1 - Variedades. Os objetos da geometria diferencial são as variedades. Heuristicamente, uma variedade é um subconjunto de $\mathbb{R}^{m+n}$ que é em todo lugar localmente parametrizável por um aberto de $\mathbb{R}^m$. Nessa seção, vamos formalizar esse conceito e vamos introduzir uma classe de subconjuntos de $\mathbb{R}^{m+n}$ com essa propriedade. Enfatizamos contudo que essa classe não esgota todos os objetos geométricos que são localmente parametrizáveis, e nem esgota todos os objetos geométricos que merecem ser estudados. Por exemplo, os subconjuntos fractais são objetos geométricos de grande interesse matemática que não são localmente parametrizáveis.

Definição 1.1

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$.

(1) Dizemos que f é uma **submersão** *quando $Df(x)$ é sobrejetiva para todo x.*

(2) Dizemos que f é uma **imersão** *quando $Df(x)$ é injetiva para todo x.*

(3) Dizemos que f é uma **parametrização** *quando ela é uma imersão e é um homeomorfismo sobre a sua imagem $X := f(U)$.*

Observação: Pelo teorema de posto-nulidade, quando f é uma submersão, $n \leq m$, enquanto, quando f é uma imersão, $n \geq m$.

Observação: Com essa definição, a palavra "parametrização" é sinônimo da palavra "mergulo", que é a palavra mais comumente utilizado pelos geômetras. Preferimos utilizar a palavra "parametrização" nesse texto para enfatizar a continuadade entre e a geometria diferencial e a matemática básica estudada nas disciplinas de cálculo.

Exercício*: Seja B uma forma bilinear positiva definida sobre $\mathbb{R}^m$. Mostre que a função

$$f(x) := B(x, x)$$

é uma submersão de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ em $\mathbb{R}$.

Exercício**: Denotamos $\mathrm{Mat}(m)$ o espaço de matrices quadradas de dimensão m sobre $\mathbb{R}$. Denotamos $\mathrm{GL}(m)$ o subespaço de matrices inversibles. Mostre que $\mathrm{GL}(m)$ é um subconjunto aberto de $\mathrm{Mat}(m)$. Mostre que a função

$$\Phi(M) := \mathrm{Det}(M)$$

é uma submersão de $\mathrm{GL}(m)$ em $\mathbb{R}$.

Exercício**: Denotamos $\mathrm{Symm}(m)$ o espaço de matrices quadradas simétricas de dimensão m sobre $\mathbb{R}$. Mostre que a função

$$\Psi(M) := MM^t - \mathrm{Id}$$

é uma submersão de $\mathrm{GL}(m)$ em $\mathrm{Symm}(m)$.

Exercício*: Mostre que a função

$$g(\theta, \phi) := (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta))$$

é uma parametrização de $]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ em $\mathbb{R}^3$. Determine a sua imagen.

Exercício*: Mostre que a função

$$h(x) := \frac{1}{(1 + \|x\|^2)}(2x, 1 - \|x\|^2)$$

é uma parametrização de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}^{d+1}$. Determine a sua imagen.

Exercício*: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ suave. Mostre que

$$F(x, y) := y - f(x)$$

é uma submersão de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\hat{f}(x) := (x, f(x))$$

é uma parametrização de Ω em $\mathbb{R}^{m+n}$. Mostre que

$$\mathrm{Im}(\hat{f}) = F^{-1}(\{0\}).$$

Definição 1.2

Dizemos que um subconjunto X de $\mathbb{R}^{m+n}$ é uma **variedade** *(de* **dimensão** *m e de* **codimensão** *n) quando, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança Ω de x em $\mathbb{R}^{m+n}$ e uma submersão $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$X \cap \Omega = f^{-1}(\{0\}).$$

Em outras palavras, uma **variedade** *é um subconjunto de $\mathbb{R}^{m+n}$ que é em todo lugar localmente o conjunto de nível de alguma submersão.*

Exercício*: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ suave. Denotamos $\mathrm{Gr}(f)$ o **gráfico** de f. Isto é

$$\mathrm{Gr}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Mostre que $\mathrm{Gr}(f)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{m+n}$. Determine a sua dimensão.

Exercício*: Denotamos por $\mathrm{SL}(m)$ o grupo linear especial de $\mathbb{R}^m$. Mostre que $\mathrm{SL}(m)$ é uma subvariedade de $\mathrm{Mat}(m)$. Determine a sua dimensão.

Exercício*: Denotamos por $\mathrm{O}(m)$ o grupo de matrices ortogonais sobre $\mathbb{R}^m$. Mostre que $\mathrm{O}(m)$ é uma subvariedade de $\mathrm{Mat}(m)$. Determine a sua dimensão.

2 - Os teoremas fundamentais da geometria diferencial. Nessa seção, introduzimos as ferramentas que permitem mostrar que toda subvariedade é localmente parametrizável e que, reciprocamente, a imagen de toda parametrização é uma subvariedade. O núcleo dessa teoria é o teorema de função inversa.

Teorema 2.1, Teorema de função inversa

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ suave. Seja $x_0 \in \Omega$. Se $Df(x_0)$ é inversível, então existem

(1) uma vizinhança U de x_0 em Ω,

(2) uma vizinhança V de $y_0 := f(x_0)$ em $\mathbb{R}^m$, e

(3) um difeomorfismo suave $g : V \to U$

tais que, para todo $x \in U$,

$$(g \circ f)(x) = x.$$

Teorema 2.2, Teorema de submersão

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma submersão. Então, para todo $x_0 \in \Omega$, existem

(1) uma vizinhança U de x_0 em Ω,

(2) uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$,

(3) uma vizinhança W de $z_0 := f(x_0)$ em $\mathbb{R}^n$, e

(4) um difeomorfismo $g : V \times W \to U$

tais que, para todo $(y, z) \in V \times W$,

$$(f \circ g)(y, z) = z.$$

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$. Seja $E := \mathrm{Ker}(Df(x_0))$. Como f é uma submersão, segue pelo teorema de posto-nulidade que $\mathrm{Dim}(E) = n$. Seja $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to E$ uma projeção. Definimos $\tilde{f} : \Omega \to E \oplus \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{f}(x) := (\pi(x - x_0), f(x)).$$

Verificamos que $D\tilde{f}(x_0)$ é inversível. Segue pelo teorema da função inversa que existem uma vizinhança $\tilde{U}$ de x_0 em Ω, uma vizinhança $\tilde{W}$ de $(0, z_0)$ em $E \oplus \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $\tilde{g} : \tilde{W} \to \tilde{U}$ tais que, para todo $x \in \tilde{U}$,

$$(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x) = x.$$

Como $\tilde{g}$ é um difeomorfismo, para todo $(y, z) \in \tilde{W}$,

$$\begin{aligned}
&(\tilde{f} \circ \tilde{g})(y, z) = (\tilde{g}^{-1} \circ (\tilde{g} \circ \tilde{f}) \circ \tilde{f})(y, z) = (\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{g})(y, z) = (y, z) \\
\Rightarrow &(f \circ \tilde{g})(y, z) = (\pi_2 \circ (\tilde{f} \circ \tilde{g}))(y, z) = \pi_2(y, z) = z,
\end{aligned}$$

onde $\pi_2 : E \oplus \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a projeção sobre o segundo fator. Sejam V uma vizinhança de 0 em E e W uma vizinhança de z_0 em $\mathbb{R}^n$ tais que $V \times W \subseteq \tilde{W}$. Denotamos $U := \tilde{g}(V \times W)$ e $\tilde{g} := g|_{V \times W}$. Verificamos que U, V, W e g são os abertos e a função desejados. $\square$

Teorema 2.3

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma variedade de dimensão m. Para todo $x_0 \in X$, existem

(1) uma vizinhança U de x_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$,

(2) uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$,

(3) uma vizinhança W de 0 em $\mathbb{R}^n$, e

(4) um difeomorfismo $\Phi : V \times W \to U$

tais que

$$X \cap U = \Phi(V \times \{0\}).$$

Observação: Esse teorema significa que toda variedade é localmente aplanível. Em outros termos, a menos de um difeomorfismo de um aberto do espaço ambiente, toda variedade é em todo lugar localmente um aberto de um subespaço afim.

Prova: Seja $x_0 \in X$. Como X é uma subvariedade, existem uma vizinhança Ω de x_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$ e uma submersão $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tais que $X \cap \Omega = f^{-1}(\{0\})$. Pelo teorema da submersão, existem uma vizinhança U de x_0 em Ω, uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$, uma vizinhança W de 0 em $\mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $g : V \times W \to U$ tais que, para todo $(y, z) \in V \times W$,

$$(f \circ g)(y, z) = z.$$

Afirmamos que $X \cap U = g(V \times \{0\})$. Seja primeiro $x = g(y, z) \in X \cap U$. Então

$$z = (f \circ g)(y, z) = f(x) = 0,$$

e, como $x \in X \cap U$ é qualquer, segue que $X \cap U \subseteq g(V \times \{0\})$. Seja agora $x = g(y, 0) \in g(V \times \{0\})$. Então

$$f(x) = (f \circ g)(y, 0) = 0,$$

e, como $x \in g(V \times \{0\})$ é qualquer, segue que $f(V \times \{0\}) \subseteq X \cap U$. Concluímos que esses dois subconjuntos coincidem, como afirmado. $\square$

Teorema 2.4

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma variedade de dimensão m. Para todo $x_0 \in X$, existe,

(1) uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^m$,

(2) uma vizinhança V de x_0 em X, e

(3) uma parametrização $\Phi : U \to V$.

Em outras palavras, toda variedade é em todo lugar localmente parametrizável.

Prova: Pelo Teorema 2.3, existem uma vizinhança $\tilde{U}$ de x_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$, uma vizinhança $\tilde{V}$ de 0 em $\mathbb{R}^m$, uma vizinhança $\tilde{W}$ de 0 em $\mathbb{R}^n$ e um difeomorphismo $\tilde{\Phi} : \tilde{V} \times \tilde{W} \to \tilde{U}$ tais que $X \cap \tilde{U} = \tilde{\Phi}(\tilde{V} \times \{0\})$. Verficamos que $U := \tilde{V}$, $V := X \cap \tilde{U}$ e $\Phi(x) := \tilde{\Phi}(x, 0)$ são respectivamente as vizinhanças e parametrização desejadas, o que completa a prova. $\square$

Teorema 2.5, Teorema de imersão

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão. Então, para todo $x_0 \in \Omega$, existem

(1) uma vizinhança U de x_0 em Ω,

(2) uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^n$,

(3) uma vizinhança W de $z_0 := f(x_0)$ em $\mathbb{R}^m$, e

(4) um difeomorfismo $g : W \to U \times V$

tais que $f(U) \subseteq W$ e, para todo $x \in U$,

$$(g \circ f)(x) = (x, 0).$$

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$. Seja $E \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ tal que

$$\mathbb{R}^{m+n} = \mathrm{Im}(Df(x)) \oplus E.$$

Como f é uma imersão, pelo teorema de posto-nulidade, $\mathrm{Dim}(E) = n$. Definimos $\tilde{f} : \Omega \times E \to \mathbb{R}^{m+n}$ por

$$\tilde{f}(x, y) := f(x) + y.$$

Verificamos que $D\tilde{f}(x_0, 0)$ é inversível. Segue pelo teorema de função inversa que existem uma vizinhança $\tilde{U}$ de $(x_0, 0)$ em $\Omega \times E$, uma vizinhança $\tilde{W}$ de $z_0 = f(x_0) = \tilde{f}(x_0, 0)$ em $\mathbb{R}^{m+n}$ e um difeomorfismo $\tilde{g} : \tilde{W} \to \tilde{U}$ tal que, para todo $(x, y) \in \tilde{U}$,

$$(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x, z) = (x, z).$$

Sejam U uma vizinhança de x_0 em Ω e V uma vizinhança de 0 em E tais que $U \times V \subseteq \tilde{U}$. Denotamos $W := \tilde{g}^{-1}(U \times V)$ e $g := \tilde{g}|_W$. Verificamos que U, V, W e g são os abertos e a função desejados. $\square$

Teorema 2.6

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma parametrização. Então $X := f(\Omega)$ é uma variedade de dimensão m. Em outras palavras, a imagem de todo mergulho é uma variedade.

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$ e denotamos $y_0 := f(x_0)$. Pelo teorema de imersão, existem uma vizinhança $\tilde{U}$ de x_0 em Ω, uma vizinhança $\tilde{V}$ de 0 em $\mathbb{R}^n$, uma vizinhança $\tilde{W}$ de y_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$ e um difeomorfismo $\tilde{g} : \tilde{W} \to \tilde{U} \times \tilde{V}$ tais que $f(\tilde{U}) \subseteq \tilde{W}$ e, para todo $x \in \tilde{U}$,

$$(\tilde{g} \circ f)(x) = (x, 0).$$

Como f é um homeomorfismo sobre a sua imagem, existe um aberto $\tilde{W}' \subseteq \tilde{W}$ tal que $f(\tilde{U}) = \tilde{W}' \cap X$. Sejam U uma vizinhança de x_0 em $\tilde{U}$ e V uma vizinhança de 0 em $\tilde{V}$ tais que $U \times V \subseteq \tilde{g}(\tilde{W}')$. Denotamos $W := \tilde{g}^{-1}(U \times V)$ e $g := \tilde{g}|_W$.

Afirmamos que

$$X \cap W = g^{-1}(U \times \{0\}).$$

Seja primeiro $z = g^{-1}(x, 0) \in g^{-1}(U \times \{0\})$. Então,

$$z = g^{-1}(x, 0) = (g^{-1} \circ (g \circ f))(x) = f(x) \in X.$$

Como $z \in g^{-1}(U \times \{0\})$ é qualquer, segue que $g^{-1}(U \times \{0\}) \subseteq X \cap W$. Seja agora $z \in X \cap W$. Em particular,

$$z \in X \cap W \subseteq X \cap \tilde{W}' = f(\tilde{U}).$$

Segue que

$$g(z) \in (g \circ f)(\tilde{U}) \subseteq \tilde{U} \times \{0\}\,,$$

e que

$$z \in W \cap g^{-1}(\tilde{U} \times \{0\}) = g^{-1}(U \times V) \cap g^{-1}(\tilde{U} \times \{0\}) = g^{-1}(U \times \{0\}).$$

Como $z \in X \cap W$ é qualquer, segue que $X \cap W \subseteq g^{-1}(U \times \{0\})$. Isso prova a afirmação.

Finalmente, seja $\pi_2 : U \times V \to V$ a projeção sobre o segundo fator. Como π_2 é uma submersão e g é um difeomorfismo, $h := \pi_2 \circ g$ também é uma submersão. Como

$$X \cap W = g^{-1}(U \times \{0\}) = h^{-1}(\{0\}),$$

segue que x é uma subvariedade, como desejado. $\square$