**1 - Curvatura geodésica de curvas planas.** Seja $\gamma : ]a,b[ \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Seja

$$T(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

Chamamos $T$ o *campo tangente unitário*. Observe-se que, quando $\gamma$ é parametrizada por comprimento de arco,

$$T(t) = \dot{\gamma}(t).$$

**Exercício:** Sejam $\gamma : ]a,b[ \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma' : ]c,d[ \to \mathbb{R}^2$ curvas regulares. Supomos que $\gamma'$ é uma reparametrização de $\gamma$. Seja $\alpha : ]a,b[ \to ]c,d[$ um difeomorfismo suave tal que $\gamma = \gamma' \circ \alpha$. Sejam $T$ e $T'$ os campos tangentes unitários de $\gamma$ e de $\gamma'$ respectivamente. Mostre que

$$T' = T \circ \alpha.$$

Seja

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a matriz de rotação por $\pi/2$ no sentido positivo. Seja

$$N(t) := JT(t)$$

o *campo normal unitário*.

**Exercício:** Seja

$$\gamma(t) := (r\cos(t), r\mathrm{sen}(t))$$

um círculo centrado na origem. Mostre que

$$N(t) = \frac{\gamma(t)}{r}.$$

Isto é o normal é paralelo à posição. Reciprocamente, seja $\gamma : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ uma curva regular tal que $N(t)$ sempre é paralelo a $\gamma(t)$. Mostre que $\gamma$ é um trecho circular centrado na origem.

**Exercício:** Seja

$$\gamma(t) := e^{at}(\cos(t), \mathrm{sen}(t))$$

uma espiral logarítmica centrada na origem. Mostre que seu campo normal faz um ângulo constante com a sua posição. Reciprocamente, seja $\gamma : ]a,b[ \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular tal que $N(t)$ sempre faça um ângulo constante com $\gamma(t)$. Mostre que $\gamma$ é um trecho de uma espiral logarítmica.

**Lema 1.1**

*Seja $\gamma : ]a,b[ \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Existe uma função $\kappa(t)$ tal que*

$$\dot{T}(t) = -\kappa(t)N(t), \ \text{e}$$
$$\dot{N}(t) = \kappa(t)T(t).$$

*Isto é*

$$(\dot{T}, \dot{N}) = (T, N)\begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

**Prova:** Derivando $\|T(t)\|^2 = 1$, temos

$$\langle \dot{T}(t), T(t) \rangle = 0.$$

Segue que

$$\dot{T} = -\kappa(t)N(t),$$

onde

$$\kappa(t) := -\langle \dot{T}(t), N(t) \rangle.$$

Derivando $\langle T(t), N(t) \rangle = 0$, temos

$$\langle \dot{T}(t), N(t) \rangle = -\langle \dot{N}(t), T(t) \rangle.$$

Segue que

$$\dot{N} = \kappa(t)T(t).$$

Isso completa a prova. $\square$

Chamamos $\kappa$ a *curvatura geodésica* de $\gamma$. Trivialmente, o sinal de $\kappa$ depende da orientação de $N$. De fato, se utilizamos o normal $-N$ no lugar de $N$, teríamos que multiplicar a curvatura $\kappa$ por $-1$.

**Exercício:** Seja $\gamma$ uma curva regular e seja $\kappa$ sua curvatura. Seja $N$ seu campo normal unitário e definimos a curva equidistante por

$$\gamma_r(t) := \gamma(t) + rN(t).$$

Mostre que a curvatura geodésica de $\gamma$ é

$$\kappa_r(t) = \frac{\kappa(t)}{|1 + r\kappa(t)|}.$$

Várias propriedades geométricas da curva podem ser descritas em termos da sua curvatura geodésica.

**Lema 1.2**

*A curva $\gamma$ é um trecho de reta se e somente se $\kappa = 0$.*

**Prova:** Se $\gamma$ é um trecho de reta, então $\dot{T}(t) = 0$ e segue que $\kappa = 0$. Reciprocamente, se $\kappa = 0$, então $\ddot{\gamma} = \dot{T} = 0$. Assim,

$$\gamma(t) = tx + y$$

para constantes $x, y \in \mathbb{R}^2$, e segue que $\gamma$ é um trecho de reta. □

**Lemma 1.3**

*A curva $\gamma$ é um trecho circular com raio $r$ se e somente se $\kappa = 1/r$ é constante.*

**Prova:** Supomos que $\kappa = 1/r$ é constante. Seja

$$X(t) := \gamma(t) - rN(t).$$

Derivando $X$, temos

$$\dot{X}(t) = T(t) - T(t) = 0.$$

Segue que $X =: x_0$ é constante e que, para todo $t$,

$$\gamma(t) \in \{x \mid \|x - x_0\| = r\}.$$

Segue que $\gamma(t)$ é um trecho circular. A recíproca é trivial. □

Terminamos essa seção com o *teorema fundamental de curvas planas*. Esse resultado é o primeiro e o mais simples de uma família de teoremas fundamentais que estudaremos nesse curso.

**Teorema 1.4**

*Seja $\kappa : ]a, b[ \to \mathbb{R}$. A menos de movimentos rígidos do espaço ambiente, existe uma única curva $\gamma : ]a, b[ \to \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura seja igual a $\kappa$.*

**Prova:** Mostramos primeiro a existência. Seja $(e_1, e_2)$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Seja $t_0 \in ]a, b[$. Definimos $\theta : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ por

$$\theta(t) := -\int_{t_0}^{t} \kappa(t)dt.$$

Definimos $T, N : ]a, b[ \to \mathbb{R}^2$ por

$$T(t) := \cos(\theta(t))e_1 + \mathrm{sen}(\theta(t))e_2 \text{ e } N(t) := -\mathrm{sen}(\theta(t))e_1 + \cos(\theta(t))e_2,$$

e seja

$$\gamma(t) := \int_{t_0}^{t} T(t)dt.$$

Verificamos que $\gamma$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco, com campo tangente $T$, campo normal $N$ e curvatura geodésica $\kappa$.

Seja $\gamma'$ outra curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura geodésica $\kappa$. Sejam $T'$ e $N'$ seu campo tangente e seu campo normal, respectivamente. Definimos

$$e_1'(t) := \cos(\theta(t))T'(t) - \mathrm{sen}(\theta(t))N'(t) \text{ e } e_2'(t) := \mathrm{sen}(\theta(t))'T(t) + \cos(\theta(t))N'(t).$$

Verificamos que $e_1'$ e $e_2'$ são constantes. Segue que existe uma rotação $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$e_1' = Re_1 \text{ e } e_2 = Re_2.$$

Segue por linearidade que, para todo $t$,

$$T'(t) = RT(t) \text{ e } N'(t) = RN(t).$$

Integrando essa relação, temos

$$\gamma'(t) = R\gamma(t) + x_0,$$

o que prova unicidade a menos de movimentos rigidos de $\mathbb{R}^2$. $\square$