$ uma parametrização cuja imagem é uma hipersuperfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+2}$. Mostre que existem dois campos de vetores $\pm N : U \to \mathbb{S}^{m+1}$ tais que, para todo x,

$$\begin{aligned} N(x) &\perp \mathrm{Im}(D\phi(x)), \\ N(x) &\perp \phi(x) \text{ e} \\ \|N(x)\| &= 1. \end{aligned}$$

Chamamos N o **campo de vetores normal unitário** de ϕ em $\mathbb{S}^m$. Definimos $\phi' : U \to \mathbb{S}^{m+1}$ por $\phi' := N$. Vamos estudar ϕ' como se também fosse uma parametrização. Como antes, definimos a **segunda forma fundamental** e a **terceira forma fundamental** de ϕ tal que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(x)(\xi,\nu) &:= \langle DN(x)\xi, D\phi(x)\nu\rangle \text{ e} \\ \mathrm{III}(x)(\xi\nu) &:= \langle DN(x)\xi, DN(x)\nu\rangle \end{aligned}$$

Mostre que $\mathrm{II}(x)$ é simétrica. Mostre que as três seguintes afirmações são equivalentes.

(1) ϕ' é uma imersão.

(2) II é não-degenerada.

(3) III é positiva definida.

Mostre que, no caso em que essas condições sejam satisfeitas, as três formas fundamentais de ϕ' são relacionadas àquelas de ϕ por

$$\begin{aligned} \mathrm{I}' &= \mathrm{III}, \\ \mathrm{II}' &= \mathrm{II} \text{ e} \\ \mathrm{III}' &= \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Exercício****:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função suave. Denotamos $X \subseteq U \times \mathbb{R}$ o seu gráfico. Seja $d : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a distância com sinal a X em $\mathbb{R}^{m+1}$. Isto é, para todo $x := (x', t) \in U \times \mathbb{R}$,

$$d(x) := \begin{cases} \mathrm{Inf}_{y\in X} \|x - y\| \text{ se } t \geq f(x') \text{ e} \\ -\mathrm{Inf}_{y\in X} \|x - y\| \text{ se } t < f(x'). \end{cases}$$

Denotamos $\phi : U \to U \times \mathbb{R}$ a parametrização gráfica de X. Denotamos N e II o seu campo normal unitário e a sua segunda forma fundamental, respectivamente. Mostre que, para todo $x \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $|t| < \epsilon$,

$$d(\phi(x) + tN(x)) = t.$$

Mostre que d é suave em uma vizinhança Ω de X em $U \times \mathbb{R}$. Mostre que, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in T_{\phi(x)}X$,

$$\mathrm{Hess}(d)(\phi(x))(\xi,\nu) = \mathrm{II}(\phi(x))(\xi,\nu).$$

Definição 2.3

Seja $f : I \times I' \to \mathbb{R}^3$ *uma parametrização. Dizemos que* f *é* **regrada** *quando existem funções* $a, b : I \to \mathbb{R}^3$ *tais que, para todo* $(x, y) \in I \times I'$,

$$f(x, y) = a(x) + yb(x).$$

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^3$ *uma subvariedade. Dizemos que* X *é* **regrada** *quando existe uma parametrização regrada em torno de todos os seus pontos.*

Exercício***: Seja $\phi : I \times I' \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização regrada. Denotamos II sua segunda forma fundamental. Mostre que, para todo $(x, y) \in I \times I'$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{II}(x)(\xi, e_2) = 0.$$

Exercício^S: eja $X \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície. Denotamos II sua segunda forma fundamental. Supomos que, em todo ponto, II é degenerado mas diferente de zero. Mostre que X é regrada.