1 - Fluxos e subvariedades.

Definição 1.1

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ dois abertos e seja $f : U \to V$ um difeomorfismo. O **push-forward** *por f de um campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ é o campo de vetores $f_*\xi : V \to \mathbb{R}^m$ definido por*

$$(f_*\xi)(y) := Df(x)\xi(x), \tag{1}$$

onde $x := f^{-1}(y)$. De mesma forma, o **pull-back** *por f de um campo de vetores $\nu : V \to \mathbb{R}^m$ é o campo de vetores $f^*\nu : U \to \mathbb{R}^m$ definido por*

$$f^*\nu := (f^{-1})_*\nu. \tag{2}$$

Exercício*: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f : U \to U$ a identidade. Mostre que, para todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^m$,

$$f_*\xi = \xi.$$

Em termos abstratos

$$\mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}. \tag{3}$$

Exercício**: Sejam $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos e sejam $f : U \to V$ e $g : V \to W$ difeomorfismos. Mostre que, para todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^m$,

$$(g \circ f)_*\xi = g_*f_*\xi.$$

Em termos abstratos

$$(g \circ f)_* = g_*f_*. \tag{4}$$

Na linguagem formal, as equações (3) e (4) significam que as operações de push-forward e de pull-back são **functores**. Em particular, como

$$(f^{-1})_*f_* = (f^{-1} \circ f)_* = \mathrm{Id}_* = \mathrm{Id},$$

temos

$$(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}.$$

Enfim, observamos que

$$(g \circ f)^* = ((g \circ f)^{-1})_* = (f^{-1} \circ g^{-1})_* = (f^{-1})_*(g^{-1})_* = f^*g^*.$$

Vemos então que, enquanto a operação de push-forward preserva a ordem de uma composição, a operação de pull-back inverte essa ordem. Na linguagem formal, dizemos que a operação de push-forward é **covariante** enquanto a operação de pull-back é **contravariante**.

Os conceitos de push-forward e de pull-back se estendem a submersões e imersões. Veremos que o conceito natural para submersões é o push-forward, enquanto o conceito natural para imersões é o pull-back.

Definição 1.2

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ *e* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *abertos, seja* $\xi : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ *um campo de vetores e seja* $f : U \to V$ *uma submersão sobrejetiva. O* **push-forward** *de* ξ *por* f*, quando existe, é o único campo de vetores* $f_*\xi : V \to \mathbb{R}^m$ *que satisfaz, para todo* $x \in U$*,*

$$(f_*\xi)(y) = Df(x)\xi(x),$$

onde $y := f(x)$*.*

Exercício****:** Encontre um exemplo de uma submersão $f : U \to V$ e um campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ que não tem push-forward por f.

Exercício****:** Mostre que, quando $f_*\xi$ existe, ele é suave.

Exercício****:** Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{p+q+r}$, $V \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ e $W \subseteq \mathbb{R}^p$ abertos, sejam $f : U \to V$ e $g : V \to W$ submersões sobrejetivas e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^{p+q+r}$ um campo de vetores tal que $f_*\xi$ existe. Mostre que $g_*(f_*\xi)$ existe se e somente se $(g \circ f)_*\xi$ existe e que

$$g_*(f_*\xi) = (g \circ f)_*\xi.$$

Definição 1.3

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *e* $V \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ *abertos, seja* $f : U \to V$ *uma imersão, e seja* $\xi : V \to \mathbb{R}^{m+n}$ *um campo de vetores. O* **pull-back** *de* ξ *for* f*, quando existe, é o único campo de vetores* $f^*\xi : U \to \mathbb{R}^m$ *que satisfaz, para todo* $x \in U$*,*

$$Df(x)(f^*\xi)(x) = \xi(y),$$

onde $y := f(x)$*.*

Exercício****:** Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ abertos, seja $f : U \to V$ uma imersão, e seja $\xi : V \to \mathbb{R}^{m+n}$ um campo de vetores. Mostre que $f^*\xi$ existe se e somente se, para todo $x \in U$,

$$\xi(y) \in \mathrm{Im}(Df(x)),$$

onde $y := f(x)$.

Exercício****:** Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ abertos, seja $f : U \to V$ uma imersão e seja $\xi : V \to \mathbb{R}^{m+n}$ um campo de vetores. Mostre que se $f^*\xi$ existe, então ele é suave.

Exercício****:** Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^p$, $V \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ e $W \subseteq \mathbb{R}^{p+q+r}$ abertos, sejam $f : U \to V$ e $g : V \to W$ imersões e seja $\xi : W \to \mathbb{R}^{p+q+r}$ um campo de vetores sobre W tal que $g^*\xi$ existe. Mostre que $f^*(g^*\xi)$ existe se e somente se $(g \circ f)^*\xi$ existe e que

$$f^*(g^*\xi) = (g \circ f)_*\xi.$$

Esses exercícios mostram que as operações de push-forward e de pull-back também são funtores para imersões e submersões.

Mostramos agora o primeiro resultado principal dessa seção, que os fluxos são invariantes por difeomorfismo.

Teorema 1.4, Invariância por difeomorfismo

Para cada $i \in \{1,2\}$, seja $U_i \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto, seja $\xi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores e seja $\Phi_i : \Omega_i \to U_i$ o fluxo maximal de ξ_i. Seja $f : U_1 \to U_2$ um difeomorfismo. Então

$$\xi_2 = f_* \xi_1$$

se e somente se

$$\begin{aligned} &\Omega_2 = \hat{f}(\Omega_1) \text{ e} \\ &\Phi_1 = f^{-1} \circ \Phi_2 \circ \hat{f} \end{aligned}$$

onde $\hat{f} : U_1 \times \mathbb{R} \to U_2 \times \mathbb{R}$ é o difeomorfismo definido por

$$\hat{f}(x,t) := (f(x), t).$$

Prova: Supomos que $\xi_2 = f_* \xi_1$ e, para cada $i \in \{1,2\}$ definimos $\tilde{\Omega}_i \subseteq U_i \times \mathbb{R}$ e $\tilde{\Phi}_i : \tilde{\Omega}_i \to U_i$ por

$$\begin{aligned} &\tilde{\Omega}_1 := \hat{f}^{-1}(\Omega_2), \\ &\tilde{\Omega}_2 := \hat{f}(\Omega_1), \\ &\tilde{\Phi}_1 := f^{-1} \circ \Phi_2 \circ \hat{f} \text{ e} \\ &\tilde{\Phi}_2 := f \circ \Phi_1 \circ \hat{f}^{-1}. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\tilde{\Phi}_1$ e $\tilde{\Phi}_2$ são fluxos de ξ_1 e de ξ_2 respectivamente. Em particular, por maximalidade de Φ_1 e de Φ_2, segue que

$$\begin{aligned} &\tilde{\Omega}_1 \subseteq \Omega_1 \text{ e } \tilde{\Omega}_2 \subseteq \Omega \\ &\quad \Rightarrow \ \hat{f}^{-1}(\Omega_2) \subseteq \Omega_1 \text{ e } \hat{f}(\Omega_1) \subseteq \Omega_2 \\ &\quad \Rightarrow \ \Omega_2 = \hat{f}(\Omega_1). \end{aligned}$$

Segue então pelo Lema 1.10 da seção "Campos de vetores e fluxos" que

$$\Phi_1 = \tilde{\Phi}_1 = f^{-1} \circ \Phi_2 \circ \hat{f}.$$

Mostramos agora a afirmação. Seja $y := f(x) \in U_2$. Temos

$$\tilde{\Phi}_2(y,0) = (f \circ \Phi_1 \circ \hat{f}^{-1})(y,0) = (f \circ \Phi_1)(x,0) = f(x) = y.$$

Seja agora t tal que $(y,t) \in \tilde{\Omega}_1$. Pela regra de cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial t}(y,t) &= Df((\Phi_1 \circ \hat{f}^{-1})(y,t)) D\Phi_1(\hat{f}^{-1}(y,t)) D(\hat{f}^{-1})(y,t)\partial_t \\ &= Df((\Phi_1 \circ \hat{f}^{-1})(y,t)) D\Phi_1(\hat{f}^{-1}(y,t))\partial_t \\ &= Df((\Phi_1 \circ \hat{f}^{-1})(y,t)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(\hat{f}^{-1}(y,t)) \\ &= Df((\Phi_1 \circ \hat{f}^{-1})(y,t)) \xi_1((\Phi_1 \circ \hat{f}^{-1})(y,t)) \\ &= (f_* \xi_1)((f \circ \Phi_1 \circ \hat{f}^{-1})(y,t)) \\ &= \xi_2(\tilde{\Phi}_2(y,t)), \end{aligned}$$

o que prova a afirmação para $\tilde{\Phi}_2$. Como f^{-1} também é um difeomorfismo e $\xi_1 = (f^{-1})_* \xi_2$, a afirmação para $\tilde{\Phi}_1$ segue por simetria.

Reciprocamente, se $\Phi_1 = f^{-1} \circ \Phi_2 \circ \hat{f}$ então, para todo $x \in U_1$,

$$\begin{aligned}
\xi_2(f(x)) &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(f(x), 0) \\
&= D\Phi_2(\hat{f}(x,0))\partial_t \\
&= D\Phi_2(\hat{f}(x,0))D\hat{f}(x,0)\partial_t \\
&= D(\Phi_2 \circ \hat{f})(x,0)\partial_t \\
&= D(f \circ \Phi_1)(x,0)\partial_t \\
&= Df(\Phi_1(x,0))D\Phi_1(x,0)\partial_t \\
&= Df(x)\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(x,0) \\
&= Df(x)\xi_1(x) \\
&= (f_*\xi_1)(f(x)),
\end{aligned}$$

o que prova o teorema. □

Exercício**: Mostre os análogos do Teorema 1.4 nos casos em que f é uma submersão e f é uma imersão.

Agora estudamos a relação entre campos de vetores, fluxos e subvariedades.

Definição

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto, seja $X \subseteq U$ uma subvariedade e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Dizemos que ξ é **tangente** *a X quando, para todo $x \in X$,*

$$\xi(x) \in T_x X.$$

Verificamos primeiro que a tangencialidade também é invariante por difeomorfismo.

Lemma 1.5, Invariância por difeomorfismo

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto, seja $X \subseteq U$ uma subvariedade, e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Seja $V \subseteq \mathbb{R}^m$ um outro aberto e seja $f : U \to V$ um difeomorfismo. O campo ξ é tangente a X se e somente se o campo $f_*\xi$ é tangente a $f(X)$.

Prova: Por definição, para todo $x \in U$, $(f(x), f_*\xi(f(x))) = Tf(x, \xi(x))$. Assim, se ξ é tangente a x então, para todo $y = f(x) \in f(X)$,

$$(y, f_*\xi(y)) = Tf(x, \xi(x)) \in Tf(TX) = Tf(X),$$

o que prova o resultado. □

Teorema 1.6

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto, seja $X \subseteq U$ uma subvariedade, seja $\xi : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ um campo de vetores e seja $\Phi : \Omega \to U$ o fluxo maximal de ξ. O campo ξ é tangente a X se e somente se, para todo $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $|t| < \epsilon$,

$$\Phi(x,t) \in X.$$

Além disso, se X é um subconjunto fechado de U então, para todo $(x,t) \in \Omega$ tal que $x \in X$, $\Phi(x,t) \in X$.

Prova: Supomos primeiro que ξ é tangente a X. Mostramos de duas maneiras diferentes que, para todo $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $|t| < \epsilon$,

$$\Phi(x,t) \in X.$$

Primeira maneira: Seja $x_0 \in X$. Reduzindo U se for necessário, podemos supor que existe um aberto $V \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e um difeomorfismo $f : U \to V$ tal que

$$f(X) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) =: Y.$$

Seja $y_0 := f(x_0)$ e $\nu := f_*\xi$. Pelo Lema 1.5, ν é tangente a Y. Isto é, para todo $y \in Y$,

$$(\pi_2 \circ \nu)(y) = 0,$$

onde $\pi_2 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ é a projeção sobre os últimos n componentes. Podemos conceber Y como um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Definimos o campo de vetores $\nu' : Y \to \mathbb{R}^m$ tal que, para todo $y \in Y$

$$\nu(y,0) = (\nu'(y), 0).$$

Seja $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to Y$ uma curva integral de ν' tal que $\gamma(0) = y_0$. Trivialmente, γ também é uma curva integral de ν. Segue pelo Teorema 1.4 que $\delta := f^{-1} \circ \gamma$ é uma curva integral de ξ. Verificamos que $(f^{-1} \circ \gamma)(0) = x_0$ e que $(f^{-1} \circ \gamma)(t) \in X$ para todo t, o que prova o resultado.

Segunda maneira: Seja $x_0 \in X$. Seja $V \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e seja $f : V \to X$ uma parametrização tal que $f(0) = x_0$. Como ξ é tangente a X, existe um pull-back $\nu := f^*\xi$ de ξ por f. Seja $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to V$ uma curva integral de f tal que $\gamma(0) = 0$ a seja $\delta := f \circ \gamma$. Verificamos que δ é uma curva integral de ξ, $\delta(0) = x_0$ e $\delta(t) \in X$ para todo t, o que prova o resultado.

Reciprocamente, supomos que, para todo $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $|t| < \epsilon$, $\Phi(x,t) \in X$. Seja $x \in X$ e seja $\gamma_x :]-\epsilon, \epsilon[\to X$ uma curva integral de ξ tal que $\gamma_x(0) = x$. Reduzindo ϵ se for necessário, podemos supor que, para todo t, $\gamma_x(t) = \Phi(x,t) \in X$. Segue que

$$\xi(x) = \dot{\gamma}_x(0) \in T_xX.$$

Como $x \in X$ é qualquer, isso completa a prova da primeira parte do teorema.

Por fim, seja $x \in X$ e seja $\gamma_x : I_x \to U$ a curva integral maximal de ξ tal que $\gamma_x(0) = x$. Seja $J := \gamma_x^{-1}(X)$. Por hipótese, J não é vazio. Pela primeira parte do teorema e a unicidade das curvas integrais, J é aberto. Finalmente, como X é fechado e γ é contínua, J também é fechado. Segue por conexidade que $J = I_x$, o que completa a prova do teorema. $\square$

Corolário 1.7

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto, seja $X \subseteq U$ uma subvariedade, seja $\xi : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ um campo de vetores tangente a X e seja $\Phi : \Omega \to U$ o fluxo maximal de ξ. Se X é compacto, então

$$X \times \mathbb{R} \subseteq \Omega.$$

Isto é, toda curva integral de ξ que começa em um ponto de X tem intervalo maximo $\mathbb{R}$.

Prova: Seja $x \in X$. Seja $\gamma_x : I_x \to U$ a curva integral maximal de ξ tal que $\gamma_x(0) = x$. Pelo Teorema 1.6, $\gamma_x(t) \in X$ para todo $t \in I_x$. Em particular, para todo $R > 0$, $\gamma_x^{-1}(X) \cap [-R, R] = I_x \cap [-R, R]$. Afirmamos que $I_x = \mathbb{R}$. De fato, caso contrário, existe $R > 0$ tal que $I_x \cap [-R, R]$ não seja compacto. Isso é absurdo, pelo Teorema 1.9 da Seção "Campos de vetores e fluxos" e a inextensibilidade de γ_x, o que prova o resultado. □

Exercício**: Sejam $0 \leq a, A \leq \infty$, seja

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid a < \|x\| < A \right\},$$

e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^3$ um campo de vetores. Definimos o campo de vetores $\nu : U \to \mathbb{R}^3$ por

$$\nu(x) := x \wedge \xi(x).$$

Seja $\Phi : \Omega \to U$ o fluxo maximal de ν. Mostre que

$$\Omega = U \times \mathbb{R}.$$

Isto é, toda curva integral de ξ tem intervalo maximal $\mathbb{R}$.

Exercício**: Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e seja $A : I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ uma função suave tal que $A(t)$ seja antisimétrica para todo t. Definimos o campo de vetores $\xi : I \times \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \times \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ por

$$\xi(t, M) := (1, MA(t)).$$

Seja $\Phi : \Omega \to I \times \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ o fluxo maximal de ξ. Mostre que Ω contém o conjunto

$$\left\{ (t, M, s) \in I \times \mathrm{O}(m) \times \mathbb{R} \mid t + s \in I \right\}.$$

Mostre que, para todo $t_0 \in I$ e para todo $M_0 \in \mathrm{O}(m)$, existe uma única solução $M : I \to \mathrm{O}(m)$ da equação diferencial ordinária com condição inicial

$$\begin{aligned} M(t_0) &= M_0 \text{ e} \\ \dot{M}(t) &= M(t)A(t). \end{aligned}$$