1 - Distância e a primeira forma fundamental. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Sejam $x, y \in X$ dois pontos de X. A distância entre esses dois pontos é trivialmente igual a $\|x - y\|$. Entretanto, o que nos interessa é a distância entre esses dois pontos ao longo de Σ. Assim, definimos

$$d(x, y) := \operatorname*{Inf}_{\gamma} l(\gamma), \tag{1}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as curvas continuamente deriváveis por partes $\gamma : I \to X$ de x a y e, para todo γ, $l(\gamma)$ é o comprimento de γ.

Exercício****:** Seja

$$\Sigma := \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Mostre que, para todo $x, y \in \Sigma$,

$$d(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle).$$

Determine a curva que minimiza distância entre x e y, caso exista.

Exercício****:** Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Mostre que, para todo $x, y \in X$,

$$d(x, y) \geq \|x - y\|.$$

Exercício****:** Seja $f : I \to]0, \infty[$ uma função suave e positiva. Seja

$$\Sigma_f := \{(x, f(x)\mathrm{cos}(\theta), f(x)\mathrm{sen}(\theta)) \mid x \in I \text{ e } \theta \in \mathbb{R}\}$$

a superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de f em torno de eixo x. Determine a distância entre os pontos $p := (x, f(x), 0)$ e $q := (y, f(y), 0)$.

Exercício****:** Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Mostre que $d(x, y) < \infty$ para todo $x, y \in X$ se e somente se X é conexa.

Exercício****:** Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Mostre que d define uma métrica (função de distância) sobre X, isto é

(1) para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;

(2) para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, z)$; e

(3) para todo $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Mostre que a topologia de Σ definida por essa função de distância coincide com a topologia induzida de $\mathbb{R}^3$.

O estudo de todas as propriedades geométricas dessa função de distância conduz à teoria de geometria riemanniana que foge do propósito deste curso. Nos restringimos então ao estudo local dessa função. Em particular, estudamos a determinação via parametrizações dos comprimentos de curvas numa subvariedade.

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma parametrização e seja $X := f(U)$ sua imagem. Seja $\gamma : I \to U$ uma curva e seja $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$ sua imagem em X. Utilizando a regra da cadeia, obtemos a seguinte fórmula para o comprimento de $\tilde{\gamma}$.

$$\begin{aligned} l(\tilde{\gamma}) &= \int_I \left\| \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial t}(t) \right\| dt \\ &= \int_I \sqrt{\delta_{mn} \frac{\partial f^m}{\partial x_i}(\gamma(t)) \frac{\partial f^n}{\partial x_j}(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma^i}{\partial t}(t) \frac{\partial \gamma^j}{\partial t}(t)}^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_I \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma^i}{\partial t}(t) \frac{\partial \gamma^j}{\partial t}(t)}^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

onde

$$g_{ij}(x) := \delta_{mn} \frac{\partial f^m}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f^n}{\partial x_j}(x). \tag{2}$$

Chamamos g a *métrica* da parametrização. Outros autores chamam g a *primeira forma fundamental* da parametrização e denotam

$$\mathrm{I}_{ij} := g_{ij}. \tag{3}$$

A métrica da imersão é uma função suave sobre U com valores no espaço $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^m)$ de forma bilineares e simétricas sobre $\mathbb{R}^m$. Além do mais, para todo x, $g(x)$ é positiva definida. Isso motiva as seguintes definições.

Definição 1.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma métrica (riemanniana) sobre U é uma função suave $g : U \to Sim(\mathbb{R}^m)$ tal que, para todo $x \in U$, $g(x)$ seja positiva definida.

Exemplo: Observamos que a função constante $g_{ij}(x) := \delta_{ij}$ é uma métrica riemanniana sobre $\mathbb{R}^m$.

Definição 1.2

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$, seja g uma métrica sobre U, e seja $\gamma : I \to U$ uma curva. O comprimento de γ com respeito a g é definido por

$$l_g(\gamma) := \int_I \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma^i}{\partial t}(t) \frac{\partial \gamma^j}{\partial t}(t)} dt. \tag{4}$$

Exemplo: Observamos que, quando $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ é a métrica constante, o comprimento de toda curva com respeito a g coincide com o comprimento usual definido nas aulas anteriores.

Em particular, o estudo de comprimentos de curvas se tornaria mais fácil se a métrica da parametrização fosse constante. Introduzimos então a seguinte definição.

Definição 1.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma paramétrização. Dizemos que f é **isométrica** *quando $f^*\delta = \delta$.*

Veremos mais a frente que a questão de existência ou não de cartas isométricas leva ao estudo de um dos conceitos mais fundamentais da geometria moderna: a curvatura.

Seguimos estabelecendo os fundamentos da teoria. Estudamos agora a regra de transformação de métricas entre cartas diferentes.

Lemma 1.4

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos, sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^{m+n}$ parametrizações, e seja $\tau : U \to V$ um difeomorfismo tal que $\phi = \psi \circ \tau$. Se g^ϕ e g^ψ são as respectivas métricas de ϕ e ψ, então, para todo $x \in U$,

$$g^{\phi}_{ij}(x) = g^{\psi}_{mn}(y) D\tau^m_i(x) D\tau^n_j(x), \tag{5}$$

onde $y := \tau(x)$.

Prova: Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} g^{\phi}_{1,ij}(x) &= \delta_{mn} \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi \circ \tau)^m(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(\psi \circ \tau)^n(x) \\ &= \delta_{mn} \frac{\partial \psi^m}{\partial x_p}(\tau(x)) \frac{\partial \psi^n}{\partial x_q}(\tau(x)) \frac{\partial \tau^p}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \tau^q}{\partial x_j}(x) \\ &= g^{\psi}_{2,pq}(y) \frac{\partial \tau^p}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \tau^q}{\partial x_j}(x), \end{aligned}$$

como desejado. □

O Lema 1.4 motiva a seguinte regra de pull-back para métricas em geral.

Definição 1.5

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Para toda função suave $\phi : U \to V$ e para toda métrica g sobre V, o pull back de g por f é definido por

$$(\phi^* g)_{ij}(x) = g_{mn}(\phi(x)) \frac{\partial \phi^m}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \phi^n}{\partial x_j}(x). \tag{6}$$

Exemplo: Observamos que a métrica de uma paramétrização f é o pull-back $f^*\delta$ da métrica constante δ por f.

Verificamos a compatibilidade entre o conceito de pull-back para métricas e os comprimentos das curvas.

Lema 1.6

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos e seja $\phi : U \to V$ uma função suave. Para toda curva $\gamma : I \to U$ e para toda métrica g definida sobre V,

$$l_g(\phi \circ \gamma) = l_{\phi^* g}(\gamma). \tag{7}$$

Prova: Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} l_g(\phi \circ \gamma) &= \int_I \sqrt{g_{ij}(\phi \circ \gamma(t)) \frac{\partial}{\partial t}(\phi \circ \gamma)^i(t) \frac{\partial}{\partial t}(\phi \circ \gamma)^j(t)} dt \\ &= \int_I \sqrt{g_{ij}(\phi \circ \gamma(t)) \frac{\partial \phi^i}{\partial x_m}(\gamma(t)) \frac{\partial \phi^j}{\partial x_n}(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma^m}{\partial t}(t) \frac{\partial \gamma^n}{\partial t}(t)} dt \\ &= \int_I \sqrt{(\phi^* g)_{mn}(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma^m}{\partial t}(t) \frac{\partial \gamma^n}{\partial t}(t)} dt \\ &= l_{\phi^* g}(\gamma), \end{aligned}$$

como desejado. □

Exercício*: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e seja $\phi : U \to U$ a identidade. Mostre que, para toda métrica g sobre U,

$$\phi^* g = g. \tag{8}$$

Em termos abstratos, escrevemos

$$\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}. \tag{9}$$

Exercício**: Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^p$, $V \subseteq \mathbb{R}^q$ e $W \subseteq \mathbb{R}^r$ abertos e sejam $\phi : U \to V$ e $\psi : V \to W$ funções suaves. Mostre que, para toda métrica g sobre W,

$$(\psi \circ \phi)^* g = \phi^* \psi^* g. \tag{10}$$

Em termos abstratos, escrevemos

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \psi^*. \tag{11}$$

Estes dois exercícios mostram que a operação de pull-back de métricas é um functor contravariante.

Exercício**: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a parametrização estereográfica da esfera

$$f(x, y) := \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - (x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Mostre que a métrica de f é

$$g(x, y) = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \delta_{ij}.$$

Seja $\tau : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ o diffeomorfismo

$$\tau(x, y) = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Mostre que

$$\tau^* g = g.$$

Determine a simetria da esfera a qual corresponde esse difeomorfismo.

Exercício**: Seja $f : I \to]0, \infty[$ uma função positiva e seja Σ_f a superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x. Seja $F : I \times]0, 2\pi[\to \Sigma_f$ a parametrização de Σ_f definida por

$$F(x, \theta) := (x, f(x)\mathrm{cos}(\theta), f(x)\mathrm{sen}(\theta)).$$

Determine a métrica de f.

Exercício**: Seja $f :]0, 2\pi[\times] - \pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}^3$ a função definida por

$$f(\theta, \phi) := (\cos(\phi)\cos(\theta), \cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)).$$

Mostre que f é uma parametrização de uma porção da esfera unitária. Mostre que a métrica de f é

$$g = \cos^2(\phi)d\theta^2 + d\phi^2.$$

Sejam $\pi_1 :]0, 2\pi[\times] - \pi/2, \pi/2[\to]0, 2\pi[$ e $\pi_2 :]0, 2\pi[\times] - \pi/2, \pi/2[\to] - \pi/2, \pi/2[$ as projeções sobre o primeiro e o segundo fator, respectivamente. Mostre que, para toda curva $\gamma : I \to]0, 2\pi[\times] - \pi/2, \pi/2[$ e para cada i,

$$l(\pi_i \circ \gamma) \leq l_g(\gamma).$$

Determine o comprimento da curva mais curta em $]0, 2\pi[\times] - \pi/2, \pi/2[$ entre os pontos $(\pi, 0)$ e $(5\pi/4, 0)$. Mostre que esse valor também é o comprimento da curva mais curta entre os pontos $(-1, 0, 0)$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

Exercício***: Determine uma parametrização sobre $]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ cuja métrica é

$$g(x) = dr^2 + \mathrm{arcsenh}(r)d\theta^2.$$

Fechamos essa seção estudando a compatibilidade entre os conceitos de pull-back para métricas e de push-forward para campos de vetores.

Definição 1.7

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto, seja g uma métrica sobre U e sejam $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Definimos a função $g(\xi, \nu)$ sobre U por

$$g(\xi, \nu)(x) := g_{ij}(x)\xi^i(x)\nu^j(x). \tag{12}$$

Lema 1.8

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos e seja $\phi : U \to V$ um difeomorfismo. Para toda métrica g sobre V e para todo par (ξ, ν) de campos de vetores sobre U,

$$\phi^*(g(\phi_*\xi, \phi_*\nu)) = (\phi^* g)(\xi, \nu). \tag{13}$$

Prova: Seja $x \in U$ e notamos $y := \phi(x)$.

$$\begin{aligned}
\phi^*(g(\phi_*\xi, \phi_*\nu))(x) &= g(\phi_*\xi, \phi_*\nu)(y) \\
&= g_{ij}(y)(\phi_*\xi)^i(y)(\phi_*\nu)^j(y) \\
&= g_{ij}(y)\frac{\partial \phi^i}{\partial x_m}(x)\frac{\partial \phi^j}{\partial x_n}(x)\xi^m(x)\nu^n(x) \\
&= (\phi^* g)_{mn}(x)\xi^m(x)\nu^n(x) \\
&= (\phi^* g)(\xi\nu)(x),
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$