1 - Espaços tangentes e fibrados tangentes. Nesse capítulo, introduzimos o formalismo de espaços e fibrados tangentes que servem para estudar, de um lado, derivadas de funções definidas sobre subvariedades e, do outro lado, campos de vetores definidos sobre subvariedades.

Lema 1.1

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ abertos. Sejam $f : U \to V$ uma imersão e $g : V \to \mathbb{R}^n$ uma submersão tais que $g \circ f = 0$. Então, para todo $x \in U$,

$$\mathit{Im}(Df(x)) = \mathit{Ker}(Dg(x))$$

Prova: Seja $x \in U$. Pela regra de cadeia, para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$Dg(f(x))Df(x)\xi = 0.$$

Segue que $\mathrm{Im}(Df(x)) \subseteq \mathrm{Ker}(Dg(x))$. Contudo, pelo teorema de posto-nulidade,

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(Df(x))) = m = \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(Dg(x))),$$

o que prova que esses dois espaços coincidem. □

Lema 1.2

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedede e seja $x \in X$. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma vizinhança de x e $f, f' : \Omega \to \mathbb{R}^n$ duas submersões tais que

$$X \cap \Omega = f^{-1}(\{0\}) = (f')^{-1}(\{0\}).$$

Então

$$\mathit{Ker}(Df(x)) = \mathit{Ker}(Df'(x)).$$

Prova: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e seja $g : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma parametrização de uma vizinhança de x em X tal que $g(0) = x$. Como $f \circ g = f' \circ g = 0$, segue pelo Lema 1.1 que

$$\mathrm{Ker}(Df(x)) = \mathrm{Im}(Dg(0)) = \mathrm{Ker}(Df'(x)),$$

como desejávamos. □

Definição 1.3

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$ uma subvariedade. Para todo $x \subseteq X$, definimos o **espaço tangente** *de X em x por*

$$T_xX := \mathit{Ker}(Df(x)), \tag{1}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão tal que $X \cap \Omega = f^{-1}(\{0\})$. Segue pelo Lema 1.2 que T_xX é bem definido, independentemente da submersão f escolhida.

Exercício: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma parametrização. Seja $X := \mathrm{Im}(f)$. Mostre que, para todo $x \in U$,

$$T_{f(x)}X = \mathrm{Im}(Df(x)).$$

Exercício: Seja $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Seja $T :]a, b[\to \mathbb{R}^{m+1}$ seu campo de vetores tangente unitário. Seja $\Gamma := \mathrm{Im}(\gamma)$. Mostre que, para todo $t \in]a, b[$,

$$T_{\gamma(t)}\Gamma = \langle T(t)\rangle = \{\lambda T(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 1.4

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Definimos o **fibrado tangente** *de X por*

$$TX := \left\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2(m+n)} \mid x \in X \text{ e } \xi \in T_x X\right\}. \tag{2}$$

Isto é, o fibrado tangente de X é a reunião disjunta de todos os espaços tangentes de X.

Exercício: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Observe-se que U é subvariedade de $\mathbb{R}^m$. Mostre que

$$TU = U \times \mathbb{R}^m.$$

Exercício: Seja S^m a esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$. Mostre que

$$TS^m = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2(m+1)} \mid \|x\| = 1 \text{ e } \langle x, y\rangle = 0\right\}.$$

Exercício: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função suave e seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ seu gráfico. Mostre que

$$TX = \{(x, f(x), \xi, Df(x)\xi) \mid x \in U \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^m\}.$$

Lema 1.5

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $(x, \xi) \in TM$. Existe uma curva $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to X$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = \xi$.

Prova: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \to X$ uma parametrização de uma vezinhança de x em X tal que $f(0) = x$. Seja $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $Df(0)\eta = \xi$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to X$ por

$$\gamma(t) := f(t\eta).$$

Verificamos que $\gamma(0) = x$ e que $\dot{\gamma}(0) = \xi$, o que termina a prova. $\square$

Exercício: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Para todo $\epsilon > 0$, seja $\mathcal{G}_\epsilon$ o conjunto de todas as curvas suaves de $]-\epsilon, \epsilon[$ em X e definimos

$$\mathcal{G} := \bigcup_{\epsilon > 0} \mathcal{G}_\epsilon. \tag{3}$$

Definimos a relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathcal{G}$ por

$$\gamma = \gamma' \iff \gamma(0) = \gamma'(0) \text{ e } \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}'(0). \tag{4}$$

Definimos $\Phi : \mathcal{G} \to TX$ por

$$\Phi(\gamma) := (\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$$

Mostre que Φ define uma bijeção do espaço quociente $\mathcal{G}/\sim$ em TX. Segue que o fibrado tangente de X se identifica com o conjunto de classes de equivalência de curvas suaves em X. Essa identificação tem um papel importante na definição de fibrados tangentes no contexto de variedades abstratas.

Definição 1.6

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Para $f : U \to \mathbb{R}^n$ suave, definimos $Tf : TU \to \mathbb{R}^{2n}$ por

$$Tf(x, \xi) := (f(x), Df(x)). \tag{5}$$

Lema 1.7

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^{m'+n'}$ subvariedades. Seja $f : U \to \mathbb{R}^{m'+n'}$ uma função suave definida numa vizinhança U de X. Se $f(X) \subseteq Y$, então

$$Tf(TX) \subseteq TY.$$

Prova: Seja $(x, \xi) \in TX$ e seja $y := f(x)$. Seja $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to X$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Seja $g : \Omega \to \mathbb{R}^{n'}$ uma submersão definida numa vizinhança Ω de y tal que $Y \cap \Omega = g^{-1}(\{0\})$. Como $f^{-1}(\Omega)$ é uma vizinhança de X, podemos supor que $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq f^{-1}(\Omega)$. Temos então, para todo t,

$$(g \circ f \circ \gamma)(t) = 0.$$

Segue pela regra de cadeia que,

$$Dg(y)Df(x)\xi = \frac{\partial}{\partial t}(g \circ f \circ \gamma)(t)\bigg|_{t=0} = 0.$$

Isto é

$$Df(x)\xi \subseteq \mathrm{Ker}(Dg(y)) = T_yY.$$

Como $(x, \xi) \in TX$ é qualquer, segue que $Tf(TX) \subseteq TY$, como afirmado. $\square$

Lema 1.8

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Então TX é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{2(m+n)}$.

Prova: Seja $x \in X$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma submersão definida numa vizinhança Ω de x tal que $X \cap \Omega = f^{-1}(\{0\})$. Verificamos que Tf define uma submersão de $T\Omega$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e que

$$TX \cap T\Omega = Tf^{-1}(\{(0, 0)\}).$$

Como $x \in X$ é qualquer, segue que TX é uma subvariedade. $\square$

Lema 1.9

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e seja $f : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma parametrização. Então Tf é uma parametrização e

$$Im(Tf) = TIm(f).$$

Remark: Chamamos Tf a *parametrização derivada* de f.

Prova: Seja $(x, \xi) \in TU$. Então, para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^{2m}$,

$$D\tilde{f}(x, \xi)(u, v) = (Df(x)u, D^2f(x)(u, \xi) + Df(x)v).$$

Seja $(u, v) \in \mathbb{R}^{2m}$ tal que $DTf(x, \xi)(u, v) = 0$. Afirmamos que $(u, v) = 0$. De fato

$$Df(x)u = D^2f(x)(u, \xi) + Df(x)v = 0.$$

Segue pela injetividade de $Df(x)$ que $u = 0$. Segue então da segunda relação que

$$Df(x)v = 0,$$

e segue novamente pela injetividade de $Df(x)$ que $v = 0$, o que prova a afirmação. Concluimos que $DTf(x, \xi)$ é injetiva e, como $(x, \xi) \in TU$ é qualquer, segue que Tf é uma imersão.

Segue pelo Lema 1.7 que $\mathrm{Im}(Tf) = T\mathrm{Im}(f)$. Para mostrar que Tf é uma parametrização, só resta mostrar que Tf é um homeomorfismo sobre sua imagen. Mostramos primeiro que Tf é injetiva. Sejam $(x, \xi), (x', \xi') \in \tilde{\Omega}$ tais que

$$Tf(x, \xi) = Tf(x', \xi').$$

Isso significa que

$$f(x) = f(x') \text{ e } Df(x)\xi = Df(x')\xi'.$$

Segue pela injetividade de f que $x = x'$ e segue então pela injetividade de $Df(x)$ que $\xi = \xi'$, o que prova a injetividade de Tf. Mostramos agora que Tf é um homeomorfismo sobre sua imagem. Trivialmente, essa função é contínua. Para mostrar a continuidade da sua inversa, seja $(y_m, \eta_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Im}(Tf)$ uma sequência que converge até $(y_\infty, \eta_\infty) \in \mathrm{Im}(Tf)$ e, para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, seja $(x_m, \xi_m) \in TU$ tal que $Tf(x_m, \xi_m) = (y_m, \eta_m)$. Para todo m, $f(x_m) = y_m$ e, como f define um homeomorfismo sobre sua imagem, $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge até x_∞. Por injetividade e continuidade, existe então $B_1 > 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$\|Df(x_m)\xi\| \geq \frac{1}{B_1}\|\xi\|.$$

Como $(\eta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge até η_∞, existe $B_2 > 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\xi_m\| \leq B_1\|Df(x_m)\xi_m\| = B_1\|\eta_m\| \leq B_2.$$

Isto é, a sequência $(\xi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada, e segue pelo Teorema de Heine-Borel que ela é relativamente compacta. Afirmamos que ξ_∞ é o único ponto de acumulação dessa sequência, o que implica que $(\xi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge até ξ_∞. Para mostrar isso, supomos que existe $\xi'_\infty \neq \xi_\infty$ limite de uma subsequência de $(\xi_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Por continuidade,

$$Df(x_\infty)\xi'_\infty = \eta_\infty = Df(x_\infty)\xi_\infty,$$

e segue pela injetividade de $Df(x_\infty)$ que $\xi'_\infty = \xi_\infty$, o que é absurdo. Isso prova a afirmação. Concluimos que Tf é um homeomorfismo sobre sua imagen, o que completa a prova. □

Concluimos essa seção estudando os fibrados tangentes dos grupos de Lie.

Lema 1.10

Seja $G \subseteq End(\mathbb{R}^m)$ um grupo de Lie. Seja $\mathfrak{g} := T_{\mathrm{Id}}G$ seu espaço tangente em Id. Então, para todo $A, B \in \mathfrak{g}$,

$$[A, B] = AB - BA \in \mathfrak{g}.$$

Prova: Sejam $\gamma, \eta :]-\epsilon, \epsilon[\to G$ tais que

$$\gamma(0) = \eta(0) = \mathrm{Id},\ \dot{\gamma}(0) = A \text{ e } \dot{\eta}(0) = B.$$

Definimos $\phi :]-\epsilon, \epsilon[^2 \to G$ por

$$\phi(s, t) = \gamma(s)^{-1}\eta(t)^{-1}\gamma(s)\eta(t).$$

Verificamos que, para todo s,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\phi(s, t)\right|_{t=0} \in \mathfrak{g}.$$

Segue então que

$$[A, B] = \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\phi(s, t)\right|_{s,t=0} \in \mathfrak{g}.$$

Isso completa a prova. □

Chamamos $[\cdot, \cdot]$ **colchete de Lie**. Mais geralmente, um **colchete de Lie** sobre um espaço vetorial E é uma operação bilinear antisimétrica $[\cdot, \cdot] : E \oplus E \to E$ tal que, para todo $u, v, w \in E$,

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \tag{6}$$

Chamamos (6) a **relação de Jacobi**. Uma **álgebra de Lie** é um par $(E, [\cdot, \cdot])$ onde E é um espaço vetorial e $[\cdot, \cdot]$ é um colchete de Lie. Por isso, chamamos $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G.

Exercício: Mostre que $[A, B] := AB - BA$ satisfaz a relação de Jacobi.

Exercício: Mostre que

$$T_{\mathrm{Id}}\mathrm{O}(m) = \left\{A \mid A + A^t = 0\right\} \text{ e}$$
$$T_{\mathrm{Id}}\mathrm{SL}(m) = \{A \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

Denotamos

$$\mathfrak{o}(m) = T_{\mathrm{Id}}\mathrm{O}(m) \text{ e}$$
$$\mathfrak{sl}(m) = T_{\mathrm{Id}}\mathrm{O}(m).$$

Exercício: Mostre que o produto vetorial $\wedge$ satisfaz a relação de Jacobi. Observe que isso significa que $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ é uma álgebra de Lie. Determine o grupo de Lie dessa álgebra.

Exercício: Mostre que

$$\begin{aligned} T\mathrm{O}(m) &= \{(M, MA) \mid M \in \mathrm{O}(m),\ A \in \mathfrak{o}(m)\}, \\ T\mathrm{O}(m) &= \{(M, AM) \mid M \in \mathrm{O}(m),\ A \in \mathfrak{o}(m)\}, \\ T\mathrm{SL}(m) &= \{(M, MA) \mid M \in \mathrm{SL}(m),\ A \in \mathfrak{sl}(m)\} \text{ e} \\ T\mathrm{SL}(m) &= \{(M, AM) \mid M \in \mathrm{SL}(m),\ A \in \mathfrak{sl}(m)\}. \end{aligned}$$