1 - Campos de vetores e fluxos.

Definição 1.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto. Um **campo de vetores** *sobre U é uma função $\xi : U \to \mathbb{R}^m$.*

Definição 1.2

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores sobre U. Uma **curva integral** *de ξ é uma função $\gamma : I \to U$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, tal que, para todo $t \in I$,*

$$\dot{\gamma}(t) = (\xi \circ \gamma)(t). \tag{1}$$

Definição 1.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto, seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores sobre U e seja X um subconjunto de U. Um **fluxo** *de ξ baseado em X é uma função contínua $\Phi : \hat{X} \to U$, cujo domínio $\hat{X}$ é um subconjunto de $X \times \mathbb{R}$, tal que, para todo $x \in X$,*

(1) $\hat{X} \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ é um intervalo aberto em torno de $(x, 0)$,

(2) $\Phi(x, 0) = x$, e

(3) a restrição de Φ a $\{x\} \times \mathbb{R}$ é um curva integral de ξ.

Em particular, uma curva integral é um fluxo baseado num único ponto.

Exercício**: Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Seja $\xi : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função suave. Seja $f : I \to \mathbb{R}^m$ uma solução da equação diferencial ordinária

$$\dot{f}(t) = \xi(t, f(t)).$$

Seja $\hat{f}(t) := (t, f(t))$. Mostre que $\hat{f}$ é uma curva integral do campo

$$\hat{\xi}(t, x) := (1, \xi(t, x)).$$

Lembramos do Teorema Fundamental de Equações Diferenciais Ordinárias.

Teorema 1.4, Teorema Fundamental de EDOs

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores sobre U. Para todo subconjunto compacto K de U, existem $\epsilon > 0$ e um fluxo $\Phi : K \times]-\epsilon, \epsilon[\to U$ de ξ. Além do mais, Φ é suave sobre $K^o \times]-\epsilon, \epsilon[$.

No restante dessa seção, mostraremos que todo campo de vetores sobre U possui um único fluxo maximal baseado em U. Primeiro precisamos estudar o conceito de extensibilidade de curvas integrais.

Lema 1.5

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja $\gamma_i : I_i \to U$ uma curva integral de ξ. Se existe $t \in I_1 \cap I_2$ tal que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$, então

$$\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}.$$

Prova: Seja $J \subseteq I_1 \cap I_2$ o conjunto de todos os t tais que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$. Por hipótese, J não é vazio, por continuidade, J é fechado, e pela unicidade do Teorema 1.4, J é aberto. Segue por conexidade que $J = I_1 \cap I_2$, o que prova o teorema. □

Esse resultado nos leva às seguintes definições.

Definição 1.6

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Seja A um conjunto e, para cada $a \in A$, seja $\gamma_a : I_a \to U$ uma curva integral de ξ. Supomos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in U$ tal que, para todo a, $t_0 \in I_a$ e $\gamma_a(t) = x_0$. A ***reunião*** *de $(\gamma_a)_{a \in A}$ é a única curva*

$$\gamma : \bigcup_{a \in A} I_a \to U$$

tal que, para todo $a \in A$ e para todo $t \in I_a$,

$$\gamma(t) = \gamma_a(t).$$

Em particular, γ também é uma curva integral de ξ.

Definição 1.7

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto, seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores sobre U e seja $\gamma : I \to U$ uma curva integral de ξ. Seja $\gamma' : I' \to U$ uma outra curva integral de ξ. Dizemos que γ' é uma ***extensão*** *de γ quando I é estritamente contida em I' e*

$$\gamma'|_I = \gamma.$$

Dizemos que γ é ***extensível*** *quando uma extensão de γ existe. Caso contrário, γ é dita* ***inextensível***.

Exercício**: Definimos o campo de vetores $\xi : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ por

$$\xi(x, y) := (1, -y^2).$$

Determine a curva integral maximal de ξ que passa pelo ponto $(0, 1)$.

Lema 1.8

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto, seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores sobre U. Para todo $x \in U$ existe uma única curva integral inextensível $\gamma_x : I_x \to U$ tal que $\gamma_x(0) = x$.

Prova: Mostramos primeiro a existência. Seja

$$\mathcal{A} := \{(\gamma_a, I_a) \mid a \in A\}$$

o conjunto de todas as curvas integrais $\gamma_a : I_a \to U$ de ξ tal que $0 \in I_a$ e $\gamma_a(0) = x$. Pelo Teorema 1.4, $\mathcal{A}$ não é vazio. Seja

$$I := \bigcup_{a \in A} I_a.$$

Seja $t \in I$ e sejam $a, b \in A$. Como $0 \in I_a \cap I_b$ e $\gamma_a(0) = x = \gamma_b(0)$, e segue pelo Lema 1.5 que a reunião γ de $(\gamma_a)_{a\in A}$ existe. Afirmamos primeiro que γ é inextensível. Supomos o contrário. Seja $\gamma' : I' \to U$ uma extensão de γ. Como $(\gamma', I') \in \mathcal{A}$, segue que $I' \subseteq I$. Isso é absurdo, o que prova a afirmação. Afirmamos agora que γ é única. Supomos novamente o contrário. Seja $\gamma' : I' \to U$ uma outra curva integral inextensível de ξ tal que $\gamma'(0) = x$. Como γ' é inextensível, segue que $\gamma' = \gamma$. Isso também é absurdo, o que prova unicidade. □

Teorema 1.9, Critério de inextensibilidade

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto, seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores e seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ uma curva integral de ξ. A curva γ é inextensível se e somente se, para todo subconjunto compacto K de U e para todo $R > 0$, $\gamma^{-1}(K) \cap [-R, R]$ é compacto. Isto é, γ é inextensível se e somente se $\hat{\gamma}(t) := (\gamma(t), t)$ é uma função própria de I em $U \times \mathbb{R}$.

Prova: Denotamos $I =:]a, b[$, para $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Provamos o contrapositivo, isto é, que γ é extensível se e somente $\hat{\gamma}$ não é própria. Supomos primeiro que γ é extensível. Seja $\gamma' : I' \to U$ uma extensão de γ. Sem perder generalidade, podemos supor que $b \in I'$. Seja $\epsilon < |b - a|$ tal que $[b - \epsilon, b + \epsilon] \subseteq I'$. Seja $K := \gamma'([b - \epsilon, b + \epsilon])$ e seja $R := \mathrm{Max}(|b \pm \epsilon| T)$. Por continuidade, K é compacto. Contudo

$$[b - \epsilon, b[\subseteq \gamma^{-1}(K) \cap [-R, R] = \hat{\gamma}^{-1}(K \times [-R, R]).$$

Segue que $\hat{\gamma}^{-1}(K \times [-R, R])$ não é compacto, pois tem b como ponto limite.

Supomos agora que $\hat{\gamma}$ não é própria. Seja $K \subseteq U$ compacto e $R > 0$ tais que $\hat{\gamma}^{-1}(K \times [-R, R]) = \gamma^{-1}(K) \cap [-R, R]$ não seja compacto. Em particular, por ser limitado, este conjunto não pode ser fechado. Existe então uma sequência $(t_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \gamma^{-1}(K) \cap [-R, R]$ que converge até $t_\infty \notin \gamma^{-1}(K) \cap [-R, R]$. Por compacidade, podemos supor que $(\gamma(t_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge ate $x_\infty \in K$.

Afirmamos que t_∞ é uma das extremidades de I. Por continuidade, $t_\infty \notin I$, pois, senão, $\gamma(t_\infty) = x_\infty \in K$. Contudo, como t_∞ é o limite de um sequência de pontos de I, t_∞ está no fechado de I. Segue que t_∞ é uma das extremidades de I, como afirmado. Sem perder generalidade, podemos supor que $t_\infty = b$.

Construimos agora uma extensão de γ. Seja $\delta > 0$ tal que $\overline{B}_\delta(x_\infty) \subseteq U$. Pelo Teorema 1.4 existe $\epsilon > 0$ e um fluxo $\Phi : \overline{B}_\delta(0) \times] - \epsilon, \epsilon[\to U$ de ξ baseado em $\overline{B}_\delta(0)$. Seja m tal que $b - t_m < \epsilon$, seja $I' :=]t_m - \epsilon, t_m + \epsilon[$ e definimos $\gamma' : I' \to U$ por

$$\gamma'(t) := \Phi(\gamma(t_m), t - t_m).$$

Verificamos que γ' é uma curva integral de ξ e que $\gamma'(t_m) = \gamma(t_m)$. Consequentemente, como $I \cup I'$ é estritamente maior que I, a reunião de γ e γ' é uma extensão de γ. Segue que γ é extensível, o que prova o teorema. $\square$

Exercício**: Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, seja $A : I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ uma função suave e seja $\xi : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ o campo de vetores

$$\xi(t, x) := (1, A(t)x).$$

Para $x \in \mathbb{R}^m$, seja $\gamma_x : I' \to I \times \mathbb{R}^m$ a única curva integral maximal de ξ tal que $\gamma(0) = (0, x)$. Mostre que $I' = I$. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, existe uma única solução $X : I \to \mathbb{R}^m$ da equação diferencial ordinária com condição inicial

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, \text{ e} \\ \dot{X}(t) &= A(t)X(t). \end{aligned}$$

Para todo $x \in U$, seja $I_x \subseteq \mathbb{R}$ e $\gamma_x : I_x \to U$ a única curva integral inextensível de ξ tal que $\gamma_x(0) = x$. Definimos $\Omega_\xi \subseteq U \times \mathbb{R}$ e $\Phi_\xi : \Omega_\xi \to U$ por

$$\begin{aligned} \Omega_\xi &:= \{(x, t) \mid x \in U,\ t \in I_x\} \text{ e} \\ \Phi_\xi(x, t) &:= \gamma_x(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Mostramos que Φ_ξ é o único fluxo maximal de ξ baseado em U. Observe que ainda temos que mostrar que Φ_ξ é contínua. Em primeiro lugar, mostramos a maximalidade.

Lema 1.10

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto, seja $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores sobre U e seja $X \subseteq U$ um subconjunto de U. Se $\Phi : \hat{X} \to U$ é um fluxo de ξ baseado em $\hat{X}$, então $\hat{X} \subseteq \Omega_\xi$ e

$$\Phi_\xi|_{\hat{X}} = \Phi.$$

Prova: Para todo $x \in X$, seja $J_x \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\{x\} \times J_x = \Omega \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ e definimos a curva integral $\delta_x : J_x \to U$ de ξ por

$$\delta_x(t) := \Phi(x, t).$$

Como $\delta_x(0) = x = \gamma_x(0)$ segue pela maximalidade e a unicidade de γ_x que $J_x \subseteq I_x$ e

$$\gamma_x|_{J_x} = \delta_x.$$

Segue que,

$$\Omega = \{(x, t) \mid x \in X,\ t \in J_x\} \subseteq \{(x, t) \mid x \in U,\ t \in I_x\} = \Omega_\xi,$$

e que, para todo $(x, t) \in \Omega$,

$$\Phi_\xi(x, t) = \gamma_x(t) = \delta_x(t) = \Phi(x, t),$$

o que completa a prova. $\square$

Lema 1.11

Ω é aberto e Φ é suave.

Prova: Seja $x \in U$. Seja $J \subseteq I_x \cap [0,\infty[$ o conjunto de todos os s tais que existe $\delta > 0$ e um fluxo suave $\Phi : B_\delta(x)\times]-\delta, s+\delta[\to U$ de ξ. Por definição, J é conexo e, pelo Teorema 1.4, 0 é um elemento de J. Trivialmente $\mathrm{Sup}(J) \leq \mathrm{Sup}(I_x)$. Afirmamos que $\mathrm{Sup}(J) = \mathrm{Sup}(I_x)$. Supomos o contrário. Seja $s_0 := \mathrm{Sup}(J) < \mathrm{Sup}(I)$. Pela maximalidade e a unicidade de γ_x, para todo $s \in [0, s_0[$, $\Phi(x,s) = \gamma_x(s)$. Assim, por continuidade,

$$\operatorname*{Lim}_{s\to s_0} \Phi(x,s) = \gamma_x(s_0) = x_0.$$

Seja $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(x_0) \subseteq U$. Pelo Teorema 1.4, existe $\epsilon > 0$ e um fluxo suave $\Phi : B_r(x_0)\times]-\epsilon,\epsilon[$ de ξ. Seja $\eta < \epsilon/2$ tal que $\gamma_x(s_0 - 2\eta) \in B_r(x_0)$. Como $s_0 - \eta \in J$, existe $\delta > 0$ e um fluxo suave $\Phi' : B_\delta(x)\times]-\delta,(s_0-\eta)+\delta[\to U$. Por continuidade, existe $\delta' < \delta$ tal que, para todo $y \in B_{\delta'}(x)$, $\Phi'(y, s_0 - 2\eta) \subseteq B_r(x_0)$. Definimos $\Phi'' : B_{\delta'}(0)\times]-\delta',(s_0-2\eta)+\epsilon)[\to U$ por

$$\Phi''(y,t) := \begin{cases} \Phi(y,t) & \text{se } t < (s_0-\eta)+\delta' \text{ e} \\ \Phi'(\Phi(y,s_0-2\eta), t-(s_0-2\eta)) & \text{se } (s_0-2)\eta < t < (s_0-2\eta)+\epsilon. \end{cases}$$

Pelo Lema 1.5, Φ'' é bem definida. Como Φ e Φ' são suaves, Φ'' também é suave. Verificamos que Φ'' é um fluxo de ξ, o que contradiz a definição de s_0. Segue que $\mathrm{Sup}(J) = \mathrm{Sup}(I_x)$, como afirmado.

Provamos agora o lema. Seja $(x,t) \in \Omega$. Sem perder generalidade, podemos supor que $t \geq 0$. Pelo argumento do último parágrafo, existe $\delta > 0$ e um fluxo suave $\Phi : B_\delta(x)\times]-\delta, t+\delta[$ de ξ. Segue pelo Lema 1.10 que $B_\delta(x)\times]-\delta,t+\delta[\subseteq \Omega_\xi$ e que

$$\Phi_\xi|_{B_\delta(x)\times]-\delta,t+\delta[} = \Phi,$$

o que prova que Ω_ξ é aberto e que Φ é suave. $\square$

Exercício**: Seja $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e seja $\xi : U \to \mathbb{R}^3$ o campo de vetores

$$\xi(x)) := -\frac{x}{\|x\|}.$$

Seja $\Phi_\xi : \Omega_\xi \to U$ o único fluxo maximal de ξ. Mostre que

$$\Omega_\xi = \{(x,t) \mid \|x\| \neq 0,\ t < \|x\|\}.$$

Exercício**: Seja $\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ o campo de vetores

$$\xi(x) := x \wedge (x - \langle u, x\rangle u)$$

onde u é um vetor unitário constante. Determine o domínio do único fluxo maximal de ξ.

Exercício**: Seja $\xi : \mathbb{R}\times]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ o campo de vetores

$$\xi(x,y) = (1, \frac{1}{1-y^2}).$$

Seja $\Phi_\xi : \Omega_\xi \to \mathbb{R}\times]-1,1[$ o único fluxo maximal de ξ. Determine Ω_ξ.