1 - Curvas no espaço euclidiano. Seja $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^m$ uma imersão. Lembramos que isso significa que $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todo t. Curvas com essa propriedade são ditas *regulares*. Existe uma teoria de curvas não regulares que não vamos estudar aqui.

Exemplo: A curva $\gamma(t) := (t^2, t^3)$ não é regular, pois tem uma cúspide em $(0,0)$.

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ uma curva regular. Definimos seu *comprimento* por

$$L(\gamma) := \operatorname*{Sup}_{a=t_0<\ldots<t_m=b,\ m\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

Em palavras, o comprimento de γ é o supremo dos comprimentos das curvas poligonais que aproximam γ.

Lema 1.1

Para toda curva suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$,

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Prova: Mostramos primeiro que

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Exercício: Mostre que, para todo i,

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Segue que

$$\sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Tomando o supremo de todas as somas dessa forma, temos

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Mostramos agora que

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Como $[a,b]$ é compacto é $\ddot{\gamma}$ é contínua, existe $B > 0$ tal que, para todo t,

$$\|\ddot{\gamma}(t)\| \leq B.$$

Pelo teorema de Taylor

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = (t_{i+1} - t_i)\dot{\gamma}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} |t_{i+1} - s|\,\ddot{\gamma}(s)ds.$$

Segue que

$$|\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| - (t_{i+1} - t_i)\|\dot{\gamma}(t_i)\|| \leq \frac{1}{2}B\,|t_{i+1} - t_i|^2\,.$$

Substituindo

$$t_i := a + \frac{i(b-a)}{m}$$

e fazendo m tender até o infinito, temos

$$L(\gamma) \geq \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)\|\dot{\gamma}(t_i) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt,$$

o que prova o lema. □

Sejam $\gamma_1 :]a,b[\to \mathbb{R}^m$ e $\gamma_2 :]c,d[\to \mathbb{R}^m$ curvas regulares. Dizemos que γ_2 é uma *reparametrização* de γ_1 quando existe um difeomorfismo suave $\alpha :]a,b[\to]c,d[$ tal que

$$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \alpha.$$

Dizemos que a curva $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^m$ é *parametrizada por comprimento de arco* quando

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$$

Teorema 1.2

A menos de uma constante, existem 2 reparametrizações de γ por comprimento de arco.

Prova: Sejam $\gamma_1 :]c_1,d_1[\to \mathbb{R}^m$ e $\gamma_2 :]c_2,d_2[\to \mathbb{R}^m$ reparametrizações de γ por comprimento de arco. Sejam $\alpha_1 :]a,b[\to]c_1,d_1[$ e $\alpha_2 :]a,b[\to]c_2,d_2[$ tais que

$$\gamma(t) = (\gamma_1 \circ \alpha_1)(t) = (\gamma_2 \circ \alpha_2)(t).$$

Aplicando a regra de cadeia, temos, para todo t,

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_1(\alpha_1(t))\dot{\alpha}_1(t) = \dot{\gamma}_2(\alpha_2(t))\dot{\alpha}_2(t).$$

Como $\|\dot{\gamma}_1(s)\| = \|\dot{\gamma}_2(s)\| = 1$ para todo t, segue que,

$$|\dot{\alpha}_1(t)| = |\dot{\alpha}_2(t)| = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Como esses valores são sempre diferentes de zero, segue que, para todo t,

$$\dot{\alpha}_1(t) = \epsilon\dot{\alpha}_2(t),$$

para $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Assim,

$$\alpha_1(t) = \epsilon\alpha_2(t) + c,$$

para uma constante c, o que prova que, a menos de uma constante, no máximo 2 parametrizações de γ por comprimento de arco. A primeira, com $\epsilon = 1$ preserva orientação, e a segunda, com $\epsilon = -1$, inverte orientação.

Para mostrar existência, seja $t_0 \in]a, b[$ e $\epsilon \in \{\pm 1\}$ e definimos

$$\alpha(t) := \int_{t_0}^{t} \epsilon \|\dot{\gamma}(s)\| ds.$$

Seja $\gamma_1 := \gamma \circ \alpha^{-1}$.

Exercício: Mostre que γ_1 é uma reparametrização de γ por comprimento de arco.

Isso completa a prova. □

A partir de agora, supomos que todas as curvas que estudamos são parametrizadas por comprimento de arco. Veremos que isso simplifica as fórmulas que obteremos. É um bom exercício de determinar essas fórmulas no caso das curvas não parametrizadas por comprimento de arco.

Para terminar essa seção, relacionamos a teoria de curvas regulares com a teoria de subvariedades estudada na seção anterior.

Teorema 1.3

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$ uma subvariedade unidimensional conexa.

(1) se X não for compacta, então existe uma parametrização $\gamma : \mathbb{R} \to X$, e

(2) se X for compacta, então existe uma imersão periódica $\gamma : \mathbb{R} \to X$.

Nos dois casos, X é a imagem de γ.

Observe-se que, pelo teorema de imersão, parametrizações existem em todo lugar *localmente*. Isto é, para todo $x_0 \in X$, existe uma parametrização $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to X$ tal que $\gamma(0) = x_0$. O Teorema 1.3 afirma que existe uma parametrização global.

Seja $x_0 \in X$ e definimos $d : X \to \mathbb{R}$ por

$$d(x) := \text{Inf}\{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \to X \text{ imersão, } \gamma(a) = x_0 \text{ e } \gamma(b) = x\}.$$

Lema 1.4

A função d é finita para todo $x \in X$.

Prova: Seja $X_* \subseteq X$ o subconjunto de todos os pontos $x \in X$ tal que existe uma imersão $\gamma : [a, b] \to X$ com $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$.

Exercício: Mostre que X_* é aberto, fechado e não vazio.

Como X é conexo, segue que $X_* = X$. Como $d(x) < \infty$ para todo $x \in X_*$, isso prova o lema. □

Lema 1.5

Seja $x_1 \in X$. Seja $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow X$ uma parametrização por comprimento de arco de um trecho de X tal que $\gamma(0) = x_1$. Reduzindo ϵ se for necessário, temos que

(1) se x_1 for um mínimo local de d, então

$$(d \circ \gamma)(t) = |t|,$$

(2) se x_1 for um máximo local de d, então

$$(d \circ \gamma)(t) = d(x_1) - |t|, \text{ e}$$

(3) se x_1 não for nem um mínimo local, nem um máximo local, então

$$(d \circ \gamma)(t) = d(x_1) + \epsilon t,$$

para $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

Prova: Seja $\gamma :]-3\epsilon, 3\epsilon[\rightarrow X$ uma parametrização por comprimento de arco de um trecho de X tal que $\gamma(0) = x_1$. Se $x_0 = \gamma(t_0)$ para $t_0 \in]-\epsilon, \epsilon[$, então, para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$(d \circ \gamma)(t) = |t - t_0|.$$

Senão, para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$(d \circ \gamma)(t) = \mathrm{Min}((d \circ \gamma)(-\epsilon) + (t + \epsilon), (d \circ \gamma)(\epsilon) + (\epsilon - t)).$$

O resultado segue. $\square$

Segue pelo Lema 1.5 que x_0 é o único mínimo local de d. Também segue por esse lema que o conjunto X_0 de máximos e mínimos de d consiste em pontos isolados. Seja X' um componente convexo de $X \setminus X_0$.

Exercício: Mostre que uma das duas extremidades de X' é x_0.

Segue que $X \setminus X_0$ tem apenas 2 componenentes conexos X_1 e X_2.

Exercício: Mostre que, para cada i, a função d se restringe a um homeomorfismo de X_i num intervalo $]0, a_i[$ de $\mathbb{R}$.

Exercício: Mostre que, para cada i, o inverso da restrição de d a X_i é uma parametrização de X_i.

Para cada i, orientamos γ_i tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_i(t) = x_0.$$

Finalmente existem duas possibilidades.

(1) $X = \{x_0\} \cup X_1 \cup X_2$. Nesse caso, definimos $\gamma :]-a_1, a_2[\to X$ por

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(-t) & \text{se } t < 0, \\ x_0 & \text{se } t = 0 \text{ e} \\ \gamma_2(t) & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Exercício: Mostre que γ é uma parametrização.

(2) $X = \{x_0, x_1\} \cup X_1 \cup X_2$. Nesse caso x_1 é um máximo local de d. Observe-se que x_1 está nos fechados de X_1 e de X_2. Definimos $\gamma :]-a_1, a_2] \to X$ por

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(-t) & \text{se } t < 0, \\ x_0 & \text{se } t = 0 \text{ e} \\ \gamma_2(t) & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Estendemos γ para $\mathbb{R}$ por periodicidade.

Exercício: Mostre que γ é uma imersão.