1 - Curvatura geodésica de curvas no espaço. Seja $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Seja

$$T(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \tag{1}$$

seu *campo tangente unitário*. Neste caso, não é tão claro como definir o compo normal unitário de γ, pois há em todo ponto uma continuidade de vetores unitários normais a γ. Para estudar como proceder, lembramos que, no caso de curvas planas, a curvatura satisfaz

$$|\kappa(t)| = \frac{\|\dot{T}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \tag{2}$$

e que, quando a curvatura é diferente de zero, o compo normal unitário satisfaz

$$N(t) = \frac{-\dot{T}(t)}{\kappa(t)\|\dot{\gamma}(t)\|}. \tag{3}$$

Nos inspirando em (2), no caso de uma curva no espaço, *definimos* a curvatura geodésica por

$$\kappa(t) := \frac{\|\dot{T}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|}. \tag{4}$$

Exercício: Seja $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Mostre que $\kappa = 0$ se e somente se γ é um trecho de uma reta.

Estudamos agoras as curvas (ou os trechos das curvas) onde $\kappa \neq 0$. Assim, vamos supor que $\kappa(t) > 0$ para todo t. Nos inspirando dessa vez em (3), definimos o campo normal unitário de γ por

$$N(t) := \frac{\dot{T}(t)}{\kappa(t)\|\dot{\gamma}(t)\|}. \tag{5}$$

Exercício: Mostre que N é invariante por reparametrização.

Exercício: Mostre que, quando γ é parametrizada por comprimento de arco,

$$N(t) := \frac{\dot{T}(t)}{\kappa(t)} = \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\kappa(t)}.$$

Definimos o *campo binormal unitário* de γ por

$$B(t) := T(t) \wedge N(t). \tag{6}$$

Para todo t, a tripla $(T(t), N(t), B(t))$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Assim, chamamos a tripla (T, N, B) *referencial de Frenet* de γ. Lembramos que todo vetor é uma coluna de números, isto é

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Assim, o referencial de Frenet de γ também pode ser considerado como uma função com valores matriciais,

$$\begin{pmatrix} T_1(t) & N_1(t) & B_1(t) \\ T_2(t) & N_2(t) & B_2(t) \\ T_3(t) & N_3(t) & B_3(t) \end{pmatrix}$$

Como o referencial de Frenet é ortonormal, essa matriz é ortogonal. Ou seja, podemos considerar a tripla (T, N, B) como uma função com valores no grupo $\mathrm{O}(3)$, isto é

$$(T, N, B) :]a, b[\to \mathrm{O}(3).$$

Essa observação terá profundas implicações mais a frente.

Exercício: Mostre que γ está contida num plano afim se e somente se B é constante.

Exercício: Mostre que γ está contida numa esfera de raio r centrada na origem se e somente se

$$B = -\frac{1}{\sqrt{r^2\kappa^2 - 1}} N + \frac{\kappa}{\sqrt{r^2\kappa^2 - 1}} \gamma.$$

Exercício: Seja γ a espiral cilíndrica

$$\gamma(t) := (r\cos(t), r\mathrm{sen}(t), at).$$

Mostre que

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{r}{a^2 + r^2} \text{ e} \\ aT + rB &= (0, 0, \sqrt{a^2 + r^2}). \end{aligned} \tag{7}$$

Reciprocamente, mostre que se κ, T e B satisfazem (7), então γ é uma espiral cilíndrica de raio r em torno do eixo z.

Exercício: Estude a geometria da espiral cônica

$$\gamma(t) = (at\cos(t), at\mathrm{sen}(t), bt).$$

Lemma 1.1

Seja $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e seja κ sua curvatura. Existe uma função $\tau :]a, b[\to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \kappa(t)N(t) \\ \dot{N}(t) &= -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t) \\ \dot{B}(t) &= -\tau(t)N(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Isto é

$$(\dot{T}, \dot{N}, \dot{B}) = (T, N, B) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Prova: Por definição
$$\dot{T}(t) = \kappa(t)N(t).$$
Derivando $\langle N(t), T(t)\rangle = 0$, temos
$$\langle \dot{N}(t), T(t)\rangle = -\langle N(t), \dot{T}(t)\rangle = -\kappa(t).$$
Derivando $\|N(t)\|^2 = 1$, temos
$$\langle \dot{N}(t), N(t)\rangle = 0.$$
Como $(T(t), N(t), B(t))$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, segue que
$$\dot{N}(t) = -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t),$$
onde
$$\tau(t) := \langle \dot{N}(t), B(t)\rangle.$$
Enfim, derivando $\langle B(t), T(t)\rangle = \langle B(t), N(t)\rangle = 0$ and $\|B(t)\|^2 = 1$, temos
$$\dot{B}(t) = -\tau(t)N(t).$$
Isso completa a prova. $\square$

Chamamos τ a *torsão* de γ. Chamamos (8) as fórmulas de Frenet da curva γ. Observe-se o seguinte fato interessante. Se denotamos
$$F(t) = (T(t), N(t), B(t)) \in \mathrm{O}(3),$$
então, as fórmulas de Frenet são equivalentes a
$$F(t)^{-1}\dot{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$
Em particular, o lado direto de (10) é uma matriz antisimétrica.

Exercício: Mostre que γ está contida em um plano afim se e somente se $\tau = 0$.

Exercício: Mostre que γ está uma espiral cilíndrica se e somente se κ e τ são constantes.

Exercício: Mostre que γ está contida numa esfera de raio r se e somente se
$$\tau\kappa\sqrt{(r\kappa)^2 - 1} \pm \dot{\kappa} = 0.$$

Terminamos essa seção com o *teorema fundamental de curvas no espaço.*

Teorema 1.2

Sejam $\kappa :]a,b[\to [0,\infty[$ e $\tau :]a,b[\to \mathbb{R}$ funções sauves. A menos de movimentos rígidos do espaço (isto é rotações, reflexões e translações), existe uma única curva $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^3$ parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura e torsão são respectivamente iguais a κ e τ.

Prova: Definimos $A :]a,b[\to \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ por

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $A(t)$ é antisimétrica para todo t. Seja $t_0 \in]a,b[$ e considere a equação a derivadas ordinárias (EDO) com condição inicial

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \mathrm{Id} \text{ e} \\ \dot{M}(t) &= M(t)A(t). \end{aligned}$$

Como esse problema é linear en M, segue pelo teorema fundamental de EDOs que existe uma única função $M :]a,b[\to \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que é solução desse problema. Observe que

$$M(t_0)^t M(t_0) = \mathrm{Id},$$

e que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M(t)^t M(t) &= \dot{M}(t)^t M(t) + M(t)^t \dot{M}(t) \\ &= A(t)^t M(t)^t M(t) + M(t)^t M(t) A(t) \\ &= -A(t) M(t)^t M(t) + M(t)^t M(t) A(t) \\ &= [M(t)^t M(t), A(t)]. \end{aligned}$$

Como a função constante $N(t) := \mathrm{Id}$ também é solução da EDO com condição inícial

$$\begin{aligned} N(t_0) &= \mathrm{Id} \text{ e} \\ \dot{N}(t) &= [N(t), A(t)]. \end{aligned}$$

Segue por unicidade que, para todo t,

$$M(t)^t M(t) = N(t) = \mathrm{Id}.$$

Isto é,

$$M(t) \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3).$$

Seja

$$(T(t), N(t), B(t)) := M(t) \text{ e}$$

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} T(t) dt.$$

Verificamos que γ é uma curva parametrizada por comprimento de arco com referencial de Frenet (T, N, B), curvatura κ e torsão τ.

Para provar unicidade, seja $\gamma' :]a, b[\to \mathbb{R}^3$ uma outra curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura κ e torsão τ e seja

$$M'(t) := (T'(t), N'(t), B'(t)).$$

Trivialmente,

$$M'(t_0)^{-1} M'(t_0) = \mathrm{Id}$$

e, pelo Lema 1.1, para todo t,

$$\frac{\partial}{\partial t} M'(t_0)^{-1} M'(t) = M'(t_0)^{-1} M(t) A(t).$$

Segue pela unicidade que

$$\begin{array}{lll} & M'(t_0)^{-1} M'(t) & = M(t) \\ \therefore & M'(t) & = M'(t_0) M(t) \\ \therefore & T'(t) & = M'(t_0) T(t). \end{array}$$

Integrando as fórmulas para γ' e γ, temos então,

$$\gamma'(t) = M'(t_0)\gamma(t) + U_0,$$

para algum vetor constante $U_0 \in \mathbb{R}^3$, e a unicidade segue. $\square$