Tópicos

em

Equações Diferenciais Parciais

Parte I

Luis Adauto Medeiros
Instituto de Matemática - UFRJ

IM-UFRJ - Abril de 2005
Rio de Janeiro - RJ

M488T

Medeiros, Luís Adauto da Justa, 1926-

Tópicos em equações diferenciais parciais/L.A. Medeiros.—Rio de Janeiro:UFRJ/IM, 2006.

2pt. ; 21cm

Inclui Bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais. I. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática II.Título.

CDD-515.353

ISBN: 85-87674-15-3

Prefácio

Este livro é parte de um projeto de divulgação das aulas ministradas na Pós-Graduação do IM-UFRJ, ao longo dos últimos trinta anos.

O modelo de equação hiperbólica com pressão, de Gladson Antunes e Fagner Araruna, baseia-se em um modelo sugerido por Jacques Louis Lions, em comunicação pessoal, feita na Escola Latino-Americana em Lima, Peru, 1978. Posteriormente, encontrou-se uma interpretação física, consultar dedução no texto, ver também a referência [5] do capítulo 3, página 94.

O artigo sobre Equações de Evolução em Variedades é uma contribuição de Fagner Araruna e Marcos Araújo sobre o método de aproximação por sistemas de Cauchy-Kowalevsky.

Agradecemos aos colegas Rubens Crippa, Nirzi Andrade, Milla Miranda, Angela Biazutti pelas observações construtivas sobre o texto e em particular ao longo dos anos de convivência no IM-UFRJ.

Rio de Janeiro, abril de 2005

L.A. Medeiros

Sumário

Vector Distributions

and

Applications

Luis Adauto Medeiros
Instituto de Matemática - UFRJ

IM-UFRJ - Julho de 1994

Rio de Janeiro - RJ

Introduction

We enclose in this text a set of lectures given by the author in Instituto de Matemática - UFRJ. The objective is introduce students in the new methods for the study of non-linear problems in partial differential equations.

I will like express my thanks to Angela Biazutti for her constructives remarks on the initial manuscript.

Teresópolis, 1994

L.A. Medeiros

1.1 Vector Distributions

Let us consider the open interval $]0,T[,\quad T>0$, of the real line $\mathbb{R}$ and a real Banach space X. Represent by $L^p(0,T;X),\quad 1\le p\le+\infty$, the vector space of the applications $u\colon]0,T[\to X$ such that, for each $s\in[0,T[$, the vector $u(s)\in X$ is strongly measurable on $]0,T[$ and the norm $\|u(s)\|_X$ belongs to $L^p(0,T)$. In $L^p(0,T;X)$ we define the norm:

$$\|u\|^p_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T \|u(x)\|^p_X \, ds$$

for $1\le p<\infty$ and

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<s<T} \|u(s)\|_X \, .$$

With this norm it follows that $L^p(0,T;X)$ is a Banach space.

Let u be in $L^p(0,T;X)$ and $\phi\in\mathcal{D}(0,T)$, space of infinitely differentiable functions on $]0,T[$, with compact support on $]0,T[$, equipped with the notion of convergence introduced by Laurent Schwartz. We associate to such u the mapping τ_u form $\mathcal{D}(0,T)$ into X, defined by

$$\langle\tau_u,\phi\rangle = \int_0^T u(s)\phi(s)\,ds, \tag{1.1}$$

with the integral calculated in X. The mapping τ_u , above defined, is linear and continuous on $\mathcal{D}(0,T)$. Therefore, τ_u is a distribution on $]0,T[$, called vector distribution on $]0,T[$, defined by u of $L^p(0,T;X)$, with value in X. Then τ_u is a continuous linear mapping from $\mathcal{D}(0,T)$, on X, that is $\tau_u\in\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$, space of continuous linear transformations from $\mathcal{D}(0,T)$ into X. In general the space $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$ is called the space of vector distributions on $]0,T[$ with value in X. In particular τ_u is one of those distributions, precisely, that one defined by $u \subset L^p(0,T;X)$. The space of all distributions defined on $]0,T[$ with value in X is represented by $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Therefore, the distribution τ_u is an object of $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Lemma 1. If $u \in L^1(0,T;X)$ and

$$\int_0^T u(s)\phi(s)\, ds = 0 \tag{1.2}$$

for all $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$, then $u(t) = 0$ a.e. in $]0,T[$.

Proof: In fact, let $\tilde{u}$ the function defined on $\mathbb{R}$ such that $\tilde{u} = u$ on $[0,T]$ and $\tilde{u} = 0$ on the complement. For $\varepsilon > 0$ let us consider $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon > 0$ the regularizing family of even functions $\rho_\varepsilon \geq 0$, with $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(s)\, ds = 1$. Then $\theta * \rho_\varepsilon$ defined by

$$\rho_\varepsilon * \theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(t-s)\theta(s)\, ds$$

belongs to $\mathcal{D}(0,T)$.

We have, by (1.2),

$$\int_0^T u(t)(\rho_\varepsilon * \theta)(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(t)(\rho_\varepsilon * \theta)(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_\varepsilon * \tilde{u})(t)\theta(t)\, dt = 0$$

for all $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. For this integral to be zero, it is necessary that $\rho_\varepsilon * \tilde{u}$ be zero in $[\eta, T-\eta]$, $\eta > 0$, containing the support of θ. When $\varepsilon \to 0$ we know that $\rho_\varepsilon * \tilde{u} \to \tilde{u}$ in $L^1(-\infty,+\infty;X)$. Then, $\tilde{u} = 0$ in $[\eta, T-\eta]$, $\eta > 0$ arbitrary. Then $u = 0$ on $[0,T]$. $\square$

As a consequence of the Lemma 1, it follows that τ_u is unically defined by $u \in L^p(0,T;X)$. Then we identify τ_u to the vector $u \in L^p(0,T;X)$, and we say that u is a distribution defined on $]0,T[$ with values on X. We write $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$. Then each $u \in L^p(0,T;X)$ is derivable in the sense of distribution $\mathcal{D}'(0,T;X)$, that is,

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \tag{1.3}$$

for all $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. The object $\dfrac{du}{dt}$ is called the derivative of u in distributional sense on $[0,T]$.

In general, we have

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u, \frac{d^n \phi}{dt^n} \right\rangle \tag{1.4}$$

for all $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

We represent by $u^{(n)}$ the derivative $\dfrac{d^n u}{dt^n}$ and by u', u'' the first and second derivative of u.

Lemma 2. If $u \in L^1(0,T;X)$ and

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = 0$$

for all $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, then u is constant.

Note that the Lemma 2 says that if $u \in L^1(0,T;X)$ has distributional derivative zero, then u is constant.

Before proving Lemma 2, observe that a necessary and sufficient condition for $\varphi_0 \in \mathcal{D}(0,T)$ be derivative of $\varphi_1 \in \mathcal{D}(0,T)$ is that

$$\int_0^T \varphi_0(s)\,ds = 0. \tag{1.5}$$

In fact, if $\varphi_0 = \varphi_1'$, integrating on $[0,T]$ we obtain (1.5). If we have (1.5), defining

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \varphi_0(s)\,ds,$$

we obtain $\varphi_1 \in \mathcal{D}(0,T)$.

Proof of the Lemma 2: There exists $\rho \in \mathcal{D}(0,T)$ such that $\displaystyle\int_0^T \rho(s)\,ds = 1$. Given $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, the function

$$\varphi_0(t) = \varphi(t) - \rho(t)\int_0^T \varphi(s)\,ds$$

belongs to $\mathcal{D}(0,T)$ and

$$\int_0^T \varphi_0(t)\,dt = 0.$$

It follows that there exists $\varphi_1 \in \mathcal{D}(0,T)$ such that $\varphi_1' = \varphi_0$. We have by hypothesis:

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = 0, \quad \text{for all} \quad \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{1.6}$$

Taking $\varphi = \varphi_1$, in (1.6), we obtain

$$\int_0^T u(t)\left[\varphi(t) - \rho(t)\int_0^T \varphi(s)\,ds\right] dt = 0$$

or

$$\langle u, \varphi\rangle - \langle u, \rho\rangle \int_0^T \varphi(s)\,ds = 0.$$

If we write $c = \langle u, \rho\rangle$, we obtain

$$\langle u, \varphi\rangle - \langle c, \varphi\rangle \quad \text{for all} \quad \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

that is,

$$u = c \quad \text{in the sense of distributions on} \quad [0,t].$$

$\square$

Lemma 3. Let X be a Banach space whose dual is represented by X'. If u, g belong to $L^1(0,T;X)$, the following conditions are equivalent:

(i) u is a.e. equal to a primitive of g, i.e.,

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds, \quad \xi \in X, \quad \text{independent of } t.$$

(ii) For each $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, we have:

$$\int_0^t u(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds.$$

(iii) For each $x' \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle = \langle g(t), x'\rangle$$

in the sense of the distributions on $(0,T)$.

Remark 1. If (i) or (ii) is true, the function u is, in particular, a continuous function from $[0,T]$ on X, that is, $u \in C^0([0,T];X)$.

Proof: (i) implies (ii).

In fact, let u, g such that

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds \quad \text{a.e. on} \quad [0,T].\ \xi \ \text{ constant.}$$

Multiply by φ', $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, integrate on $[0,T]$. We have:

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = \int_0^T \xi\varphi'(t)\,dt + \int_0^T \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\varphi'(t)\,dt.$$

The first integral on the right hand side is zero, because ξ is constant and $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$. Integrating by parts the second integral, what is permissible, we obtain:

$$\int_0^T \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\varphi'(t)\,dt = \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\varphi(t)\Big|_0^T - \int_0^T g(s)\varphi(s)\,ds.$$

Therefore,

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T g(s)\varphi(s)\,ds.$$

(i) implies (iii).

From (i), for each $x' \in X'$, we obtain:

$$\langle u(t), x'\rangle = \langle \xi, x'\rangle + \left\langle \int_0^t g(s)\,ds, x'\right\rangle.$$

Taking the derivative in the sense of the distributions on $[0,T]$, we get:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle, \varphi\right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\langle \xi, x'\rangle, \varphi\right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}\left\langle \int_0^t g(s)\,ds, x'\right\rangle, \varphi\right\rangle \tag{1.7}$$

for all $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

$$\left\langle \frac{d}{dt}\langle \xi, x'\rangle, \varphi\right\rangle = 0 \quad \langle \xi, x'\rangle \ \text{ is constant.}$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left\langle \int_0^t g(s)\,ds, x'\right\rangle, \varphi\right\rangle = -\int_0^T \left(\int_0^t \langle g(s), x'\rangle\,ds\right)\varphi'(t)\,dt. \tag{1.8}$$

Integrating the right hand side by parts, we get:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left\langle \int_0^t g(s)ds, x' \right\rangle, \varphi \right\rangle = +\int_0^T \langle g(t), x'\rangle\, \varphi(t)\, dt \tag{1.9}$$

for all $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, then from (1.8), (1.9), we obtain for (1.7),

$$\left\langle \frac{d}{dt}\,\langle u(t), x'\rangle\,, \varphi \right\rangle = \langle\langle g(t), x'\rangle\,, \varphi\rangle$$

or

$$\frac{d}{dt}\,\langle u(t), x'\rangle = \langle g(t), x'\rangle \tag{1.10}$$

for all $x' \in X'$.

(iii) implies (ii).

Suppose (1.10) is true for all $x' \in X$. Then, for all $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ we have:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\,\langle u(t), x'\rangle\,, \varphi \right\rangle = \langle\langle g(t), x'\rangle\,, \varphi\rangle$$

or

$$-\int_0^T \langle u(t), x'\rangle\,, \varphi'\, dt = \int_0^T \langle g(t), x'\rangle\, \varphi(t)\, dt.$$

This implies

$$\left\langle -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\, dt, x' \right\rangle = \left\langle \int_0^T g(t)\varphi(t)\, dt, x' \right\rangle.$$

Thus,

$$-\int_0^T u(t), \varphi'(t)\, dt = -\int_0^T g(t), \varphi(t)\, dt.$$

(ii) implies (i).

In fact, let ν be defined on $[0,T]$ by:

$$\nu(t) = u(t) - \int_0^t g(s)\, ds,$$

which belongs to $L^1(0,T;X)$. Taking the derivative of $\nu(t)$ in the sense of distributions on $]0,T[$, we obtain:

$$\langle \nu(t), \varphi'\rangle = -\,\langle \nu'(t), \varphi\rangle = \langle u(t), \varphi'\rangle = \left\langle \int_0^t g(s)\, ds, \varphi' \right\rangle$$

for all $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Integrating by parts the last term in the right hand side, we get:

$$\langle v'(t), \varphi \rangle = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt - \int_0^T g(t)\varphi(t)\,dt = 0$$

by (ii). Whence

$$\langle v'(t), \varphi \rangle = 0 \quad \text{for all} \quad \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

By Lemma 2, it follows that v is a constant ξ, that is,

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds.$$

$\square$

Corollary 1. Let X, Y be two Banach spaces, such that $X \subset Y$ with continuous injection. If

$$u \in L^1(0,T;X) \quad \text{and} \quad \frac{du}{dt} \in L^1(0,T;Y), \tag{1.11}$$

then $u \in C^0([0,T];Y)$.

Proof: In fact, u belongs to $L^1(0,T;Y)$ because $X \subset Y$ is continuous. Then we have $u, g = \dfrac{du}{dt}$ belong to $L^1(0,T;Y)$. Since $\dfrac{du}{dt} \in L^1(0,T;Y)$ then by definition of vector distribution:

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle = \int_0^T \frac{du}{dt}(s)\varphi(s)\,ds. \tag{1.12}$$

By definition of derivative:

$$-\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^T u(s)\varphi'(s)\,ds. \tag{1.13}$$

Note that (1.12), (1.13) imply (ii) of the Lemma 3, with $g = \dfrac{du}{dt}\cdot$

Thus Corollary 1 implies that u satisfying (1.12), (1.13) is equal, a.e. to a continuous function from $[0,T]$ into Y. We write $u \in C^0([0,T];Y)$. $\square$

There is a direct proof of Corolary 1, in J.-L. Lions [2] or W.A. Strauss [8].

In the following it will be proved a result to be applied in the study of mixed problems for partial differential equation, usually called weak regularity.

By $C_s([0,T];Y)$, we represent the space of weakly continuous functions form $[0,T]$ into Y. This means that the mapping $t \to \langle u(t), y' \rangle$ is continuous on $[0,T]$ for all $y' \in Y'$ dual of Y. Note that this functions are also called scalar continuous functions.

Theorem 1. Let X, Y be two Banach spaces, X reflexive. Suppose $X \subset Y$ dense and the injection of X in Y continuous. Then:

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s([0,T].Y) = C_s([0,T].X). \tag{1.14}$$

Proof: The second hand side of (1.13) is contained in the first, because $Y' \subset X'$ continuous and dense.

Let us prove that the first hand side of (1.13) is included in the second. For this, it is sufficient to prove that:

$$u(t) \in X \quad \text{for all} \quad t \in [0,T] \quad \text{and} \quad \|u(t)\|_X < M. \tag{1.15}$$

M is constant on $[0,T]$.

In fact, suppose (1.15) true for all $t \in [0,T]$. Since X is reflexive, for each net $t_m \to t_0$ in $[0,T]$, there exists a subnet t_n of t_m such that

$$u(t_n) \to X \quad \text{weakly in} \quad X$$

or

$$\langle u(t_n), x' \rangle \to \langle \chi, x' \rangle\,, \quad \text{for all} \quad x' \in X'. \tag{1.16}$$

By hypothesis $u \in C_s([0,T];Y)$. Then, since $t_n \to t_0$, we obtain:

$$\langle u(t_n), y' \rangle \to \langle u(t_0), y' \rangle\,, \quad \text{for all} \quad y' \in Y'. \tag{1.17}$$

From $X \subset Y$ continuous and dense, it follows that $Y' \subset X'$ is continuous and dense. We dream to prove that $\chi = u(t_0)$. Let us prove that (1.17) is true for all $x' \in X'$. Y' is dense in X', then for each $\varepsilon > 0$, exists $y'_\varepsilon \in Y'$ such that $\|y'_\varepsilon - x'\|_{X'} < \varepsilon$. From (1.17), we obtain:

$$|\langle u(t_n) - u(t_0), x' \rangle| \leq |\langle u(t_n) - u(t_0), y'_\varepsilon - x' \rangle| + |\langle u(t_n) - u(t_0), y'_\varepsilon \rangle| .$$

Since $u \in L^\infty(0,T;X)$, we obtain:

$$|\langle u(t_n) - u(t_0), x' \rangle| \leq 2 \|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} \|y'_\varepsilon - x'\| + |\langle u(t_n) - u(t_0), y'_\varepsilon \rangle| . \tag{1.18}$$

The right hand side of (1.18) goes to zero when $\varepsilon \to 0$, by (1.17) and by approximation of x' by y'_ε. Then

$$\langle u(t_n), x' \rangle \to \langle u(t_0), x' \rangle \quad \text{for all} \quad x' \in X',$$

that is, (1.17) is true for all $x' \in X'$, which implies:

$$\chi = u(t_0),$$

which means that:

$$u \in C_s([0,T].Y).$$

To achieve the proof of the Theorem 1, we need to prove (1.15), what shall be done by the method of regularization.

In fact, let us define $\tilde{u}$ as the function that is equal to u on $[0,T]$ and zero on the complement. Represent by $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a regularizing sequence, that is, $\rho_n \geq 0$, even, infinitely differentiable on $\mathbb{R}$, with compact support and $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(s)\, ds = 1$. We have $\tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R};X)$. Let us consider

$$\tilde{u} * \rho_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(t-s)\rho_n(s)\, ds.$$

We have:

$$\|\tilde{u} * \rho_n(t)\|_X \leq \int_{\mathbb{R}} \|\tilde{u}(t-s)\|_X\, \rho_n(s)\, ds \leq M,$$

where

$$M = \text{ess}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|\tilde{u}(\xi)\|_X$$

$$\|\tilde{u} * \rho_n(t)\|_X \le M \quad \text{on} \quad [0,T]. \tag{1.19}$$

Then, since X is reflexive, there exists a subsequence $(\rho_\nu)_\nu \in \mathbb{N}$ such that:

$$\tilde{u} * \rho_\nu(t) \to \hat{u}(t) \quad \text{weak on} \quad X, \;\; \forall\, t \in [0,T] \tag{1.20}$$

and evidently, $\widehat{\tilde{u}}(t) \in X$.

From the lower semicontinuity of the norm, we obtain:

$$\left\|\widehat{\tilde{u}}(t)\right\|_X \le M. \tag{1.21}$$

Therefore, to prove (1.15) it is sufficient to prove that $\widehat{\tilde{u}}(t) = u(t)$.

In fact, $u \in C_s([0,T];Y)$, then:

$$t \longmapsto \langle \tilde{u}(t), y' \rangle\,, \quad \text{for all} \quad y' \in Y'$$

is continuous on $[0,T]$. Then

$$\rho_\nu * \langle \tilde{u}(t), y' \rangle \to \langle \tilde{u}(t), y' \rangle \quad \text{in} \quad C^0(\mathbb{R}),$$

for all $y' \in Y'$. We obtain:

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{u} * \rho_\nu(t) - \tilde{u}(t), y' \rangle = \langle \tilde{u} * \rho_\nu(t), y' \rangle - \langle \tilde{u}(t), y' \rangle = \\
&= \left\langle \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(t-s)\rho_\nu(s)ds, y' \right\rangle - \langle \tilde{u}(t), y' \rangle = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \rho_\nu(s)\, \langle \tilde{u}(t-s), y' \rangle \; ds - \langle \tilde{u}(t), y' \rangle = \\
&= \rho_\nu(s) * \langle \tilde{u}(t-s), y' \rangle - \langle \tilde{u}(t), y' \rangle \to 0 \text{ on } C^0(\mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

From (1.22) it then follows:

$$- \langle \tilde{u} * \rho_\nu(t), y' \rangle \to \langle \tilde{u}(t), y' \rangle \quad \text{for all} \quad y' \in Y'.$$

Therefore

$$\tilde{u} * \rho_\nu(t) \to \tilde{u}(t) \quad \text{weakly on} \quad Y. \tag{1.23}$$

Since $Y' \subset X'$ is dense, we obtain form (1.23) and (1.20), (1.21) that $\widehat{u}(t) = \tilde{u}(t)$, and

$$u(t) \in X, \quad \|u(t)\|_X \leq M \quad \text{on} \quad [0,T].$$

□

1.2 Linear Equations

Let us consider two Hilbert spaces V, H. We suppose $V \subset H$ with dense and continuous injection. Then we have for the duals $H' \subset V'$ dense and continuous injection. We identify H to H', so we have

$$V \subset H = H' \subset V'. \tag{1.24}$$

The inner products and norms in H and V, are, respectively, denoted by $(\ ,\ )$; $|\cdot|$; $((\ ,\ ))$; $\|\cdot\|$. From (1.24) it follows that if $f \in H$, $v \in V$ then

$$\langle f, v\rangle = (f, v) \tag{1.25}$$

when $\langle\ ,\ \rangle$ is the duality between V' and V.

For each $u \in V$, the mapping

$$v \longmapsto ((u, v))$$

is a linear continuous form. Therefore, there exists a unique $Au \in V'$ such that

$$\langle Au, v\rangle = ((u, v)) \quad \text{for all} \quad v \in V.$$

We prove that the function $u \longmapsto Au$, from $V \to V'$, is linear, continuous and for each $f \in V'$ there exists $u \in V$ such that $Au = f$. Then A is an isomorphism from V into V'.

In general we consider $A + \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$, in order to obtain isomorphism from V to V'.

Theorem 1. Given

$$u_0 \in V; \quad u_1 \in H; \quad f \in L^2(0, T; H),$$

find $u\colon]0, T[\to V$ such that

$$\left| \begin{array}{l} u'' + Au = f \ \text{ in weak sense} \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \end{array} \right.$$

There are large classes of boundary value problems in Sobolev's spaces that can be includes in the framework of the Problem 1.

The Theorem 2 below is a particular case of a general theorem proved by J.-L. Lions (cf. his book Controle Optimal de Systèmes Governés par des Équations Aux Derivées Partielles, Dunod, Paris, 1968).

Theorem 2. Given

$$u_0 \in V; \quad u_1 \in H; \quad f \in L^2(0, T; H),$$

there exists only one $u\colon]0, T[\to V$ satisfying the conditions:

$$u \in L^\infty(0, T; V) \tag{1.26}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H) \tag{1.27}$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + ((u(t), v)) = (f(t), v) \tag{1.28}$$

for all $v \in V$, in the sense of the distributions on $]0, T[$.

$$u'' \in L^2(0, T; V') \text{ and } u'' + Au = f \text{ in the sense of } L^2(0, T; V') \tag{1.29}$$

$$u(0) = u_0\,,\ u'(0) = u_1\,. \tag{1.30}$$

Proof: We shall do the proof when V is separable. Let $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ be a Hilbertian basis of V (cf. H. Brezis [1]) and let $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ be the subspace of V generated by the first m vectors w_ν.

Approximate Problem

$$
(1.31) \qquad \left|\begin{array}{l}
\text{Find } u_m(t) \subset V_m\,, \text{ such that,} \\
(u''_m(t), v) + ((u_m(t), v)) = (f, v),\ \forall\, v \in V_m\,, \\
u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ strongly in } V \\
u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ strongly in } H.
\end{array}\right.
$$

The linear system of ordinary differential equations (1.31) has solution on $[0, t_m]$, $t_m < T$. To extend the aproximate solution to $[0, T]$ we need estimates as we shall obtain.

A priori estimate

Let $v = 2u'_m(t)$ in (1.31). We get:

$$
-\frac{d}{dt}\,|u'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\,\|u_m(t)\|^2 = 2(f, u'_m).
$$

Integrating from 0 to $t < t_m$, we have:

$$
(1.32) \qquad |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \le |u_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2 + \int_0^T |f(s)|^2\, ds + \int_0^t |u'_m(s)|^2\, ds.
$$

From the convergences in (1.31), Gronwall's Lemma, (1.32) implies

$$
(1.33) \qquad |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 < c \quad \text{on} \quad [0, T].
$$

Then,

$$
(1.34) \qquad u_m \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0, T; V)
$$

$$
(1.35) \qquad u'_m \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0, T; H)
$$

It follows from (1.34), (1.35) and weak star compactness of bounded sets in a Banach space, that there exists a subsequence u_ν of u_m, such that

$$
(1.36) \qquad u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{weak star in} \quad L^\infty(0, T; V)
$$

$$u'_\nu \rightharpoonup u' \quad \text{weak star in} \quad L^\infty(0,T;H) \tag{1.37}$$

We identity $L^\infty(0,T;V)$ to the dual of $L^1(0,T;V')$, noting that V is a Hilbert space, then reflexive. The convergence (1.36) means that

$$\int_0^T \langle u_\nu(t), w(t)\rangle \, dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle \, dt \tag{1.38}$$

for all $w \in L^1(0,T;V')$. In particular for $w \in L^1(0,T;V)$. Then, $\langle u_\nu(t), w(t)\rangle = ((u_\nu(t), w(t)))$, $\langle u(t), w(t)\rangle = ((u(t), w(t)))$. We choose $w = \theta v$, with $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, $v \in V$. Then (38) mean:

$$\int_0^T ((u_\nu(t), v))\theta(t)\, dt \to \int_0^T ((u(t), v))\theta(t)\, dt. \tag{1.39}$$

By the same argument, from (1.37), we obtain

$$\int_0^T (u'_\nu(t), v)\theta(t)\, dt \to \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)\, dt \tag{1.40}$$

for all $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ and $v \in V$.

From (1.40), we have

$$(u'_\nu(t), v) \to (u'(t), v)$$

in the sense of the distribution on $]0,T[$. But $\dfrac{d}{dt}$ is continuous in this sense. It follows that

$$\frac{d}{dt}(u'_\nu(t), v) \to \frac{d}{dt}(u'(t), v) \tag{1.41}$$

in the sense of distributions on $]0,T[$.

Multiply the approximated equation (1.31) by $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ and integrate on $[0,T]$. Consider m fixed, $\nu > m$ and let $\nu \to \infty$. By (1.40) and (1.41) we obtain,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta \right\rangle + \int_0^T ((u(t), v))\theta(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)\, dt \tag{1.42}$$

for all $v \in V_m$ and $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. By hypothesis the finite linear combination of $(w_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{N}}$ are dense in V. This implies that (1.42) is true for $v \in V$, in the sense of $\mathcal{D}'(0,T)$.

From (1.36), (1.37), (1.42) we obtain, respectively, (1.26), (1.27), (1.28) of the Theorem 1.

Let us prove now the condition (1.29). From (1.42) we have:

$$-\int_0^T (u'(t),v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \langle Au(t),v\rangle\ \theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),v\rangle\ \theta(t)dt$$

for all $v \in V$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Then:

$$\left(-\int_0^T u'(t)\theta'(t)\,dt, v\right) = \left\langle \int_0^T g(t)\theta(t), v\right\rangle \tag{1.43}$$

where $g(t) = f(t) - Au(t) \in V'$, because $A\colon V \to V'$. Then (1.43) implies

$$-\int_0^T u'(t)\theta'(t)\,dt = \int_0^T g(t)\theta(t)\,dt. \tag{1.44}$$

Observe that $u', g \in L^2(0,T;V')$ by (1.26), (1.27) and satisfies (1.44), which is the condition (ii) of the Lemma 3. It follows that

$$u'(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds \quad \xi \in V' \text{ is constant} \tag{1.45}$$

and then:

$$u' \in C^0([0,T];V'). \tag{1.46}$$

By (1.45) we obtain:

$$\langle u'', \theta\rangle = \langle g, \theta\rangle\,, \quad \forall\,\theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

what implies

$$u'' = g \quad \text{in vector distribution sense.}$$

But $g \in L^2(0,T;V')$ implies

$$u'' \in L^2(0,T;V') \tag{1.47}$$

and

$$u'' = g \quad \text{in} \quad L^2(0,T;V'),$$

or

$$u'' + Au = f \quad \text{in} \quad L^2(0,T;V'). \tag{1.48}$$

To complete the proof we need $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. We have by (1.26) that $u'(0)$ make sense. Also by (1.26), (1.27) and the Corollary 1, $u \in C^0([0,T];H)$ and $u(0)$ make sense. By Theorem 1, we have $u \in C_s([0,T\,;V)$, $u' \in C_s([0,T];H)$.

Let us prove that $u(0) = u_0$.

We have

$$u_m \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0,T;V), \tag{1.49}$$

then, since $V \subset H$ is continuous, (1.49) implies:

$$u_m \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0,T;H). \tag{1.50}$$

There exists a subsequence u_n such that

$$\int_0^T (u_\nu(t), v)\theta' \, dt \to \int_0^T (u(t), v)\theta' \, dt \tag{1.51}$$

for $\theta \in C^1(0,T)$, $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$.

By estimate (1.35), there exists u'_ν such that

$$\int_0^T (u'_\nu(t), v)\theta \, dt \to \int_0^T (u'(t), v)\theta \, dt \tag{1.52}$$

for $\theta \in C^1(0,T)$, $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$.

By (1.51), (1.52) we obtain:

$$\int_0^T \frac{dt}{dt} [(u_\nu(t), v)\theta] \, dt \to \int_0^T \frac{d}{dt} [(u(t), v)\theta] \, dt$$

or

$$(u_\nu(0), v) \to (u(0), v).$$

But

$$(u_\nu(0), v) \to (u_0, v)$$

then

$$u(0) = u_0 \quad \text{in} \quad V.$$

Proof of $u'(0) = u_1$.

Let be $\delta > 0$ and

$$\theta_\delta(t) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{\delta} + 1 & \text{if} \quad 0 \le t \le \delta \\ 0 & \text{if} \quad \delta < t < T \end{vmatrix}$$

which belongs to $H^1(0,T)$. Multiply approximated equation (1.31) with $m = \nu$, by $\theta_\delta(t)$ and integrate

$$\int_0^\delta (u''_\nu(t), v)\theta_\delta \, dt + \int_0^\delta ((u_\nu(t), v))\theta_\delta \, dt = \int_0^\delta (f(t), v)\theta_\delta \, dt.$$

Integrating by parts, we obtain:

$$(1.53) \qquad -(u'_\nu(0), v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u'_\nu(t), v) dt + \int_0^\delta ((u_\nu(t), v)\theta_\delta \, dt = \int_0^\delta (f(t), v)\theta_\delta \, dt$$

when $\nu \to \infty$, $\;v \in V_m$, we obtain

$$(1.54) \qquad -(u_1, v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u'(t), v) \, dt + \int_0^\delta ((u(t), v))\theta_\delta \, dt = \int_0^\delta (f(t), v)\theta_\delta \, dt$$

which is true for all $v \in V$. When $\delta \to 0$ in (1.54), by the fundamental theorem of the calculus, we obtain:

$$(u'(0), v) = (u_1, v) \quad \text{for all} \quad v \in V.$$

Then

$$u'(0) = u_1 \quad \text{in} \quad V.$$

Proof of The Uniqueness

If u, $\hat{u}$ are two solutions of the Problem 1, given by the Theorem 2, then $w = u - \hat{u}$ is solution of

$$(1.55) \qquad \begin{vmatrix} w'' + Aw = 0 \\ w(0) = 0 \;\; \text{and} \;\; w'(0) = 0 \end{vmatrix}$$

Note that $w'' \in L^2(0,T;V')$ and $w' \in L^\infty(0,T;H)$, but $V \subset H \subset V'$ and we cannot apply w'' in w'. So we obtain from w a new vector function in $L^\infty(0,T;V)$ which is convenient for computation.

For $0 < s < T$, let us define

$$\psi(t) = \left| \begin{array}{lll} -\displaystyle\int_t^s w(\sigma) d\sigma & \text{if} & 0 < t < s \\ \quad 0 & \text{if} & s \leq t < T \end{array} \right.$$

where w is the solution of (1.55). The function ψ belongs to $L^2(0,T;V)$, then it makes sense

$$\int_0^T \langle w'' + Aw, \psi \rangle \; dt = 0 \tag{1.56}$$

$\langle\, , \rangle$ duality between V' and V.

Let us define

$$w_1(\xi) = \int_0^\xi w(\sigma)\, d\sigma.$$

Then:

$$\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$$

and

$$\psi'(t) = w_1'(t) = w(t).$$

We have

$$\int_0^s \langle w'', \psi \rangle \; d\sigma = (w'(s), \psi(s)) - (w'(0), \psi(0)) - \int_0^s (w', \psi')\, d\sigma \tag{1.57}$$

$\psi(s) = 0$ and $w'(0) = 0$. We obtain:

$$\int_0^s \langle w'', \psi \rangle \; d\sigma = -\int_0^s \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2\, dt = -\frac{1}{2} |w(s)|^2. \tag{1.58}$$

Note that (1.57) make sense because w' is continuous.

From (1.58) and (1.56) we obtain:

$$-\frac{1}{2} |w(s)|^2 + \int_0^s ((w, \psi))\, d\sigma = 0 \tag{1.59}$$

$((w, \psi)) = ((\psi', \psi)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\,\|\psi(t)\|^2$. Then, from (1.59), it follows:

$$+\frac{1}{2}\,|w(s)|^2 + \frac{1}{2}\,\|\psi(0)\| = 0$$

proving that $w(s) = 0$, for any $s \in [0, T]$. Then $u = \hat{u}$. □

Proposition 1. If u is the solution of the Theorem 2, then we have the energy inequality:

$$\frac{1}{2}\,|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\,|u_1|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2 + \int_0^t (f, u'(0))\,d\sigma \tag{1.60}$$

a.e. in $[0, T]$.

Proof: Taking $v = u'_m(t)$ in the approximate equation (31) we obtain:

$$\frac{1}{2}\,|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_m(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}\,\|u_{0m}\|^2 + \int_0^t (f(s), u'_m(s))\,ds \tag{1.61}$$

From Gronwall Lemma (1.61) implies that u_m, u'_m are bounded, respectively, in $L^\infty(0, T; V)$, $L^\infty(0, T; H)$ and in particular in $L^2(0, T; V)$, $L^2(0, T; H)$. We obtain a subsequence u_ν, of u_m such that

$$u_\nu \to u \quad \text{weakly on} \quad L^2(0, T; V) \tag{1.62}$$

$$u'_\nu \to u' \quad \text{weakly on} \quad L^2(0, T; H) \tag{1.63}$$

Let $\theta \geq 0$ be an step function on $[0, T]$. In (1.61) take $m = \nu$ and multiply both sides by θ and integrate on $[0, T]$. We have:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T |u'_\nu(t)|^2\theta\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|u(t)\|^2\theta\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T |u_{1m}|^2\theta\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|u_{0m}\|^2\theta\,dt+\\ + \int_0^T \theta \int_0^t (f(s), u'_\nu(s))\,ds.\end{aligned} \tag{1.64}$$

From (1.62), (1.63) and by the lower semicontinuity of the integrals for the weak topology, we obtain:

$$\int_0^T |u'(t)|^2\theta\,dt \leq \varliminf_{\nu} \int_0^T |u'_\nu(t)|^2\theta\,dt \tag{1.65}$$

$$\int_0^T \|u_\nu(t)\|^2\theta\, dt \le \varliminf_{\nu} \int_0^T \|u_\nu(t)\|^2\theta\, dt \tag{1.66}$$

Therefore, taking $\varliminf_{\nu}$ of both sides of (1.64), we have:

$$\frac{1}{2}\int_0^T |u'(t)|^2\theta\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \|u(t)\|^2\theta\, dt \le \frac{1}{2}\int_0^T |u_1|^2\theta\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|u_0\|^2\theta\, dt +$$
$$+\int_0^T \left(\int_0^t (f(s), u'(s))\, ds\right)\theta\, dt$$

for $\theta \ge 0$, step function on $[0,T]$.

Remark 2. Let $\nu \in L^1(0,T)$. We say that $s \in]0,T[$ is a Lebesgue's point of ν, if for $h > 0$, $]s-h, s+h[\subset]0,T[$ then

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} \nu(\xi)\, d\xi = \nu(s).$$

We prove that if $\nu \in L^1(0,T)$, then almost all points $s \in]0,T[$ are Lebesgue's point of ν.

Let us return to (66) and observe that all the functions there are $L^1(0,T)$. If $s \in]0,T[$, consider the step function $\theta_h(t) = \theta$ on $]s-h, s+h[\subset]0,T[$ and zero in the complement. Then θ_h is permissible in (1.66). Substituting θ_n in (1.66), dividing by $2h$ and letting $h \to 0$, we obtain, because $\theta \ge 0$,

$$\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 \le \frac{1}{2}|u'(0)|^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 + \int_0^t (f(\sigma), u'(\sigma)\, d\sigma$$

a.e. in $[0,T]$. $\square$

Proposition 2. If u is the solution in the Theorem 2, then we have the energy identity:

$$|u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 = |u_1|^2 + \|u_0\|^2 + 2\int_0^t (f(\xi), u'(\xi))\, d\xi, \tag{1.67}$$

a.e. in $[0,T]$.

Proof: First of all note that we already know that if u is the solution given by the Theorem 2, we obtain the weak regularity:

$$u \in C_s([0,T];V), \quad u' \in C_s([0,T];H).$$

To prove the identity (1.67) it is sufficient to prove that the right hand side of (1.67) is greater then the left one. With the energy inequality proved in Proposition 1, we conclude the equality.

In fact, we know also that $u'' \in L^2(0,T;V')$ and $u' \in L^2(0,T;H)$, so that we cannot apply the u'' in u' in the duality V', V. Note also that we have $V \subset H = H' \subset V'$, injections dense and continuous with u' we shall define a function for which is correct the pairing V', V. We obtain this by truncation and regularization.

In fact, for $s < t$ in $[0,T]$, let us consider the function θ_n, $n \in \mathbb{N}$, defined by:

$$\theta_n(\xi) = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{if} & 0 \leq \xi \leq s - \dfrac{1}{n} \\ 1 + n(\xi - s) & \text{if} & s - \dfrac{1}{n} \leq \xi \leq s \\ 1 & \text{if} & s \leq \xi \leq t \\ 1 - n(\xi - s) & \text{if} & t \leq \xi \leq t + \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{if} & t + \dfrac{1}{n} \leq \xi \leq T. \end{array} \right.$$

By ρ_k, $k \in \mathbb{N}$, we represent a regularizing sequence on $\mathbb{R}$, with support contained in $\left]-\dfrac{1}{k}, -\dfrac{1}{k}\right[$, with k large enough so that $\rho_k(0) = \rho_k(T) = 0$. As we know, by definition, ρ_k is $C_0^\infty(\mathbb{R})$, is even and $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_k(\xi)d\xi = 1$. The function

$$\varphi_{kn} = \theta_n(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k$$

belongs to $C_0^\infty(\mathbb{R};V)$. Integrating by parts we prove that $\theta_n(\theta_n u)' * \rho_k * \rho_k = \theta_n(\theta_n u) * \rho'_k * \rho_k \in C_0^\infty(\mathbb{R};H)$. We obtain:

$$\theta_n(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k = \theta_n(\theta_n u) * \rho'_k * \rho_k - \theta_n(\theta'_n u) * \rho_k * \rho_k = \varphi_{kn}$$

which is $C_0^\infty(\mathbb{R};V)$, since $(\theta_n u)' * \rho_k * \rho_k = (\theta_n u) * \rho'_k * \rho_k$.

As we know from the Theorem 2, u is solution of $u'' + Au = f$ in the sense of $L^2(0,T;V')$. Then make sense

$$\int_0^T \langle u''(t), \varphi_{kn}(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle Au(t), \varphi_{kn}\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi_{kn}(t)\rangle \, dt. \tag{1.68}$$

Therefore,

$$\int_0^T \langle \theta_n u'', (\theta_n u') * \rho_k * \rho_k \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^T \langle (\theta_n u')' * \rho_k, (\theta_n u') * \rho_k \rangle \, dt - \int_0^T ((\theta' u') * \rho_k, (\theta_n u') * \rho_k) \, dt.$$

Note that

$$\int_0^T \frac{d}{dt} ((\theta_n u') * \rho_k, (\theta_n u') * \rho_k) \, dt = 0$$

what implies

$$\int_0^T \langle (\theta_n u')' * \rho_k, (\theta_n u') * \rho_k \rangle \, dt = 0.$$

Then,

$$\int_0^T \langle (\theta_n u') * \rho_k, (\theta_n u') * \rho_k \rangle \, dt = -\int_0^T ((\theta' u') * \rho_k, (\theta_n u') * \rho_k) \, dt$$

we have

$$(\theta_n' u') * \rho_k \to \theta_n' u' \quad \text{strongly in} \quad L^2(\mathbb{R}; H)$$

$$(\theta_n u') * \rho_k \to \theta_n u' \quad \text{strongly in} \quad L^2(\mathbb{R}; H)$$

as $k \to \infty$. Then, when $k \to \infty$,

$$\int_0^T \langle \theta_n u'', (\theta_n u') * \rho_k * \rho_k \rangle \, dt \to \int_0^T \theta_n' \theta_n |u'(t)|^2 \, dt.$$

The second term of the first hand side of (1.68), gives:

$$\int_0^T \langle Au, \varphi_{kn} \rangle \, dt = \int_0^T ((u, \varphi_{kn})) \, dt =$$

$$= \int_0^T (((\theta_n u) * \rho_k, (\theta_n u')' * \rho_k)) \, dt - \int_0^T (((\theta_n u) * \rho_k, (\theta_n' u) * \rho_k)) \, dt.$$

By parts, the first integral is

$$\int_0^T (((\theta_n u) * \rho_k, (\theta_n u) * \rho_k')) \, dt$$

which is equal to $1/2$ of

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (((\theta_n u) * \rho_k, (\theta_n u) * \rho_k)) \, dt = 0.$$

It follows that

$$\int_0^T ((u, \varphi_{kn}))\, dt = -\int_0^T (((\theta_n u) * \rho_k, (\theta' u) * \rho_k))\, dt$$

when $k \to \infty$, we obtain:

$$\int_0^T ((u, \varphi_{kn}))\, dt \to -\int_0^T \theta_n \theta_n' \|u(t)\|^2.$$

We also obtain:

$$\int_0^T (f, \theta_n(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k)\, dt = \int_0^T ((\theta_n f) * \rho_k, (\theta_n u') * \rho_k)\, dt$$

which converges, when $k \to \infty$, to

$$\int_0^T \theta_n^2 (f, u')\, dt$$

we obtain:

$$-\int_0^T \theta_n' \theta_n |u'(t)|^2\, dt - \int_0^T \theta_n' \theta_n \|u(t)\|^2\, dt = \int_0^T \theta_n^2 (f, u')\, dt. \tag{1.69}$$

Now we want to obtain the limit of (1.69) when $n \to \infty$, what is obtained as a consequence of the following Lemma 4.

Lemma 4. If $h \in L^1(0, T)$ the, when $n \to \infty$, the integral

$$-\int_0^T \theta_n \theta_n\, h(\xi)\, d\xi$$

converges to

$$\frac{1}{2}\,(h(t) - h(s)).$$

Proof: Note that the weak derivative of θ_n is the function θ_n' defined by:

$$\theta_n'(\xi) = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{if} & 0 \le \xi \le s - \dfrac{1}{n} \\ n & \text{if} & s - \dfrac{1}{n} \le \xi \le s \\ 0 & \text{if} & s \le \xi \le t \\ -n & \text{if} & t \le \xi \le t + \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{if} & t + \dfrac{1}{n} \le \xi \le T. \end{array} \right.$$

We have:

$$-\int_0^T \theta_n'\theta_n\, h(\xi)\, d\xi = -\int_{s-\frac{1}{n}}^{s} n[1+n(\xi-s)]h(\xi)d\xi + \\ + \int_t^{t+\frac{1}{n}} n[1-n(\xi-t)]h(\xi)\, d\xi$$

when $n \to \infty$, we obtain:

$$-\int_0^T \theta_n'\theta_n\, h(\xi)d\xi \to \frac{1}{2}\,(h(t)-h(s)).$$

□

Let $n \to \infty$ in (1.69), using the Lemma 4, we obtain:

$$\frac{1}{2}\,|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,|u'(s)|^2 + \frac{1}{2}\,\|u(s)\|^2 + \int_s^t (f(\xi), u'(\xi))\, d\xi. \tag{1.70}$$

From the estimates of u and u', we conclude that when $s \to 0$,

$$u(s) \to \xi \quad \text{weakly in} \quad V$$

and

$$u'(s) \to \eta \quad \text{weakly in} \quad H.$$

But $u \in C_s([0,T];V)$ and $u' \in C_s([0,T];V)$, then: $\xi = u(0)$, $\eta = u'(0)$. We already know that $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. We obtain from the weak convergences:

$$\|u(0)\| \leq \varliminf_s \|u(x)\|, \qquad |u'(0)| \leq \varliminf_s |u'(s)|.$$

Taking the $\varliminf_s$ in both sides of (1.70), we obtain:

$$\frac{1}{2}\,|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 \geq \frac{1}{2}\,|u'(0)|^2 + \frac{1}{2}\,\|u(0)\|^2 + \int_0^t (f(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma \tag{1.71}$$

a.e. in $[0,T]$. This inequality and the energy inequality, prove that we have the identity (1.67). □

The next result tell us that the solution u given by the Theorem 2, is strongly continuous from $[0,T]$ into V. We already knows that $u' \in C^0([0,T];H)$ but the method give one more this result.

Theorem 3. The solution u given by Theorem 2, satisfies the following regularity:

$$u \in C^0([0,T].V); \quad u' \in C^0([0,T];H).$$

Proof: From the energy identity, (1.67), it follows that the function

$$\varphi(t) = \|u(t)\|^2 + |u'(t)|^2$$

is continuous on $[0,T]$. We must prove that for each $t_n \to t$ in $[0,T]$, we have:

$$u'(t_n) \to u'(t) \text{ in } C^0([0,T];H), \quad u(t_n) \to u(t) \text{ in } C^0([0,T];V).$$

In fact, we have $u \in C_s([0,T];V), \quad u' \in C_s([0,T];H)$, or

$$\text{(1.72)} \qquad \left| \begin{array}{lll} (u'(t_n),h) \to (u'(t),h) & \text{for all} & h \in H, \text{ in } C^0([0,T]) \\ ((u(t_n),v)) \to ((u(t),v)) & \text{for all} & v \in V \text{ in } C^0([0,T]) \end{array} \right.$$

Let us consider

$$\zeta_n(t) = |u'(t_n) - u'(t)|^2 + \|u(t_n) - u(t)\|^2.$$

Then

$$\zeta_n(t) = \varphi(t_n) + \varphi(t) - 2[(u'(t_n),u'(t)) + ((u(t_n),u(t)))].$$

By (1.72) and uniform continuity of φ, $\zeta_n(t) \to 0$ in $C^0([0,T])$. It follows that $u(t_n) \to u(t)$ in $C^0([0,T];V)$, $u'(t_n) \to u'(t)$ in $C^0([0,T].H)$ or $u \in C^0([0,T];V)$, $u' \in C^0([0,T];H)$. □

The Theorem 2 is true for $f \in L^1(0,T\ L^2(\Omega))$.

1.3 Semilinear Equations

In this section we shall analyse the semilinear partial differential equations of type $u'' - \Delta u + F(u) = 0$. The method is based on some results of convergence of measurable functions, proved by W.A. Strauss [8], which generalize the Lemma 1.3 of J.L. Lions [2], employed when $F(s) = |s|^p\, s,\ \rho > 0$ a real number.

Theorem 4 (W.A. Strauss). Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$, $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real measurable functions defined on Ω. Let us consider the sequences $(F_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(G_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ of functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ such that $F_\nu \circ u_\nu$, $G_\nu \circ u_\nu$ are measurable on Ω for $\nu \in \mathbb{N}$. We suppose:

(a) $F_\nu \circ u_\nu$ converges to v almost everywhere on Ω.

(b) $\displaystyle\int_\Omega |F_\nu(u_\nu(x))G_\nu(u_\nu(x))|\, dx < C$, where the constant C is independent of $\nu \in \mathbb{N}$.

(c) $G_\nu \to \infty$ as $F_\nu \to \infty$.

Then, we have:

(d) The function v belongs to $L^1(\Omega)$.

(e) $F_\nu \circ u_\nu$ converges to v strongly in $L^1(\Omega)$.

Remark 3. By notation $F_\nu \circ u_\nu$ we represent the function defined by $(F_\nu \circ u_\nu)(x) = F_\nu(u_\nu(x))$ for all $x \in \Omega$. The hypothesis (c) is equivalent to say that for each $M > 0$ there exists $N > 0$ independent of ν, such that if $|F_\nu(s)| \geq N$ then $|G_\nu(s)| \geq N$ for all s in $\mathbb{R}$.

Proof of the Theorem 4: For each ν in $\mathbb{N}$, let us represent by Ω_ν the set

$$\Omega_\nu = \{x \in \Omega; |G_\nu(u_\nu(x))| \leq 1\}, \tag{1.73}$$

and by Ω_μ^c the complement of Ω_ν in Ω. For all x in Ω_ν^c we have $|G_\nu(u_\nu(x))| > 1$, therefore:

$$|F_\nu(u_\nu(x))| \leq |G_\nu(u_\nu(x))| \ |F_\nu(u_\nu(x))| \, .$$

It follows from (b), that for all $\nu \in \mathbb{N}$ we have

$$\int_{\Omega_\nu^c} |F_\nu(u_\nu(x))| \, dx < C. \tag{1.74}$$

For each $x \in \Omega_\nu$, it follows by hypothesis (c) that since $|G_\nu(u_\nu(x))| \leq 1$ in Ω_ν, we have $|F_\nu(u_\nu(x))| \leq N$ for some constant N, for all $x \in \Omega$ and $\nu \in \mathbb{N}$. We obtain:

$$\int_{\Omega_\nu} |F_\nu(u_\nu(x))| \, dx \leq N\mu(\Omega_\nu) \leq N\mu(\Omega). \tag{1.75}$$

From (1.74), (1.75), we obtain the estimate:

$$\int_{\Omega} |F_\nu(u_\nu(x))| \, dx < C + N\mu(\Omega) \tag{1.76}$$

for all $\nu \in \mathbb{N}$, that is, the sequence of integrals of $F_\nu \circ u_\nu$ is bounded. Then, (1.76) and the condition (a), imply that $(F_\nu \circ u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ satisfies the conditions of Fatou's lemma, which implies that $|v| = \lim_\nu |F_\nu \circ u_\nu|$ is integrable on Ω, which proves part (d) of the theorem.

To complete the proof, observe that from Egorov's theorem, given $\delta > 0$ there exists a measurable set $\Omega_0 \subset \Omega$ such that $\mu(\Omega_0) < \delta$ and $(F_\nu \circ u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converges to v, uniformly on $\Omega - \Omega_0$. Then, we have:

$$\lim_\nu \int_{\Omega - \Omega_0} |f_\nu(u_\nu(x)) - v| \, dx = 0.$$

We need only to prove that

$$\lim_\nu \int_{\Omega_0} |F_\nu(u_\nu(x)) - v| \, dx = 0.$$

In fact, we have:

$$\int_{\Omega_0} |F_\nu(u_\nu(x)) - v(x)| \, dx \leq \int_{\Omega_0} |F_\nu(u_\nu(x))| \, dx + \int_{\Omega_0} |v(x)| \, ds.$$

Since v is integrable on Ω and $\mu(\Omega_0) < \varepsilon$, it follows that $\int_{\Omega_0} |v(x)| \, dx < \varepsilon$. It is sufficient to prove that:

$$\sup_\nu \int_{\Omega_0} |F_\nu(u_\nu(x))| \, dx < \varepsilon,$$

when $\mu(\Omega_0) < \delta$. Let be $M = c/\varepsilon$, where c is the constant of the hypothesis (b) and N the constant of the Remark 3.

Let us consider:

$$\Omega_\nu = \{x \in \Omega_0\,;\ |G_\nu(u_\nu(x))| < M\},$$

and $\Omega_{0\nu}^c = \Omega_0 - \Omega_{0\nu}$. Whence in $\Omega_{0\nu}^c$ we have $|G_\nu(u_\nu(x))| \geq M$, then

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{0\nu}^c} |f_\nu(u_\nu(x))|\,dx &= \frac{1}{M}\int_{\Omega_{0\nu}^c} |F_\nu(u_\nu(x))|\,M\,dx \leq \\
&\leq \frac{1}{M}\int_{\Omega_{0\nu}^c} |F_\nu(u_\nu(x))|\ |G_\nu(u_\nu(x))|\,dx < \frac{c}{M} = \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned} \tag{1.77}$$

On $\Omega_{0\nu}$ we have by Remark 3, $|F_\nu(u_\nu(x))| < N$ because $|G_\nu(u_\nu(x))| < M$. It then follows that:

$$\int_{\Omega_{0\nu}^c} |F_\nu(u_\nu(x))|\,dx \leq N\mu(\Omega_{0\nu}) < N\delta = \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.78}$$

for $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2N}\,$.

By (1.77), (1.78) we obtain the proof. $\square$

Remark 4. Suppose $G_\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the identity mapping, for all $\nu \in \mathbb{N}$, i.e., $G_\nu(s) = s$ for all $\nu \in \mathbb{N}$ and $s \in \mathbb{N}$. The hypothesis of the Theorem 1 modify and they are:

(a) $F_\nu \circ u_\nu$ converges to v a.e. in Ω.

(b) $\displaystyle\int_\Omega |F_\nu(u_\nu(x))|\ |u_\nu(x)|\,dx < \varepsilon$, for all $\nu \in \mathbb{N}$.

(c) $s \to \infty$ when $F_\nu(s) \to \infty$.

Then it follows (d), (e) of the Theorem 3. $\square$

Corollary 2. Let $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real measurable functions, bounded in $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, and convergent to u almost everywhere in Ω. Then the sequence converges strongly in $L^p(\Omega)$ to u for all $1 \leq p < q$ and weakly in $L^q(\Omega)$.

Observe that the Lemma 1.3 of J.-L. Lions [2] is the above corollary.

Proof: The function u is measurable and $(|u_\nu|^q)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converges to $|u|^q$ almost everywhere in Ω. Since

$$||u_\nu||^q_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega |u_\nu(x)|^q \, dx < c^q$$

because, by hypothesis, the sequence is bounded in $L^q(\Omega)$. It follows from Fatou's lemma that $|u|^q$ is integrable on Ω, that is, $u \in L^q(\Omega)$.

For $1 \leq p < q$, let us prove that $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converges to u strongly in $L^p(\Omega)$. For this, let us apply the Theorem 4, when $F_\nu(s) = s$ and $G_\nu(s) = s^{\frac{q-p}{p}}$, for all $\nu \in \mathbb{N}$. These functions are measurable. If we define $v_\nu = |u_\nu - u|^p$, we have:

(a) $(F_\nu \circ v_\nu)(x) = |u_\nu - u|^p$, which converges to zero a.e. in Ω.
(b) $\displaystyle\int_\Omega |F_\nu(v_\nu(x))| \, |G_\nu(v_\nu(x))| \, dx = \int_\Omega |u_\nu(x) - u(x)|^q \, dx < c$;
(c) $G_\nu(s) \to +\infty$ when $F_\nu(s) \to +\infty$.

It follows from the Theorem 4, that $(|u_\nu - u|^p)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converges to zero in $L^1(\Omega)$, that is, $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converges to u in $L^p(\Omega)$.

To prove that $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converges to u weakly in $L^q(\Omega)$, we have to prove:

$$\lim_\nu \int_\Omega u_p v \, dx = \int_\Omega uv \, dx, \quad \text{for all} \quad v \in L^{q'}(\Omega) \tag{1.79}$$

with $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.
We know that this is true for all $v \in L^p(\Omega)$ by the strong convergence in $L^p(\Omega)$, in particular for $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. By density (1.79) is true for $v \in L^{q'}(\Omega)$. □

The method which shall be used to study the semilinear partial differential equations $u'' - \Delta u + F(u) = 0$, begins with the case $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a Lipschitz functions such that $sF(s) > 0$ for all $s \in \mathbb{R}$. In the following step we study the continuous case, i.e., $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous and $sF(s) \geq 0$ for all $s \in \mathbb{R}$. Observe that the Lemma 5, shows that each continuous functions $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, such that $sF(s) \geq 0$, can be approximated, uniformly in bounded sets of $\mathbb{R}$, by Lipschitz functions of the same type and derivable except in a finite number of points. In the proof shall be used the W.A. Strauss convergence theorem.

If $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, is continuous, we represent by G the primitive

$$G(s) = \int_0^s F(\sigma) \, d\sigma. \tag{1.80}$$

Note that when $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous and $sF(s) \geq 0$, then $F(0) = 0$. Note that $Q = \Omega \times]0, T[$, $T > 0$, Ω bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary Γ. By Σ we represent the lateral boundary of Q.

Theorem 5. Let $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be Lipschitz, $sF(s) \geq 0$ and G defined by (1.80). Given:

$$u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega), \tag{1.81}$$

there exists only one $u\colon Q \to \mathbb{R}$, satisfying the conditions

$$\left|\begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ u'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \dfrac{d}{dt}(u'(t), v) + ((u(t), v)) + (F(u(t)), v) = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(0, T), \\ \qquad \text{for all } v \in H_0^1(\Omega) \\ u'' - \Delta u + F(u) = 0 \text{ in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ u(0) = u_0\,,\ u'(0) = u_1\,. \end{array}\right. \tag{1.82}$$

Proof: The proof will be done by Picard successive approximations.

Let us consider the sequence of successive approximations

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{1.83}$$

defined as the solutions of the linear problems:

$$\left|\begin{array}{l} u_n'' - \Delta u_n + F(u_{n-1}) = 0 \\ u_n = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ u_n(0) = u_0\,,\ u_n'(0) = u_1\,, \end{array}\right. \tag{1.84}$$

for $n = 1, 2, \ldots$. The first term of the sequence (1.83) is the initial data u_0 given by (1.81).

First of all, we must prove that (1.84) has solution for each $n \in \mathbb{N}$, what shall be done by induction.

In fact, for $n = 1$, we have:

$$\left| \begin{array}{l} u_1'' - \Delta u_1 - F(u_0) = 0 \ \text{ in } \ Q \\ u_1 = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ u_1(0) = u_0\,, \ u_1'(0) = u_1\,. \end{array} \right. \tag{1.85}$$

It is sufficient to observe that (1.85) is in the conditions of the Theorem 2, cf. Section 2. In fact, take $V = H_0^1(\Omega)$, $\quad H = L^2(\Omega)$. We have:

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega), \quad \text{dense and continuous.} \tag{1.86}$$

Note that $H^{-1}(\Omega)$ is the dual of the Sobolev space $H_0^1(\Omega)$. We take $A = -\Delta$ and we have: $-\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^{-1}(\Omega))$. With the notation of the Section 2, we have $(\,\cdot\,)$, $\ |\cdot|$, $\ ((\;,\;))$, $\|\cdot\|$ are, in the present realization, respectively, the inner product and norm in $L^2(\Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$. As $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, and we have (1.86), it implies $F(u_0) \in L^2(\Omega)$, because F is Lipschitz and $F(0) = 0$. It follows that the Problem (1.85) is in the conditions of the Theorem 2, Section 2. Then, there exists only one function $u_1 \colon Q \to \mathbb{R}$, satisfying:

$$\left| \begin{array}{l} u_1 \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \\ u_1' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d}{dt}(u_1'(t), v) + ((u_1(t), v)) + (F(u_0), v) = 0 \\ \qquad \text{for all } v \in H_0^1(\Omega), \text{ in the sense of } \mathcal{D}'(0,T) \\ u_1'' \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \\ u_1'' - \Delta u_1 + F(u_0) = 0 \text{ in the sense of } L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \\ u_1(0) = u_0\,, \ u_1'(0) = u_1\,. \end{array} \right. \tag{1.87}$$

Suppose we have proved the existence of a unique solution of (1.84), for $n-1$, satisfying (1.87), then we shall prove that it exists for n. To prove for n, we must verify that the problem:

$$
(1.88) \qquad \left|\begin{array}{l} u_n'' - \Delta u_n + F(u_{n-1}) = 0 \\ u_n = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ u_n(0) = u_0\,,\ u_n'(0) = u_1\,, \end{array}\right.
$$

satisfies the condition of the Theorem 2. In fact, to obtain the condition (1.86) for u_n, defined by (1.88), it is sufficient to verify that $F(u_{n-1}) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. This is true, because $u_{n-1} \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, by (1.86) and F is Lipschitz and $sF(s) \geq 0$. Then by Theorem 2, exists a unique $u\colon Q \to \mathbb{R}$, such that

$$
(1.89) \qquad \left|\begin{array}{l} u_n \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u_n' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d}{dt}(u_n'(t),v) + ((u_n(t),v)) + (F(u_{n-1}),v) = 0 \\ \qquad \text{for all } v \in H_0^1(\Omega), \text{ in the sense of } \mathcal{D}'(0,T) \\ u_n'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ u_n'' - \Delta u_n + F(u_{n-1}) = 0 \text{ in the sense of } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ u_n(0) = u_0\,,\ u_n'(0) = u_1\,. \end{array}\right.
$$

We also obtain, from the Theorem 3:

$$
(1.90) \qquad u_n \in C^0([0,T].H_0^1(\Omega)), \quad u_n' \in C^0([0,T];L^2(\Omega)).
$$

The next step consists in proving that the sequence of successive approximations given by (1.83) converges to a function $u\colon Q \to \mathbb{R}$, satisfying the conditions of the Theorem 5.

For that, let us define $w_n = u_n - u_{n-1}$, which is the unique solution of the problem:

$$
(1.91) \qquad \left|\begin{array}{l} w_n'' + \Delta w_n + F(u_{n-1}) - F(u_{n-2}) = 0 \text{ on } Q \\ w_n = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ w_n(0) = 0,\ w_n'(0) = 0. \end{array}\right.
$$

By the energy inequality, cf. (1.60), Proposition 1, Section 2, we have:

$$\frac{1}{2}|w_n'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|w_n(t)\|^2 \leq -\int_0^t (F(u_{n-1}) - F(u_{n-2}), w_n')\, ds. \tag{1.92}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} -\int_0^t (F(u_{n-1}) - F(u_{n-2}), w_n'(s))\, ds &\leq c\int_0^t |w_{n-1}(s)|\,|w_n'(s)|\, ds \leq \\ &\leq c^2 4t\int_0^t |w_{n-1}(s)|^2\, ds + \frac{1}{4t}\int_0^t |w_n'(s)|^2\, ds. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Let us define:

$$e_n(t) = \operatorname*{ess\ sup}_{0<s<t}\left\{\frac{1}{2}|w_n'(s)|^2 + \frac{1}{2}\|w_n(s)\|^2\right\}. \tag{1.94}$$

It follows that:

$$\frac{1}{4t}\int_0^t |w_n'(s)|^2\, ds \leq \frac{1}{2}\, e_n(t). \tag{1.95}$$

From (1.95), we modify (1.93), obtaining:

$$-\int_0^t (F(u_{n-1}) - F(u_{n-2}), w_n'(s))\, ds \leq c^2 4T\int_0^T |w_{n-1}(s)|^2\, ds + \frac{1}{2}\, e_n(t). \tag{1.96}$$

Substituting (1.96) in (1.92) we get:

$$\frac{1}{2}\, e_n(t) \leq c^2 4T\int_0^t |w_{n-1}(s)|^2\, ds \tag{1.97}$$

for $T > 0$.

Note that $w_{n-1}(0) = 0$ and

$$|w_{n-1}(s)|_{\mathbb{R}} \leq \int_0^s |w_{n-1}'(\sigma)|_{\mathbb{R}}\, d\sigma \leq s^{1/2}\left(\int_0^s |w_{n-1}'(\sigma)|\, d\sigma\right)^{1/2}$$

for $0 < s < t$. Then

$$|w_{n-1}(s)|^2 = \int_\Omega |w_{n-1}(s)|_{\mathbb{R}}^2\, ds \leq s\int_0^s |w_{n-1}'(\sigma)|^2\, d\sigma. \tag{1.98}$$

Note, by (1.94), that

$$|w'_{n-1}(s)|^2 \leq 2e_{n-1}(s). \tag{1.99}$$

By (1.98) and (1.99) we get:

$$|w_{n-1}(s)|^2 \leq 2s^2 e_{n-1}(s) \leq 2T^2\, e_{n-1}(s). \tag{1.100}$$

Substituting (1.100) in (1.97) we obtain:

$$e_n(t) \leq K \int_0^t e_{n-1}(s)\, ds. \tag{1.101}$$

From (1.101), by iteration, it follows, for all $n = 1, 2, \ldots$, that

$$e_n(t) \leq e_0 c_T \, \frac{(Kt)^n}{n!} \,,$$

what implies the convergence of $\sum\limits_n e_n(t)$, for all $t > 0$, because it is dominated by the convergent numerical series $\sum\limits_n \dfrac{(Kt)^n}{n!}$ · By the definition of $e_n(t)$, by (1.94), it follows that the series

$$\sum_n (u'_n - u'_{n-1}), \quad \sum_n (u_n - u_{n-1})$$

are convergents, respectively, in the norms $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ and $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. It follows that the sequences $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges, respectively, in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ and $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. We then obtain $u\colon Q \to \mathbb{R}$ such that:

$$\left| \begin{array}{l} u_n \to u \quad \text{in} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \text{ strongly.} \\[1ex] u'_n \to u' \quad \text{in} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \text{ strongly.} \end{array} \right. \tag{1.102}$$

From (1.102) we obtain

$$\frac{d}{dt}\,(u'_n(t), v) \to \frac{d}{dt}\,(u'(t), v) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(0,T) \tag{1.103}$$

for all $v \in H_0^1(\Omega)$. Also from (1.102), by the Lipschitz condition for F, we obtain:

$$F(u_n) \to F(u) \quad \text{in} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ strongly.} \tag{1.104}$$

From (1.102), (1.103), (1.104), it follows that u is the solution, i.e.,

$$\frac{d}{dt}(u(t),v)+((u(t),v))+(F(u),v)=0, \tag{1.105}$$

for all $v \in H_0^1(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(0,T)$. All the conditions (1.82) are satisfied by u uniqueness is because F is Lipschitz. □

Energy Inequality

By the Proposition 1, Section 2, the solution u_n of the linear problem (1.88), satisfies the energy inequality:

$$|u_n'(t)|^2+\|u_n(t)\|^2+2\int_0^t (F(u_{n-1}),u_n'(s))\,ds \le |u_1|^2+\|u_0\|^2. \tag{1.106}$$

By (1.102) and (1.104) we have strong convergence of $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$, $(F(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Let us consider a step function θ on $[0,T]$, $\theta>0$, and multiply both sides of (1.106) by θ and integrate on $[0,T]$. Taking limits when $n\to\infty$, we get

$$\begin{aligned}\int_0^T |u'(t)|^2\theta\,dt+\int_0^T \|u(t)\|^2\theta\,dt+2\int_0^T\int_0^t (F(u),u'(s))\theta\,ds \le \\ \le \int_0^T |u_1|^2\theta\,ds-\int_0^T \|u_0\|^2\theta\,ds\end{aligned}$$

for all $\theta\ge 0$, step function. Therefore,

$$|u'(t)|^2+\|u(t)\|^2+2\int_0^t (F(u),u1)\,ds \le |u_1|^2+\|u_0\|^2, \tag{1.107}$$

by the same argument employed in Section 2, Proposition 1. We have:

$$(F(u),u')=\int_\Omega F(u)u'\,ds=\frac{d}{dt}\int_\Omega G(u)\,dx.$$

Then we modify (1.107) obtaining:

$$|u'(t)|^2+\|u(t)\|^2+2\int_\Omega G(u)\,dx \le |u_1|^2+\|u_0\|^2+2\int_\Omega G(u_0)\,dx. \tag{1.108}$$

Note that (1.108) make sense, because $G(u_0) \in L^1(\Omega)$ since $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

The next step consists in proving the existence of weak solutions for the semilinear equation in the general case $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuous, $sF(s) \geq 0$ on $\mathbb{R}$. Te proof depends on the following lemma of approximation by Lipschitz functions.

Lemma 5. Let $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous and $sF(s) \geq 0$ for all $s \in \mathbb{R}$. Then there exists a sequence $(F_k)_k \in \mathbb{N}$ such that $sF_k(s) \geq 0$ and

i) $|F_k(\xi) - F_k(\eta)| \leq c_k|\xi - \eta|$, for all $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

ii) $(F_k)_k \in \mathbb{N}$ converges uniformly to F on the bounded sets of $\mathbb{R}$.

Proof: If $G(s) = \displaystyle\int_0^s F(\xi)\, d\xi$, let us define $F_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by the following:

$$
(1.109) \qquad \left|\begin{array}{l}
F_k(s) = -k\left[G\left(s - \dfrac{1}{k}\right) - G(s)\right] \quad \text{if} \quad -k \leq s \leq -\dfrac{1}{k} \\
F_k(s) = k\left[G\left(s + \dfrac{1}{k}\right) - G(s)\right] \quad \text{if} \quad -\dfrac{1}{k} \leq s \leq k \\
F_k \quad \text{linear by parts on} \quad -\dfrac{1}{k} \leq s \leq \dfrac{1}{k}\,, \ \text{with } F_k(0) = 0 \\
F_k \quad \text{constant for} \quad |s| \geq \dfrac{1}{k}
\end{array}\right.
$$

Note that F_k defined by (1.109) is derivable, for each $k \in \mathbb{N}$, except in five points. The sequence $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfies the conditions of Lemma 5. $\square$

Theorem 6. Given:

$$(1.110) \qquad u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega), \quad G(u_0) \in L^1(\Omega),$$

there exists a least one function $u\colon Q \to \mathbb{R}$ such that:

$$(1.111) \qquad u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$(1.112) \qquad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

$$(1.113) \qquad \frac{d}{dt}(u'(t), v) + ((u(t), v)) + (F(u), v) = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(0, T)$$

for all $v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(1.114) $$u'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega))$$

(1.115) $$u'' - \Delta u + F(u) \text{ in the sense of } L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega))$$

(1.116) $$u(0) = u_0\,,\ u'(0) = u_1$$

Proof: Let $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Lipschitz functions satisfying the conditions of the Lemma 5, i.e., it approximates F uniformly on bounded sets of $\mathbb{R}$. The initial data u_0 is not necessarily bounded. In order to be able to apply F_k to u_0 and take limits we need approximate u_0 by bounded functions of $H_0^1(\Omega)$.

We consider the functions $\beta_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by:

$$\beta_j(s) = \left|\begin{array}{lll} s & \text{if} & |s| \le j \\ j & \text{if} & s > j \\ -j & \text{if} & s < -j \end{array}\right.$$

Given $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, the sequence $\beta_j(u_0) = u_{0j}$ belongs to $H_0^1(\Omega)$, Stampacchia [10], and

(1.117) $$u_{0j} \to u_0 \quad \text{in} \quad H_0^1(\Omega).$$

By our usual notation, G_k is the function

$$G_k(s) = \int_0^t F_k(\xi)\,d\xi.$$

By Theorem 4, Lipschitz case, the mixed problem

(1.118) $$\left|\begin{array}{l} u''_{jk} - \Delta u_{jk} + F_k(u_{jk}) = 0 \quad \text{on} \quad Q \\ u_{jk} = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ u_{jk}(0) = u_{0j}\,,\ u'_{jk}(0) = u_1 \end{array}\right.$$

has only one solution u_{jk}, which satisfies, for $j,k \in \mathbb{N}$ the energy inequality (cf. energy inequality (1.108))

(1.119) $$|u'_{jk}(t)|^2 + \|u_{jk}(t)\|^2 + 2\int_\Omega G_k(u_{jk}(s,t))\,dx \le |u_1|^2 + \|u_0\|^2 + 2\int_\Omega G_k(u_{oj})\,dx.$$

To obtain an estimate for the right hand side of (1.119) we need estimate the term $G_k(u_{0j})$, which is positive because $sF_k(s) \geq 0$ for all s real.

In fact, u_{0j} is bounded for all $j \in \mathbb{N}$. In $0 \leq s \leq u_{0j}$ we have uniform convergence of $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$, that is,

$$F_k(s) \to F(s) \quad \text{uniformly on} \quad 0 \leq s \leq u_{0j}\,.$$

This implies, integrating on $[0, u_{0j}]$

$$G_k(u_{0j}) \to G(u_{0j}) \quad \text{a.e. in } \Omega, \text{ as } k \to \infty.$$

But

$$\frac{d}{du_{0j}}\, G_k(u_{0j}) \to \frac{d}{du_{0j}}\, G(u_{0j}) \quad \text{uniformly on} \quad \Omega. \tag{1.120}$$

It then follows that

$$G_k(u_{0j}) \to G(u_{0j}) \quad \text{uniformly on} \quad \Omega$$

then

$$\int_\Omega G_k(u_{0j})\, dx \to \int_\Omega G(u_{0j})\, dx. \tag{1.121}$$

We can extract a subsequence $(u_{0\nu})_\nu \in \mathbb{N}$ of $(u_{0j})_{j\in\mathbb{N}}$ such that

$$u_{0j} \to u_0 \quad \text{a.e. in} \quad \Omega.$$

This is a consequence, of the convergence of $(u_{0j})_{j\in\mathbb{N}}$ in $H^1_0(\Omega)$ and by continuity of G, we have $G(u_{0\nu}) \to G(u_0)$ a.e. in Ω.

We will prove that

$$\int_\Omega G(u_{0\nu})\, dx \to \int_\Omega G(u_0)\, dx. \tag{1.122}$$

In fact, $\displaystyle\int_\Omega G(u_0)\, dx$ exists by hypothesis. Let us prove (1.122) as a consequence of Corollary 2 of Theorem 3. We have

$$\int_G |G(u_{0\nu})|^2\, dx = \int_\Omega \left| \int_0^{u_{0\nu}} F(s)\, ds \right| dx \leq c \int_\Omega ||u_{0\nu}||^2\, dx < c_1$$

because $u_{0\nu} \to u_0$ in $H_0^1(\Omega)$. Then, Corollary 2, implies (1.122). By (1.121) and (1.122) it follows that the right hand side of (1.119) is bounded independent of ν and k. We have

$$|u'_{\nu k}(t)|^2 + \|u_{\nu k}(t)\|^2 + 2\int_0^t G(u_{\nu k}(x,t))\,dx < c \tag{1.123}$$

for all for $(\nu, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. The same is true for the diagonal (ν, ν) which we represent by $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. We then obtain, from (1.123) and for the subsequence $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$,

$$|u'_i(x)|^2 + \|u_i(x)\|^2 + 2\int_\Omega G_i(u_i(x,t))\,dx < c \tag{1.124}$$

for all $i \in \mathbb{N}$.

From (1.124) we obtain a subsequence still denoted by $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ such that:

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{1.125}$$

$$(u'_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{is bounded in} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{1.126}$$

Note that from Theorem 4 and (1.118) we have:

$$\frac{d}{dt}(u'_{jk}(t), v) + ((u_{jk}(t), v)) + (F_k(u_{jk}), v) = 0,$$

for all $v \in H_0^1(\Omega)$, in the sense of $\mathcal{D}'(0,T)$. This equation is true for all $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, in particular for the diagonal (ν, ν), that is, for the sequence $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Then u_i is solution of

$$\frac{d}{dt}(u_i(t), v) + ((u_i(t), v)) + (F_i(u_i(t)), v) = 0 \tag{1.127}$$

for all $v \in H_0^1(\Omega)$, in the sense of $\mathcal{D}'(0,T)$.

By (1.125) and (1.126) we obtain subsequences still represented by $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ such that the two first terms of the right hand side of (1.127) converges to $\frac{d}{dt}(u(t), v)$ and $((u(t), v))$ respectively. We need to prove that $(F_i(u_i(t)), v)$ converges to $(F(u(t)), v)$. This will be done employing compactness and W.A. Strauss convergence theorem (cf. Theorem 3).

In fact, by estimates (1.125), (1.126) and Aubin-Lions compactness theorem, J.-L. Lions [2], we obtain a subsequence $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ of $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ such that

$$u_\mu \to u \quad \text{strongly in} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{1.128}$$

and, a subsequence such that

$$u_\mu \to u \quad \text{a.e. in} \quad Q. \tag{1.129}$$

By the continuity of F, we obtain:

$$F(u_\mu) \to F(u) \quad \text{a.e. in} \quad Q \tag{1.130}$$

when we fixe (x, t) in Q, in which $u_\mu(x, t) \to u(x, t)$ by (1.129) it follows that $u_\mu(x, t)$ is bounded. Then:

$$F_\mu(u_\mu(x, t)) \to F(u_\mu(x, t)) \quad \text{a.e. in} \quad Q. \tag{1.131}$$

In order to obtain $L^1(Q)$ convergence of $(F_\mu(u_\mu))_{\mu\in\mathbb{N}}$ we need only verify (b), Remark 4 of Theorem 3, that is, $0 < \int_\Omega F_\mu(u_\mu)\, dxdt < c$. From (1.127) it follows:

$$u''_\mu - \Delta u_\mu + F_\mu(u_\mu) = 0 \quad \text{in} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Whence,

$$\int_0^T \left\langle u''_\mu(t), w\right\rangle\, dt + \int_0^T ((u_\mu(t), w))\, dt \int_0^T (F_\mu(u_\mu), w)\, dt = 0 \tag{1.132}$$

for all $w \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$. By the Lipschitz case we have $u_\mu \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$, then we can take $w = u_\mu$ in (1.132), what gives:

$$\int_0^T \left\langle u''_\mu, u_\mu\right\rangle\, dt + \int_0^T ||u_\mu(t)||^2\, dt + \int_0^T \int_\Omega F_\mu(u_\mu)u_\mu\, dxdt = 0.$$

We have

$$\int_0^T \left\langle u''_\mu, u_\mu\right\rangle\, dt = (u'_\mu(T), u_\mu(T)) - (u'_\mu(0), u_\mu(0)) - \int_0^T |u'_\mu(t)|^2\, dt.$$

This implies that the two first terms of the right hand side of (1.132) for $w - u_\mu$ are bounded and, consequently, the term

$$\int_0^T \int_\Omega F_\mu(u_\mu)u_\mu\, dxdt$$

is bounded. Note that $F_\mu(u_\mu)u_\mu \geq 0$, cf. Lemma 5. Then by W.A. Strauss convergence theorem we obtain:

$$F_\mu(u_\mu) \to F(u) \quad \text{in} \quad L^1(Q)$$

we can pass the limit in (1.127) and we get:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + ((u(t < v)) + (F(u), v) = 0 \tag{1.133}$$

for all $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ in the sense of $\mathcal{D}'(0,T)$.

From (1.133) it follows that

$$u'' - \Delta u + F(u) = 0 \quad \text{in the sense of} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Note that $F(u) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ and $-\Delta u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ what implies:

$$u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^1(0,T;L^1(\Omega)).$$

But $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \subset L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega))$ and $L^1(0,T;L^1(\Omega)) \subset L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega))$. We obtain $u'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega))$ what gives (1.114). The other conditions follows. □

1.4 Ultra Weak Solutions

In this section we consider the wave equation with weaker data. More precisely, we consider the problem.

Problem 1. Given

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad u_1 \in H^{-1}(\Omega), \quad f \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

find $u\colon Q \to \mathbb{R}$ solution of

$$(*) \qquad \left|\begin{array}{l} u'' - \Delta u = f \quad \text{on} \quad Q \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ u(0) = u_0\,,\ u'(0) = u_1 \end{array}\right.$$

By virtue of the peculiarity of the initial data u_0, u_1 and the force f, we need to modify the concept of solution for $(*)$. This new concept was introduced in Lions-Magenes [3]. There are, at least, two methods to prove existence and uniqueness for solution of $(*)$. One called Direct Method consisting in approximate $(*)$ by weak problems as studied in the Section 2. A second method, called Transposition Method which is an application of Riesz's representation theorem. We consider in this notes the Direct Method.

Let us consider for $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ the mixed problem:

$$(1.134) \qquad \left| \begin{array}{l} v'' - \Delta v = h \\ v = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ v(T) = u_0\,, \;\; v'(T) = 0 \text{ on } \Omega \end{array} \right.$$

This backward problem is well posed in Sobolev spaces. It is sufficient consider the change of variables $\hat{v}(t) = v(T-t)$. By Section 2, Theorem 2, we deduce the existence and uniqueness of a solution v with the following regularity:

$$v \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)); \quad v' \in C^0([0,T];L^2(\Omega)); \quad v'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Operating formally, multiply both sides of $(*)$ by v solution of (1.134) and integrate on Q. We obtain:

$$(1.135) \qquad \int_0^T (u(t), v''(t) - \Delta v(t))\, dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle + \langle u_1, v(0)\rangle - (u_0, v'(0)).$$

Let us represent by

$$X = \{ \text{ solutions of (1.134), when } h \text{ varies}\}.$$

Definition 1. We call ultra weak solution of the Problem 1, a function $u\colon Q \to \mathbb{R}$ such that

$$\int_0^T (u(t), v''(t) - \Delta v(t))\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle \; dt + \langle u_1, v(0)\rangle - (u_0, v''(0))$$

for all $v \in X$ such that $v''(t)$, $\Delta v(t) \in L^2(\Omega)$, and $u(0) = u_0\,, \;\; u'(0) = u_1\,.$

Note that if we consider h regular, the set of $v \in X$ such that $v''(t), \Delta v(t) \in L^2(\Omega)$ is not empty.

Theorem 7. If

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad u_1 \in H^{-1}(\Omega), \quad f \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{1.136}$$

then exists a unique function $u\colon Q \to \mathbb{R}$ such that:

$$u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{1.137}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{1.138}$$

(1.139) u is an ultra weak solution of the Problema 1.

$$u \in C^0([0,T];L^2(\Omega)), \quad u' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)) \tag{1.140}$$

Proof: We divide the proof, by Direct Method, in steps.

Step 1 – Approximations of u_0, u_1 and f by regular functions. We have the inclusion $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ with injections continuous and dense. Let us consider the approximations:

$$f_n \in L^1(0,T;L^2(\Omega)); \, u_{0n} \in H_0^1(\Omega) \text{ and } u_{1n} \in L^2(\Omega), \text{ for all } n \in \mathbb{N},$$

sequences such that

$$\{f_n, u_{0n}, u_{1n}\} \to \{f, u_0, u_1\} \text{ in } L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega). \tag{1.141}$$

Now, let us consider the following weak problems:

$$\left|\begin{array}{l} u_n'' - \Delta u_n = f_n \quad \text{in} \quad Q \\ u_n = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ u_n(0) = u_{0m}, \ u_n'(0) = u_{1n} \text{ in } \Omega \end{array}\right. \tag{1.142}$$

The problem (1.142), as we know by Theorem 2, Section 2, has only one solution u_n for all $n \in \mathbb{N}$ with the following properties:

$$\left| \begin{array}{l} u_n \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u_n' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d}{dt}(u_n'(t),v) + ((u_n(t),v)) + (f(t),v), \\ \qquad \text{for all } v \in H_0^1(\Omega), \text{ in the sense of } \mathcal{D}'(0,T) \\ u_n'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ u_n'' - \Delta u_n + F(u_{n-1}) = 0 \text{ in the sense of } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ u_n(0) = u_{0n},\ u_n'(0) = u_{1n}\,. \end{array} \right. \tag{1.143}$$

We have more:

$$u_n'' - \Delta u_n = f_n \text{ in the sense of } L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{1.144}$$

$$u_n \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \text{ and } u_n' \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \tag{1.145}$$

Step 2 – (A priori estimate). We know that $-\Delta$ is an isomorphism between $H_0^1(\Omega)$ and $H^{-1}(\Omega)$. We then define a natural inner product in $H^{-1}(\Omega)$ as follows: For all $v \in H^{-1}(\Omega)$ we have $G-(-\Delta)^{-1}v$ belong to $H_0^1(\Omega)$. Then, for all pair $u, v \in H^{-1}(\Omega)$ we define the bilinear form

$$(u,v)_* = \langle u, Gv \rangle = ((Gu, Gv)) \tag{1.146}$$

where $\langle\ ,\ \rangle$ is the duality pairing between $H^{-1}(\Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$. It follows that $(\ ,\ )_*$ defined by (1.146) is an inner product in $H^{-1}(\Omega)$. The induced norm is

$$||v||_*^2 = \langle v, Gv \rangle = ||Gv||^2 \tag{1.147}$$

for all $H^{-1}(\Omega)$.

Now we are able to obtain estimates for the solutions of the approximate system (1.142). We have from (1.145), $u_n'(t) \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ continuously. Then $Gu_n' \in H_0^1(\Omega)$ and make sense the inner product of Gu_n' and $u_n'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Also by (1.145) we have $-\Delta u_m(t) \in H^{-1}(\Omega)$, then make sense the inner product:

$$(-\Delta u_n(t), u_n'(t))_* = (u_n'(t), -\Delta u_n'(t))_* = \langle u_n'(t), G(-\Delta u_n(t))\rangle = (u_n'(t), u_n(t)).$$

Taking the inner product in $H^{-1}(\Omega)$ of both sides of (1.142) with $u_n'(t)$, we obtain:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_n'(t)\|_*^2 + |u_n(t)|^2\right) \leq 2\|f_n\|_* \, \|u_n'(t)\|_* \,. \tag{1.148}$$

Integrating (1.148) from 0 to t, we obtain:

$$\begin{aligned} \|u_n'(t)\|_*^2 + |u_n(t)|^2 \leq \|u_{1n}\|_*^2 + \int_0^T \|f_n(t)\|_* \, dt + \\ + \int_0^t \|f_n(s)\|_* \, \|u_n'(s)\|_*^2 \, ds. \end{aligned} \tag{1.149}$$

Note that (1.149) is an inequality of the type:

$$\phi_n(t) \leq k_n + \int_0^t \theta_n(s)\phi_n(s)\, ds \tag{1.150}$$

with $\theta_n \in L^1(0,T)$. Note that $\theta_n(s) = \|f_n(s)\|_*$; $\phi_n(t) = \|u_n'(t)\|_*^2 + |u_n(t)|^2$; $K_n = \|u_{1n}\|_*^2 + |u_{0n}|^2 + \int_0^T \|f_n(s)\|_* \, ds$. From (1.150) and Gronwall's inequality, we obtain:

$$\phi_n(t) \leq cK_n\,, \ c \ \text{ constant independent of } \ n.$$

We then obtain:

$$\|u_n'(t)\|_*^2 + |u_n(t)|^2 \leq c\left(\|u_{1n}\|_*^2 + |u_{0n}|^2 + \int_0^T \|f_n(t)\|_* \, dt\right). \tag{1.151}$$

By (1.141) it follows that K_n is bounded, then from (1.151) we have:

$$\|u_m'(t)\|_*^2 + |u_n(t)|^2 < c, \quad \text{for all } \ 0 \leq t \leq T. \tag{1.152}$$

From (1.152), we get:

$$\left|\begin{array}{lll} u_n & \text{is bounded in} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ u_n' & \text{is bounded in} & L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{array}\right. \tag{1.153}$$

Step 3 – (Limit of the approximate solutions). From (1.153) we obtain a subsequence still represented by $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, such that:

$$\left| \begin{array}{lll} u_n \to u & \text{weak star in} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ u_n' \to u' & \text{weak star in} & L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{array} \right. \tag{1.154}$$

Step 4 – (u is ultra weak solutions). From (1.142) taking the inner product in $H^{-1}(\Omega)$ with $v \in X$ such that $v'', \Delta v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$,

$$\int_0^T (u_n(t), v''(t) - \Delta v(t))\, dt = \int_0^t \langle f_n(t), v(t)\rangle \; dt + \langle u_{1n}, v(0)\rangle - (u_{0n}, v'(0)). \tag{1.155}$$

When $n \to \infty$ in (1.155), from (1.141) and (1.154), we obtain:

$$\int_0^T (u(t), v''(t) - \Delta v(t))\, dt \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle \; dt + \langle u_1, v(0)\rangle - (u_0, v'(0))$$

for all $v \in X$ such that $v'', \Delta v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

If we have two ultra weak solution u, $\hat{u}$, then

$$\int_0^T (u(t) - \hat{u}(t), v''(t) - \Delta v(t))\, dt = 0$$

for all $v \in X$ such that $v'', \Delta v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. This implies $u = \hat{u}$, proving uniqueness.

Step 5 – (Regularity). Let us prove now that the solution u is in $C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

In fact, we know that the same regularity is true for u_n. From (1.142), for $m \neq n$, we have:

$$u_m'' - u_n'' - \Delta(u_m - u_n) = f_m - f_n \quad \text{in} \quad L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{1.156}$$

Taking the inner product in $H^{-1}(\Omega)$ of both sides of (1.156) with $u_m'(t) - u_n'(t)$, we obtain:

$$\begin{aligned} &||u_m''(t) - u_n'(t)||_*^2 + |u_m(t) - u_n(t)|^2 \leq \\ &\leq c\left(||u_{1m} - u_{1n}||_*^2 + |u_{0m} - u_{0n}|^2 + \int_0^T ||f_m(s) - f_n(s)||_* \, ds \right). \end{aligned} \tag{1.157}$$

It follows from (1.157) and (1.141) that:

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\{\operatorname*{Max}_{0\le t\le T}\,[\|u_n'(t)-u_n'(t)\|_*^2+|u_n(t)-u_n(t)|^2]\right\}=0.$$

Then,

$$(1.158)\qquad \left|\begin{array}{l} u_n \to v \quad \text{strongly in} \quad C^0(0,T;L^2(\Omega)) \\ u_n' \to w \quad \text{strongly in} \quad C^0(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{array}\right.$$

By (1.154) we obtain $v = u$ and $w = u'$, proving that the ultra weak solution $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Step 6 – (Trace of u in Σ). After integration by parts in the equation:

$$\int_0^T (u(t), v''(t) - \Delta v(t))\,dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\ dt + \langle u_1, v(0)\rangle - (u_0, v'(0))$$

for all $v \in X$, such that $v'', \Delta v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, we obtain:

$$\int_0^T\int_\Gamma u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Gamma\,dt = 0.$$

Then $u = 0$ on Σ in this sense, if integration by parts is correct.

Step 7 – (Initial data). By Step 4 and (1.156) we obtain $u(0) = u_0$ and $u'(0) = u_1$. $\square$

Interpretation. From (1.143) the solution u_n is such that:

$$\int_0^T (u_n(t), \varphi)\theta''\,dt + \int_0^T (\nabla u_n(t), \nabla\varphi)\theta\,dt = \int_0^T (f_n, \varphi)\theta\,dt$$

for all $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

When $n \to \infty$ we obtain the ultra weak solution u satisfies the equation

$$\int_0^T (u(t), \varphi)\theta''\,dt + \int_0^T (u(t), -\Delta\varphi)\theta\,dt = \int_0^T (f(t), \varphi)\,dt$$

for all $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ or for all $\phi \in \mathcal{D}(\Omega\times]0,T[)$. The, $u''-\Delta u = f$ in $\mathcal{D}'(Q)$.

References

[1] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[2] J.L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[3] J.L. Lions - E. Magenes, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, Vol. 1*, Dunod, Paris, 1968.

[4] L.A. Medeiros, *On the weak solutions of Non Linear Partial Differential Equations*, An. Acad. Bras. Cienc. (1981) 53(1), pp. 13-15.

[5] L. Schwartz, *Théorie des Distributions, Tome I, II*, Herman Ed., Paris, 1950.

[6] S. Sobolev, *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, AMS Transactions of Mathematical Monographs, Vol. 7 (1963).

[7] W.A. Strauss, *The Energy Method in Nonlinear Partial Differential Equations*, IMPA-CNPq, Rio de Janeiro, RJ, 1968.

[8] W.A. Strauss, *On weak solutions of Semi-Linear Hyperbolic Equations*, An. Acad. Bras. Cienc. 42(4), 1970, pp. 645-651.

[9] R. Temam, *Navier-Stokes Equations (Theory and Numerical Analysis)*, North Holland, Oxford, 1979.

[10] G. Stampacchia, *Equations Elliptics of Second Order a Coefficients Discontinuous*, Le Presse de l'Université de Montreal, 1966.

Análise Matemática do Sistema de Elasticidade

L. A. Medeiros

Instituto de Matemática-UFRJ

IM-UFRJ - Setembro de 1985

Rio de Janeiro - RJ

Introdução

O objetivo que se tem em mente, nesta exposição, é analisar, do ponto de vista matemático, o sistema da elasticidade. Na esperança de tornar inteligível a simbologia que nele aparece, procura-se fazer sua dedução a partir de considerações físicas intuitivas. Esta exposição baseia-se em Duvaut-Lions [1], sendo parte da disciplina Equações Diferenciais Parciais do IM-UFRJ.

O plano da presente exposição é o seguinte:

1. Deformações Locais
2. Análise das Tensões - Elasticidade Linear
3. Estudo Matemático do Sistema da Elasticidade

2.1 Deformações Locais

Suponha-se que um corpo elástico ocupe uma parte do $\mathbb{R}^3$, que num instante t_0 representa-se por Ω_0 e num instante t, após mudança de sua configuração, devida a deformações, ocupe uma parte Ω do $\mathbb{R}^3$. Pensa-se em Ω_0 e Ω como abertos limitados e conexos do $\mathbb{R}^3$, cuja fronteira, suposta regular, representa-se por Γ_0 e Γ. A Figura 1 mostra uma imagem gráfica daquilo que foi dito acima.

Supõe-se uma base ortonormal (e_1, e_2, e_3) do $\mathbb{R}^3$ com origem no ponto O. Sejam P_0 um ponto de Ω_0 e Q_0 um ponto de Ω_0 em uma vizinhança de P_0. Tem-se $P_0 - O = x$, $Q_0 - O = P_0 - O + Q_0 - P_0 = x + dx$. Devido à deformação, o ponto P_0 transformou-se no ponto P de Ω. Diz-se que houve um deslocamento de P_0 o qual representa-se por $u(x)$, dependendo de P_0. Admite-se que o ponto Q_0 sofreu um deslocamento ocupando a posição Q em Ω, pertencente a uma vizinhança de P. Logo, sendo $Q_0 - O = x + dx$, a

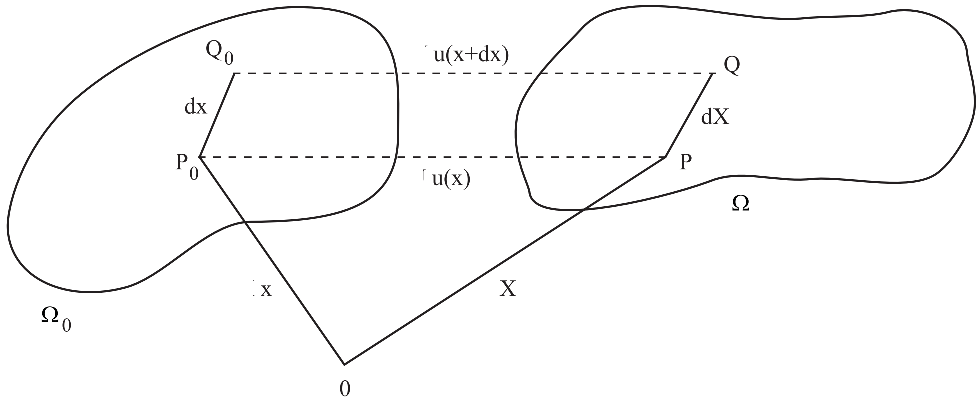


Figura 1

deformação $Q - Q_0$ será $u(x + dx)$. Anote-se $P - O$ por X e $Q - P$ por dX. A próxima etapa será escrever-se $Q - P = dX$ como uma função dos deslocamentos conhecidos: dx, $x + dx$, $u(x + dx)$. Obtém-se, admitindo-se P_0Q_0QP um paralelogramo:

$$Q - P = (Q_0 - P_0) + (Q - Q_0) - (P - P_0). \tag{2.1}$$

De (2.1), com a notação convencionada, resulta:

$$dX = dx + u(x + dx) - u(x). \tag{2.2}$$

Note-se que $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ e u é uma função vetorial definida em Ω_0, isto é, $u(x) = u_1(x)e_1 + u_2(x)e_2 + u_3(x)e_3$. Supõe-se que u seja continuamente diferenciável em Ω e seu gradiente representa-se por ∇u. Resulta do teorema do valor médio:

$$u(x + dx) - u(x) = \nabla u \cdot dx \tag{2.3}$$

sendo $\nabla u \cdot dx$ o vetor obtido transformando o vetor dx pela matriz ∇u, calculada num ponto intermediário. De (2.3), a (2.1) toma a forma:

$$dX = dx + \nabla u \cdot dx. \tag{2.4}$$

Observação 1. Quando $\nabla u = 0$ resulta que $dX = dx$, concluindo-se não ter havido deslocamentos relativos dos pontos de Ω_0. Segue-se, portanto, que o gradiente de $u(x)$

mede a deformação sofrida pelo corpo elástico ao mudar a sua configuração de Ω_0 para Ω. Note-se que ∇u, para a função vetorial

$$u\colon \Omega_0 \to \Omega, \quad \Omega_0, \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

é um tensor de ordem dois. Assim, dito de outro modo, o tensor ∇u mede as deformações locais do corpo elástico Ω_0.

Observação 2. Note-se que ao formular-se o problema do estudo das deformações, supõe-se a variação no tempo. Resulta que u depende de x em Ω_0 e t em $(0, T)$. Na notação omite-se o parâmetro t em algumas equações.

Observação 3. Fazendo-se uso da base (e_1, e_2, e_3) escolhida para o $\mathbb{R}^3$, tem-se:

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Considere-se, desta vez, dois pontos Q_0, Q_0' numa vizinhança de P_0, isto é, os vetores

$$Q_0 - P_0 = dx \quad \text{e} \quad Q_0' - P_0 = dy.$$

Os pontos Q_0, Q_0', quando Ω_0 se deforma, transformam-se nos pontos Q e Q' da configuração Ω. Obtém-se $Q - P = dX$ e $Q' - P = dY$, portanto a equação (2.4) escreve-se:

$$dX = dx + \nabla u \cdot dx \quad \text{e} \quad dY = dy + \nabla u \cdot dy. \tag{2.6}$$

Para medir-se a deformação é suficiente calcular-se $||dX - dY||$, isto é, a norma no $\mathbb{R}^3$ do vetor $dX - dY$. Obtém-se:

$$||dX - dY||^2 = (dX - dY \mid dX - dY) = ||dX||^2 - 2(dX \mid dY) + ||dY||^2.$$

A hipótese de pequenas deformações permite eliminar os termos quadráticos dos cálculos. Logo, para medir as deformações é suficiente analisar a forma bilinear $(dX \mid dY)$. Obtém-se de (2.6):

$$(dX \mid dY) = (dx + \nabla u \cdot dx \mid dy + \nabla u \cdot dy)$$

ou,

$$(dX \mid dY) = (dx \mid dy) + (dx \mid \nabla u \cdot dx) + (\nabla u \cdot dx \mid dy) + (\nabla u \cdot dx \mid \nabla u \cdot dy).$$

Representando por $(\nabla u)^*$ a matriz transposta de ∇u dada por (2.5), obtém-se:

$$(dX \mid dY) = (dx \mid dy) + (dx \mid \nabla u \cdot dy) + (dx \mid (\nabla u)^* \cdot dy) + (dx \mid (\nabla u)^* \nabla u \cdot dy)$$

ou

$$(dX \mid dY) = (dx \mid dy) + (dx \mid [\nabla u + (\nabla u)^* + (\nabla u)^* \nabla u] \cdot dy).$$

Fazendo-se:

$$\varepsilon^*(u) = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^* + (\nabla u)^* \nabla u], \tag{2.7}$$

obtém-se:

$$(dX \mid dY) = (dx \mid dy) + 2(dx \mid \varepsilon^*(u) \cdot dy). \tag{2.8}$$

A equação (2.7) caracteriza as deformações numa vizinhança de um ponto P_0. O tensor $\varepsilon^*(u)$ é denominado tensor de deformações.

Sendo $(\nabla u)^*$ a transposta de ∇u, um elemento c_{ij} do produto $(\nabla u)^* \nabla u$ que define-se como o produto escalar do vetor linha i de $(\nabla u)^*$ pelo vetor coluna j de ∇u, será

$$c_{ij} = \sum_k a^*_{ik} \, a_{kj} \,,$$

isto é,

$$c_{ij} = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \,. \tag{2.9}$$

De (2.9), o tensor de deformações (2.7) toma a forma:

$$\varepsilon^*_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right), \tag{2.10}$$

sendo $\varepsilon^*_{ij}(u)$ o elemento situado na linha i e coluna j.

Note-se que $\varepsilon^*(u)$ é não linear. Trabalha-se, entretanto, com uma linearização de $\varepsilon^*(u)$ dada por

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^*\right) \tag{2.11}$$

que também é simétrico. Assim, o tensor linearizado $\varepsilon(u)$ será denominado, simplesmente, tensor de deformações. A expressão (2.10) para o tensor linearizado tem a forma:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.12}$$

Obtém-se:

$$\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

De (2.11) a equação (2.8), caracterizando as deformações, reduz-se a seguinte:

$$(dX \mid dY) = (dx \mid dy) + (dx \mid \varepsilon(u)\cdot dy). \tag{2.13}$$

Observação 4. Quando ∇u for anti-simétrico, isto é, $(\nabla u)^* = -\nabla u$, resulta que $\varepsilon(u) = 0$ e de (2.13) obtém-se:

$$(dX \mid dY) = (dx \mid dy),$$

mostrando não haver deformação. Trata-se de um movimento rígido. Posteriormente, será analisada esta situação com mais cuidado.

Interpretação dos Elementos de $\varepsilon(u)$.

i) Suponha-se que fixou-se uma direção ν no $\mathbb{R}^3$ e que $dy = dx = ||dx||\nu$. Considerando

$dY = dX$, resulta de (2.13):

$$\|dX\|^2 - \|dx\|^2 = 2\|dx\|^2(\nu \mid \varepsilon(u) \cdot \nu). \tag{2.14}$$

Da hipótese de pequenas deformações, obtém-se:

$$\|dX\|^2 - \|dx\|^2 = \big(\|dX\| - \|dx\|\big)\big(\|dX\| + \|dx\|\big) \approx \big(\|dX\| - \|dx\|\big)2\|dx\|.$$

Daí, a (2.14) reduz-se a seguinte:

$$\frac{\|dX\| - \|dx\|}{\|dx\|} \approx (\nu \mid \varepsilon(u) \cdot \nu).$$

Note que $\big(\|dX\| - \|dx\|\big)/\|dx\|$ mede a variação média de comprimento. Resulta que conhecido $\varepsilon(u)$ é simples calcular variações de comprimento das deformações em uma vizinhança de P_0 em Ω_0, numa determinada direção ν. Assim, por exemplo, considerando-se $\nu = e_i$, vetor da base ortonormal (e_1, e_2, e_3) do $\mathbb{R}^3$, a variação unitária de comprimento em P_0 na direção e_i será:

$$(e_i \mid \varepsilon(u) \cdot e_i) = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cdot$$

Conclui-se que os elementos ε_{ii} da diagonal principal de $\varepsilon(u)$ permitem calcular a variação de comprimento na direção dos vetores da base (e_1, e_2, e_3).

ii) Para interpretar-se os elementos fora da diagonal principal de $\varepsilon(u)$, são consideradas duas direções perpendiculares ν e η do $\mathbb{R}^3$. Supõe-se $dx = \|dx\|\nu$, $dy = \|dy\|\eta$ e substitui-se em (2.13), obtendo-se:

$$\|dX\|\,\|dY\| \cos\theta = 2\|dx\|\,\|dy\| \ (\nu \mid \varepsilon(u)\eta) \tag{2.15}$$

sendo θ o ângulo de dX em dY. Seja φ o decréscimo do ângulo de dx com dy. Tem-se $\theta = \pi/2 - \varphi$, logo $\cos\theta = \operatorname{sen}\varphi \approx \varphi$, em virtude da hipótese de pequenas deformações. Admitindo-se $\|dX\| \approx \|dx\|$, $\|dY\| \approx \|dy\|$, em (2.15), obtém-se:

$$\varphi \approx 2(\nu \mid \varepsilon(u)\eta)$$

para o cálculo do ângulo que mede o decréscimo do ângulo dos vetores dx, dy.

Tomando-se $\nu = e_i\,, \ \ \eta + e_j \ \ i \neq j$, tem-se duas direções perpendiculares. O ângulo φ será obtido por:

$$\varphi \approx (e_i \mid \varepsilon(u) e_j) = 2\varepsilon_{ij}\,,$$

que é o elemento ε_{ij} situado na linha i e coluna j de $\varepsilon(u)$, fora da diagonal. O ângulo φ denomina-se ângulo de cisalhamento.

Conclui-se, de i) e ii), que o tensor de deformações $\varepsilon(u)$ permite avaliar variações de comprimento nas direções $e_1\,, \ e_2\,, \ e_3$ e cisalhamento de figuras com arestas ou faces paralelas a estas direções.

2.2 Análise das Tensões

Suponha-se o corpo elástico Ω em equilíbrio sob a ação de esforços exteriores constituídos de uma densidade volumétrica de forças atuando em Ω e de uma densidade superficial de forças atuando sobre a fronteira Γ de Ω. Tais esforços geram no interior de Ω um campo de tensões, o qual será examinado a seguir.

Imagine-se um ponto P situado no interior de Ω e por P uma superfície regular S decompondo Ω em dois abertos Ω_1 e Ω_2, com fronteira comum S. A Figura 2 fornece uma imagem visual.

Considere-se Ω_1 como um novo corpo elástico. Com n representa-se o vetor unitário da normal a S em P, externa a Ω_1. As considerações a serem feitas são baseadas na hipótese de Cauchy – a ação de Ω_2 sobre Ω_1 ao longo da superfície S é representada por uma força σ_n, um vetor, que depende do tempo t, do ponto $P \in S$ e da normal externa n, à S no ponto P. Note que σ_n não depende de S. Portanto se x for a coordenada de P a força σ_n será uma função $\sigma(x,t,n)$ que é um vetor do $\mathbb{R}^3$. Diz-se que $\sigma_n = \sigma(x,t,n)$ é a tensão proveniente de Ω_2 sobre Ω_1 e $\sigma_{-n} = \sigma(x,t,-n)$ a tensão de Ω_1 sobre Ω_2. Pelo princípio

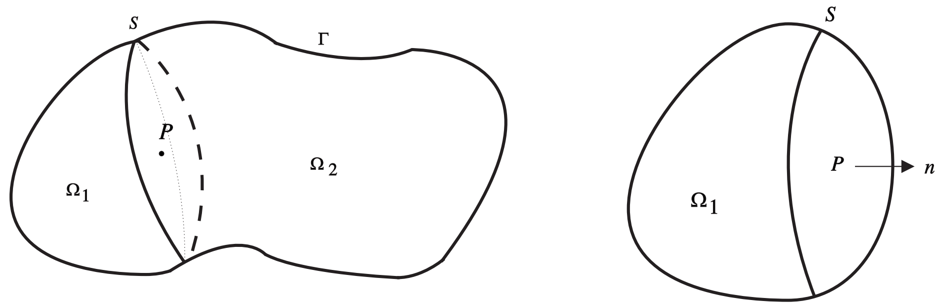


Figura 2

da ação e reação, terceira lei de Newton, obtém-se:

$$\sigma_{-n} = -\sigma_n \, .$$

Um dos resultados fundamentais da teoria matemática da elasticidade é o teorema de Cauchy que afirma: a tensão $\sigma(x, t, n)$ é uma função linear da normal n em cada ponto x em cada instante t. Suprimir-se-á o tempo t obtendo-se apenas $\sigma(x, n)$. Demonstrar-se-á que

$$\sigma(x, t, n) = \sigma(x, t) \cdot n \tag{2.16}$$

sendo $\sigma(x, t)$, para cada t, uma aplicação linear do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^3$.

Tome-se um ponto P qualquer de Ω e com vértice em P um tetraedro com arestas dx_1, dx_2, dx_3 paralelas, respectivamente, aos vetores e_1, e_2, e_3, como mostra a Figura 3.

Iniciando-se com a face PAB, a normal externa é $-e_1$ e a tensão em P é $\sigma_{-e_1} = -\sigma_{e_1} = -\sigma(x, t, e_1)$. Logo a tensão total na face será

$$-\sigma(x, t, e_1) a(PAB) \tag{2.17}$$

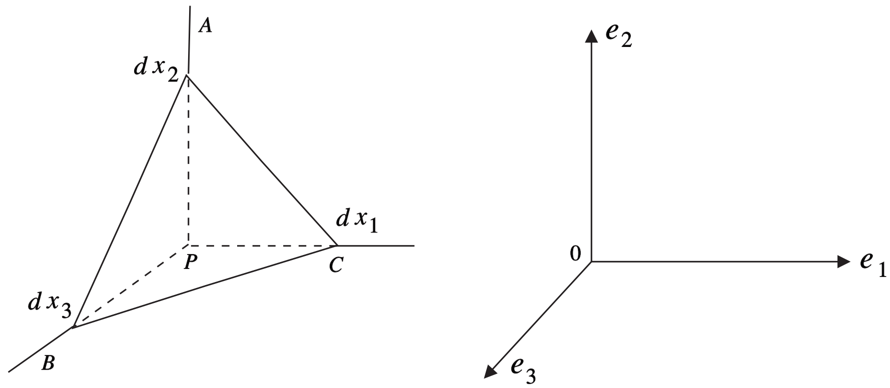


Figura 3

sendo $a(PAB)$, a área da face PAB.

Por argumento análogo encontra-se para as outras faces:

$$-\sigma(x,t,e_2)a(PBC), \tag{2.18}$$

tensão na face PBC;

$$-\sigma(x,t,e_3)a(PAC) \tag{2.19}$$

tensão na face PAC.

Sobre a face ABC, representando-se por $\sigma(x,t,n)$ a tensão em P, obtém-se:

$$\sigma(x,t,n)a(ABC). \tag{2.20}$$

Da segunda lei de Newton, $F = m\gamma$, resulta de (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), que

$$\begin{gathered} -\sigma(x,t,e_1)a(PBC) - \sigma(x,t,e_2)a(PBC)- \\ -\sigma(x,t,e_3)a(PAC) - \sigma(x,t,n)a(ABC) = m\gamma. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Sendo ρ a densidade do material de Ω, obtém-se

$$m = \frac{1}{3}\, a(PBC)dx_2\rho. \tag{2.22}$$

As áreas das faces com vértice em P, podem ser obtidas por meio de projeções da face ABC. De fato, sabe-se que $a(PAB)$ por exemplo, é igual a área de $a(ABC)$ multiplicado pelo coseno dos ângulos das normais a estas faces. A normal ao plano de e_2, e_3, é e_1, e a normal à face ABC é $n = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$. O coseno do ângulo será n_1. Logo

$$a(PBC) = a(ABC) n_1 . \tag{2.23}$$

Analogamente para as outras faces. Retornando a (2.21), substituindo (2.22), (2.23) e expressões semelhantes para $a(PBC)$, $a(PAC)$, e fazendo o tetraedro reduzir-se ao ponto P, mantendo-se a normal n constante, obtém-se de (2.21):

$$\sigma(x,t,n) = n_1\, \sigma(x,t,e_1) + n_2\, \sigma(x,t,e_2) + n_3\, \sigma(x,t,e_3)$$

provando que $\sigma(x,t,n)$ é uma função linear da normal n.

Tem-se, portanto, que

$$\sigma(x,t,n) = \sigma(x,t) \cdot n, \tag{16 bis}$$

sendo $\sigma(x,t)$, para cada t fixo, uma matriz no $\mathbb{R}^3$, na base e_1, e_2, e_3. Omite-se o parâmetro t e trabalha-se com $\sigma(x)$. A seguir será feito o cálculo das componentes da matriz $\sigma(x)$ ou do tensor $\sigma(x)$, denominado tensor de tensões calculado em x. Note que σ_n ou $\sigma(x,t,n)$ é o vetor tensão no ponto x no instante t, enquanto $\sigma(x,t)$ é um tensor de segunda ordem.

Tem-se, na base e_1, e_2, e_3:

$$\sigma_n = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3 , \tag{2.24}$$

onde σ_i são componentes do vetor σ_n.

De (16 bis) obtém-se:

$$\sigma_n = \sigma(x) \cdot n = n_1\, \sigma(x) \cdot e_1 + n_2\, \sigma(x) \cdot e_2 + n_3\, \sigma(x) \cdot e_3 . \tag{2.25}$$

Tem-se, na base e_1, e_2, e_3:

$$\sigma(x) e_i = \sum_j \sigma_{ji}(x) e_j , \tag{2.26}$$

$\sigma_{ji}(x)$ números reais.

De (2.24), (2.25), (2.26), obtém-se:

$$\sum_i \sigma_i e_i = \sum_i n_i \sum_j \sigma_{ji}(x) e_j = \sum_i \left(\sum_j \sigma_{ij}\, n_j \right) e_i\,. \tag{2.27}$$

De (2.27) encontra-se:

$$\sigma_i = \sum_j \sigma_{ij}(x) n_j\,, \tag{27 bis}$$

que são as componentes do vetor σ_n obtidas por meio das componentes do tensor $\sigma(x)$ e da normal n no ponto P de coordenada x.

A seguir serão obtidas as equações diferenciais das tensões e uma demonstração da simetria do tensor de tensões. Estas informações serão obtidas da condição de equilíbrio: "uma condição necessária de equilíbrio de um sistema mecânico é que a resultante das forças externas e o momento resultante destas forças em relação a um ponto qualquer sejam iguais a zero".

Da nulidade das forças externas resultam as equações diferenciais parciais das tensões, enquanto a nulidade do momento implica a simetria do tensor.

i) **Equações Diferenciais Parciais das Tensões**

Sendo R a resultante das forças externas, tem-se:

$$R_1 e_1 + R_2 e_2 + R_3 e_3 = 0$$

sendo R_i componentes de R segundo a base $e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\,.$

Cada componente R_i é constituída por uma parte R_i' correspondente às forças de massas e outra R_i'' relativa à tensão superficial. A força de massa F tendo componente F_i na direção e_i, sua ação sobre dx será $\rho\, dx\, F_i$ e sobre o Ω inteiro é:

$$\int_\Omega \rho\, F_i\, dx. \tag{2.28}$$

Sobre cada elemento de superfície $d\Gamma$ há uma tensão $\sigma d\Gamma$ na direção da normal externa n. A tensão do exterior sobre Γ será

$$-\int_\Gamma \sigma(x,n)d\Gamma.$$

Portanto, sua componente σ_i na direção e_i, será

$$-\int_\Gamma \sigma_i\, d\Gamma. \tag{2.29}$$

Na condição de equilíbrio para R, somando-se (2.28 e (2.29) obtém-se:

$$\int_\Omega \rho\, F_i\, dx - \int_\Gamma \sigma_i\, d\Gamma = 0. \tag{2.30}$$

Substituindo-se σ_i dado por (2.28) em (2.30), obtém-se:

$$\int_\Omega \rho\, F_i\, dx - \sum_j \int_\Gamma \sigma_{ij}\, n_j\, d\Gamma = 0. \tag{2.31}$$

Aplicando-se o Lema de Gauss a (2.31), obtém-se:

$$\int_\Omega \rho\, F_i\, dx - \sum_j \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\, dx = 0$$

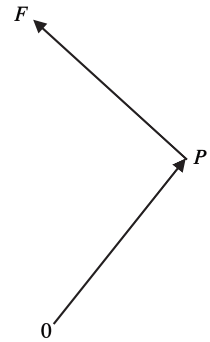
para todo aberto Ω do $\mathbb{R}^3$. Daí resulta:

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \rho\, F_i\,, \quad i = 1,2,3,\ldots \tag{2.32}$$

que é o sistema de equações diferenciais das tensões.

ii) **Simetria do Tensor de Tensões**

Da equação de equilíbrio para momentos, se M_i for a componente na direção e_i, tem-se $M_i = 0$. Cada componente M_i constitui-se de uma parte M_i' relativa a resultante das forças de massa e outra M_i'' relativa às tensões superficiais. Seja F_i a componene da resultante das forças de massa na direção e_i. O momento de F no ponto P em relação a 0 será:



$$\mathfrak{M}_0(F) = OP \wedge F.$$

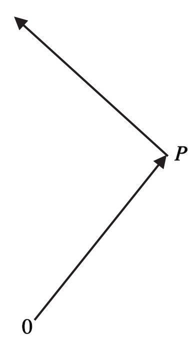
Sendo $OP = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ e $F = F_1e_1 + F_2e_2 + F_3e_3$, obtém-se:

$$\mathfrak{M}_0(F) = (x_2F_3 - x_3F_2)e_1 + (x_3F_1 - x_1F_3)e_2 + (x_1F_2 - x_2F_1)e_3 .$$

Resulta daí, que a componente M'_1 da resultante das forças de massa é:

$$M'_1 = \int_\Omega \rho(x_2F_3 - x_3F_2)dx. \tag{2.33}$$

O momento das tensões que o exterior exerce sobre o interior de Ω, será, no P, dado por:



$$\mathfrak{M}_0(-\sigma_n) = OP \wedge (-\sigma)$$

ou

$$\mathfrak{M}_0(-\sigma_n) = -(x_2\sigma_3 - x_3\sigma_2)e_1 + (x_1\sigma_3 - x_3\sigma_1)e_2 + (x_1\sigma_2 - x_2\sigma_1)e_3 .$$

A componente M''_1 deste momento em Γ é:

$$M''_1 = -\int_\Gamma (x_2\sigma_3 - x_3\sigma_2)\,d\Gamma.$$

De (27 bis) obtém-se:

$$M''_1 = -\sum_j \int_\Gamma (x_2\sigma_{3j} - x_3\sigma_{2j})n_j\,d\Gamma$$

e do Lema de Gauss, obtém-se:

$$M''_i = \sum_j \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(x_2\sigma_{3j} - x_3\sigma_{2j})\,d\Gamma$$

ou

$$\begin{aligned} M''_i = & -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2\sigma_{31} - x_3\sigma_{21})\,dx - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2\sigma_{32} - x_3\sigma_{22})\,dx - \\ & -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_3}(x_2\sigma_{33} - x_3\sigma_{23})\,dx. \end{aligned}$$

Efetuando as derivações indicadas, obtém-se:

$$\begin{aligned} M''_1 = & -\int_\Omega \Bigg[x_2\left(\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}\right) - \\ & -x_3\left(\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}\right) + \sigma_{32} - \sigma_{23}\Bigg]\,dx. \end{aligned} \tag{2.34}$$

De (2.32) resulta que o primeiro parênteses em (2.34) é ρF_3 e o segundo ρF_2. Portanto, a (2.34) reduz-se à expressão:

$$M''_1 = -\int_\Omega [\rho(x_2F_3 - x_3F_2) + \sigma_{32} - \sigma_{23}]\,dx. \tag{2.35}$$

Sendo $M'_1 + M''_1 = 0$, as igualdades (2.33) e (2.35)

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}\,.$$

De modo análogo, encontra-se $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, mostrando que o tensor de tensões é simétrico.

Tomando-se $f_i = -\rho F_i$, tem-se como objetivo analisar do ponto de vista matemático o sistema de equações diferenciais parciais

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.36}$$

Conhecendo-se a densidade ds forças que atuam na superfície de Γ e de Ω, por exemplo: $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$, deduz-se, do princípio de ação e reação, que a tensão superficial deve ser $-F$. Logo

$$\sigma_i = -F_i \quad \text{na fronteira } \Gamma \text{ de } \Omega$$

sendo σ_i a componente na direção e_i do vetor tensão σ_n ou σ. Daí, resulta que as condições naturais de contorno para o sistema (2.36) são

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, n_j = -F_i \quad \text{em} \quad \Gamma. \tag{2.37}$$

Denomina-se sistema da elasticidade o sistema (2.36) quando estabelece-se uma relação entre as tensões σ_{ij} e os deslocamentos ε_{ij}. Tal relação denomina-se lei de Hooke. Com o objetivo de obter uma relação possível de uma análise matemática, serão feitas algumas hipóteses sobre o corpo elástico, as quais implicarão em uma relação apropriada entre σ_{ij} e ε_{ij}.

Elasticidade Linear

Será admitido que as tensões e as deformações estão relacionadas por uma lei linear. Somente materiais que satisfazem a esta condição serão considerados. A lei que relaciona as deformações com as tensões, denomina-se lei de Hooke, como já foi dito. Matematicamente tem-se:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon(u)). \tag{2.38}$$

Supõe-se, portanto, que $\sigma(\varepsilon(u))$ seja uma função linear. Tratando-se de uma aplicação do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^3$, supõe-se que seja da forma:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{3} a_{ijk\ell}\, \varepsilon_{k\ell}\,. \tag{2.39}$$

Além de supor-se linearidade na dependência entre tensões e deformações, supõe-se, também, que o material seja isotrópico, isto é, suas propriedades mecânicas não dependem da direção. Os números $a_{ijk\ell}$ são denominados componentes do tensor da elasticidade.

Diz-se que um tensor é isotrópico quando suas componentes não variam por mudança de bases ortonormais. O tensor da elasticidade é isotrópico. A identidade I é um tensor isotrópico pois suas componentes são os números δ_{ij}. Outros exemplos de tensores isotrópicos de quarta ordem são:

$$A_{ijk\ell} = \delta_{ij}\delta_{k\ell}\,; \quad B_{ijk\ell} = \delta_{i\ell}\delta_{jk}\,; \quad C_{ijk\ell} = \delta_{ik}\delta_{\ell j}\,. \tag{2.40}$$

Demonstra-se que todo tensor de quarta ordem, isotrópico, é uma combinação linear dos três tensores definidos em (2.40). Assim, os tensores $A_{ijk\ell}$, $B_{ijk\ell}$, $C_{ijk\ell}$ formam uma base para os tensores isotrópicos de quarta ordem.

Supondo-se isotrópico o tensor da elasticidade, obtém-se:

$$a_{ijk\ell} = \lambda\, A_{ijk\ell} + \alpha\, B_{ijk\ell} + \gamma\, C_{ijk\ell}\,. \tag{2.41}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = {} & \sum_{k\ell} a_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} = \lambda \sum_{k\ell} A_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} + \alpha \sum_{k\ell} B_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} + \gamma \sum_{k\ell} C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \\
\sum_{k\ell} A_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} = {} & \sum_{k\ell} \delta_{ij}\delta_{k\ell}\varepsilon_{k\ell} = \delta_{ij}\sum_{k\ell}\delta_{k\ell}\varepsilon_{k\ell} = \delta_{ij}\sum_{\ell}\varepsilon_{\ell\ell} \\
\sum_{k\ell} B_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} = {} & \sum_{k\ell} \delta_{i\ell}\delta_{jk}\varepsilon_{k\ell} = \sum_{\ell}\delta_{i\ell}\textstyle\sum_k \delta_{jk}\varepsilon_{k\ell} = \displaystyle\sum_{\ell}\delta_{i\ell}\varepsilon_{j\ell} = \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} \\
\sum_{k\ell} C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} = {} & \sum_{k\ell} \delta_{ik}\delta_{\ell j}\varepsilon_{k\ell} = \sum_{\ell}\delta_{\ell j}\sum_{k}\delta_{ik}\varepsilon_{k\ell} = \sum_{\ell}\delta_{\ell j}\varepsilon_{i\ell} = \varepsilon_{ij}\,.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Substituindo-se em (2.42) os somatórios calculados, vem:

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\sum_{\ell}\varepsilon_{\ell\ell} + \alpha\,\varepsilon_{ij} + \gamma\,\varepsilon_{ij}\,.$$

Fazendo-se $2\mu = \alpha + \gamma$, resulta:

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda(\operatorname{div} u)\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij} \tag{2.43}$$

porque o traço da matriz $\varepsilon(u)$ é a div u.

2.3 Estudo Matemático do Sistema de Elasticidade

Seja Ω um aberto limitado, conexo, do $\mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou 3, cuja fronteira Γ supõe-se regular. Representa-se por Γ_0 uma parte de Γ de medida positiva e $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$.

Problema 1. Dados $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in (L^2(\Omega))^n$ e $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in (L^2(\Gamma))^n$, encontrar $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ solução do problema de contorno:

$$(2.44) \qquad \left| \begin{array}{l} -\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) = f_i \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_i = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(u) n_j = g_i \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \,, \end{array} \right.$$

com $1 \leq i \leq n$, sendo:

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda(\operatorname{div} u)\delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(u)$$

$1 \leq i \leq n$,

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{ traço de } (\varepsilon_{ij}).$$

Os parâmetros λ e μ são tais que $\lambda \geq 0$ e $\mu > 0$ denominados coeficientes de Lamé.

Observação 5. Do que foi estudado nos parágrafos 1 e 2, decorre que o sistema (2.44) é a formulação matemática do problema que consiste em descrever os pequenos deslocamentos u de um corpo elástico, homogêneo e isotrópico, submetido a uma densidade volumétrica de forças f em Ω e a uma densidade superficial de forças g sobre Γ_1, sendo os deslocamentos nulos em Γ_0.

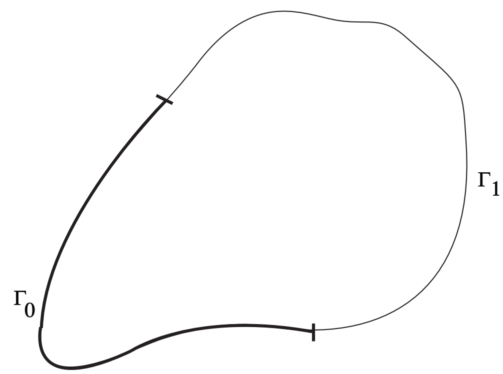


Figura 4

Geometricamente pensa-se na Figura 4, com o corpo elástico fixo ao longo de Γ_0.

Forma Bilinear Associada ao Problema

Considere-se os espaços de Sobolev:

$$H = (L^2(\Omega))^n, \qquad V = (H^1(\Omega))^n,$$

n um número natural, que no caso da elasticidade será suposto $n = 2$ ou $n = 3$. No caso $n = 1$ o corpo elástico trata-se de um fio ou uma barra.

Norma em H

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i^2 \, dx.$$

Norma em V

$$||v||_V^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \sum_i \int_\Omega v_i^2 \, dx.$$

O espaço natural do problema será representado por V_0, definido por:

$$V_0 = \left\{ v \in V = (H^1(\Omega))^n; \ \gamma_0 v = 0 \text{ em } \Gamma_0 \right\}.$$

Para $v \in V$, a função

$$v \longmapsto [v]^2 = \sum_{i,j} \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) \, dx$$

define uma norma em V_0. É suficiente provar que em V_0 se $[v] = 0$ tem-se $v = 0$. De fato, suponha-se que $[v] = 0$. Daí resulta que $\varepsilon_{ij}(v) = 0$, logo

$$v(x) = a + b \cdot x,$$

sendo a e b matrizes constantes e $b + b^* = 0$, sendo b^* a transposta de b. Para $v \in V_0$, tem-se $v = 0$ em Γ_0 sendo Γ_0 com medida positiva. Daí resulta que existe em Γ_0 dois vetores x, y linearmente independentes. Logo de $v = 0$ em Γ_0, resulta $a + b \cdot x = 0$ e $a + b \cdot y = 0$, isto é, $b(x - y) = 0$. Sendo x, y linearmente independentes, obtém-se $b = 0$. Logo, de $b = 0$ e $v = 0$ em Γ_0, resulta que $a = 0$. Portanto $v = 0$, mostrando que $[v]$ é uma norma em V_0.

A forma bilinear associada ao problema será:

$$a(u, v) = \sum_{i,j} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, dx, \text{ para } u, v \in V_0,$$

ou, de (2.43):

$$a(u, v) = \sum_{i,j} \int_\Omega [\lambda(\operatorname{div} u)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u)]\varepsilon_{ij}(v)\, dx,$$

da qual resulta:

$$a(u, v) = \sum_{i,j} \lambda \int_\Omega (\operatorname{div} u)\delta_{ij}\varepsilon_{ij}(v)\, dx + \sum_{i,j} 2\mu \int_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, dx.$$

Sendo

$$\sum_{i,j} \delta_{ij}\varepsilon_{ij}(u) = \sum_i \varepsilon_{ii}(u) = \operatorname{div} u,$$

a forma bilinear associada ao Problema 1 será:

$$a(u, v) = \lambda \int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\, dx + 2\mu \sum_{i,j} \int_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, dx \tag{2.45}$$

que é simétrica.

Toma-se como forma linear associada ao Problema 1, a seguinte:

$$L(v) = \sum_i \int_\Omega f_i v_i\, dx + \sum_i \int_{\Gamma_1} g_i v_i\, d\Gamma$$

para todo $v \in V_0$.

Resulta que a formulação fraca do Problema 1, consiste em demonstrar a existência de um único vetor u em V_0, tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{para todo} \quad v \in V_0. \tag{2.46}$$

O problema fraco reduz-se-á ao Lema de Lax-Milgram, uma vez que seja demonstrado que $a(u, v)$ é contínua e coerciva em V_0 e que $L(v)$ é contínua em V_0. Para demonstrar a continuidade e coercividade de $a(u, v)$ necessita-se de uma desigualdade, denominada desigualdade de Korn, cuja demonstração baseia-se em resultados não triviais da teoria das distribuições, consulte-se o Lema 1.

Relação entre as normas de V e V_0

Esta relação será obtida por meio da desigualdade de Korn, já mencionada, cuja demonstração repousa sobre o seguinte resultado:

Lema 1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, aberto, limitado, com fronteira regular. Se v for uma distribuição sobre Ω tal que

$$v \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega) \text{ para todo } i,$$

então

$$v \in L^2(\Omega).$$

Não será feita a demonstração deste lema, ela encontra-se em Duvaut-Lions, consulte-se Observação 9.

Desigualdade de Korn - Existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\sum_{i,j} \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\, dx + \sum_i \int_\Omega v_i v_i\, dx \geq c\|v\|_V^2, \tag{2.47}$$

para $u, v \in V$.

Observação 6. Note que o primeiro membro é menor do que o segundo, pois:

$$\varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

Daí resulta que o primeiro membro da desigualdade (2.47) é menor do que a norma de v em V. Entretanto, a desigualdade em sentido contrário não é de fácil demonstração.

Demonstração da Desigualdade de Korn

Considere-se

$$E = \left\{v_i \in L^2(\Omega);\ \varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega), \quad \text{para todo} \quad i, j\right\}.$$

Segue-se que E é um espaço de Hilbert com a norma:

$$\|v\|_E^2 = \sum_{i,j}\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\,dx + \sum_i \int_\Omega v_i v_i\,dx.$$

Tem-se $V \subset E$ sendo a imersão

$$\tau \colon V \to E$$

contínua, porque, pela Observação 7, tem-se:

$$\|\tau v\|_E \leq c\|v\|_V\,.$$

Para demonstrar-se a equivalência das normas é suficiente provar-se que τ^{-1} existe, que é linear e contínua, como conseqüência do teorema do gráfico fechado. Deve-se apenas demonstrar que $\tau \colon V \to E$ é sobre, isto é, que $E \subset V$.

De fato, seja $v \in E$ e será demonstrado que $v \in V$. De $v \in E$, resulta que

$$v_i \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$$

isto é, sendo

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,\varepsilon_{ik}(v) + \frac{\partial}{\partial x_k}\,\varepsilon_{ij}(v) - \frac{\partial}{\partial x_i}\,\varepsilon_{ik}(v) = 2\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right),$$

conclui-se que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{para todo} \quad j, k,$$

por ser soma de derivadas de funções de $L^2(\Omega)$.

Resumindo, obteve-se

$$v_i \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{para todo} \quad i, j, k.$$

Sendo $v_i \in L^2(\Omega)$ resulta que $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} \in H^{-1}(\Omega)$. Resulta do Lema 1 que $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} \in L^2(\Omega)$ par todo i, k, provando que $v \in V$.

Conclui-se que τ é inversível e sendo linear e contínua segue-se que τ^{-1} é linear e contínua de E em V. Logo, existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$||\tau^{-1}\, v||_V \leq c_0 ||v||_E$$

isto é,

$$||v||_E \geq c||v||_V$$

o que demonstra a desigualdade de Korn.

Já foi visto que

$$[v]^2 = \sum_{i,j} \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\, dx$$

é uma norma em V_0. Resta demonstrar que em V_0 as normas $[v]$ e $||v||_V$ são equivalentes.

Observação 7. Pela desigualdade de Korn, pra todo $v \in V$ tem-se

$$[v]^2 + |v|^2 \geq c_0 ||v||_V\,.$$

Logo, para provar a equivalência é bastante demonstrar-se que existe uma constante $k_0 > 0$ tal que

$$[v] \geq k_0\, |v| \tag{2.48}$$

para todo $v \in V_0$. Isto, porque devido à desigualdade de Korn, obter-se-ia:

$$c_0||v||^2 \leq [v]^2 + |v|^2 \leq k[v]^2,$$

e, como viu-se, $[v] \leq c||v||_V$, para todo $v \in V$. Resta apenas demonstrar a desigualdade (2.48), que resulta do Lema 2 a seguir.

Lema 2. Existe uma constante k_0 tal que

$$[v] \geq k_0 |v| \quad \text{para todo} \quad v \in V_0 .$$

Demonstração. De fato, se $v \in V_0$, $v \neq 0$, considerando-se $v/|v|$, é suficiente demonstrar que existe uma constante $k_0 > 0$ tal que

$$[v] \geq k_0 \quad \text{para todo} \quad v \in V_0 \quad \text{com} \quad |v| = 1. \tag{2.49}$$

Suponha (2.49) falsa, isto é, não existe k_0 tal que

$$[v] \geq k_0 > 0 \quad \text{para todo} \quad v \in V_0 \quad \text{com} \quad |v| = 1.$$

Daí resulta que para cada n existe v_n tal que

$$[v_n] < \frac{1}{n}, \quad v_n \in V_0 \quad \text{e} \quad |v_n| = 1.$$

Conclui-se que

$$[v_n] \to 0, \text{ quando } n \to \infty, \; v_n \in V_o \text{ e } |v_n| = 1. \tag{2.50}$$

Obtém-se

$$c_0||v_n||^2 \leq [v_n]^2 + |v_n|^2 < \frac{1}{n} + 1,$$

provando que (v_n) é limitada em V, devido a desigualdade de Korn. Logo existe uma subsucessão (v_n) em V tal que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{fraco em} \quad V. \tag{2.51}$$

Sendo [ ] uma semi-norma em V, resulta que

$$\lim [v_n] \geq [v],$$

porque [ ] é semi-contínua inferiormente. Mas $[v_n]$ é convergente para zero, veja-se (2.50). Resulta $[v] = 0$ logo $v = 0$.

Conclui-se que em V_0 as normas $||v||_V$ e $[v]$ são equivalentes e assim considera-se V_0 com $||v||_V$.

Resta apenas examinar a coercividade de $a(u, v)$ em V_0. De fato, seja $v \in V_0$

$$a(v, v) = \lambda \int_\Omega (\operatorname{div} v)(\operatorname{div} v)\, dx + 2\mu \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\, dx \geq$$

$$\geq 2\mu \sum_{i,j} \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\, dx = 2\mu [v]^2 \geq c\, \|v\|_V^2 \,,$$

provando que $a(u, v)$ é V-elítica ou coerciva em V_0.

Para a continuidade tem-se

$$|a(u, v)| \leq k\, \|u\|_V\, \|v\|_V$$

para $u, v \in V$. Logo da equivalência das normas ela é contínua em V_0.

Continuidade em V_0 da forma linear L, definida por:

$$L(v) = \sum_i \int_\Omega f_i v_i\, dx + \sum_i \int_{\Gamma_1} g_i v_i\, dx,$$

sendo $g_i \in L^2(\Omega)$ e $f_i \in L^2(\Omega)$. Tem-se:

$$|L(v)| \leq \sum_i \left(\int_\Omega f_i^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega v_i^2\, dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \sum_i \left(\int_{\Gamma_1} g_i^2\, d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_1} v_i\, d\Gamma \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c\, |f|\, \|v\|_V + |g|\, \|v\|_V \,,$$

de vez que $\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ é contínuo e sobre.

Conclui-se, portanto, que tomando-se $f \in (L^2(\Omega))^n$ e $g \in (L^2(\Gamma))^n$, existe um único $v \in V_0$ tal que

$$a(u,v) = L(v) \quad \text{para todo} \quad v \in V_0\,, \tag{2.52}$$

com conseqüência do Lema de Lax-Milgram.

Resta, apenas fazer a interpretação da solução u encontrada.

Tem-se

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sum_{i,j} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left\{ \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}(u)\,\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_\Omega \sigma_{ji}(u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx. \end{aligned}$$

Sendo $\sigma_{ij}(u) = \sigma_{ji}(u)$, obtém-se:

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx.$$

A forma linear é dada por

$$L(v) = \sum_i \int_\Omega f_i v_i\,dx + \sum_i \int_\Gamma g_i v_i\,d\Gamma.$$

Tomando-se $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (2.52), obtém-se:

$$\sum_{i,j} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx = \sum_i \int_\Omega f_i v_i\,dx \tag{2.53}$$

porque v possui suporte compacto em Ω.

Da definição de derivada no sentido das distribuições, aplicada a (2.53), conclui-se que

$$-\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\,\sigma_{ij}(u) = f_i \quad 1 \le i \le n \tag{2.54}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$ em Ω.

Substituindo-se em (2.52) obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \sigma_{ij}(u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx \quad &= -\sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\,\sigma_{ij}(u) v_i\,dx + \\ &\quad + \sum_i \int_\Gamma g_i v_i\,d\Gamma \end{aligned} \tag{2.55}$$

para todo $v \in V_0$.

Supondo-se válida a fórmula de Green, para $u \in V_0$ tal que $u_i \in H^2(\Omega)$, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} \int_\Omega \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx &= -\sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) v_i \, dx + \\
&+ \sum_{i,j} \int_{-\Gamma} \sigma_{ij}(u) n_j v_i \, dx
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

sendo n a normal externa a Γ.

Comparando (2.55) com (2.56), obtém-se:

$$\sum_{i,j} \int_\Gamma \sigma_{ij}(u) n_j v_i \, d\Gamma = \sum_i \int_\Gamma g_i v_i \, d\Gamma,$$

para todo $v \in V_0$. Daí resulta:

$$\sum_i \int_\Gamma \sum_j \sigma_{ij}(u) n_j v_i \, d\Gamma = \sum_i \int_\Gamma g_i v_i \, d\Gamma$$

para todo $v \in V_0$. Note que $v = 0$ em Γ_0, logo

$$\sum_j \sigma_{ij}(u) n_j = g_i \quad \text{em} \quad \Gamma_1 .$$

Observação 8. Para demonstrar-se que a semi-norma $[v]$ em $(H^1(\Omega))^n$ é uma norma em V_0, fez-se uso de uma caracterização das deformações u que anulam o tensor $\varepsilon(u)$. A seguir será feita uma demonstração deste fato. Note-se, entretanto, que no caso Ω regular, o espaço $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$. Assim, é suficiente fazer-se a demonstração supondo-se u em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Lema 3. O tensor de deformações $\varepsilon(u)$, $u \in V$, é nulo se e somente se

$$u(x) = a + b \cdot x$$

sendo a um vetor e b uma matriz, constantes, sendo $b - b^* = 0$, onde b^* é a transposta de b.

Demonstração. De fato, seja $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e

$$u_i = a_i + \sum_j b_{ij} x_i \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Da hipótese sobre b, obtém-se:

$$b_{ij} + b_{ji} = 0 \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Derivando u_i , obtém-se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = b_{ij} \, ,$$

isto é,

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(b_{ij} + b_{ji}\right) = 0.$$

Reciprocamente, suponha-se que

$$\varepsilon_{ij}(u) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Tem-se, daí:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0.$$

De $\varepsilon(u) = 0$ vem

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = 0$$

isto é,

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Sendo válida a regra de simetria de Schwarz, pois as funções u_i pertencem a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, resulta:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

ou

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = b_{kj} \quad \text{é constante em relação a } x.$$

Da hipótese $\varepsilon(u) = 0$, resulta que $b_{kj} + b_{jk} = 0$. Integrando a expressão que define b_{kj} obtém-se:

$$u_k = a_k + b_{kj}\, x_j\,.$$

Somando em j, vem

$$u_k = a_k + \sum_j b_{kj}\, x_j$$

que é a forma do u prevista no Lema 3.

Observação 9. Ao demonstrar-se a desigualdade de Korn, fêz-se uso do Lema 1, afirmando que se $v \in H^{-1}(\Omega)$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$ então $v \in L^2(\Omega)$, sendo v uma distribuição em Ω.

Suponha $\Omega = \mathbb{R}^n$. Para s real, tem-se:

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);\ \left(1 + |\xi|^2\right)^{-s/2} \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi) \right\}$$

com a norma:

$$\|v\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n_\xi)} = \left| \left(1 + |\xi|^2\right)^{-s/2} \hat{v}(\xi) \right|_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)}.$$

No caso $s = -1$, tem-se

$$v \in H^{-1}(\mathbb{R}^n) \quad \text{equivale a} \quad (1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}\, \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{-1}(\mathbb{R}^n) \text{ equivale a } \left(1 + |\xi|\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \left(1 + |\xi|\right)^{-\frac{1}{2}} \xi_i \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi).$$

Daí resulta que:

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} (1 + |\xi|^2)^{-1}\, |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} (1 + |\xi|^2)^{-1}\, \xi_i^2 |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Portanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} (1 + |\xi|^2)^{-1}\, |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n_\xi} (1 + |\xi|^2)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Sendo $|\xi_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, obtém-se:

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} |\hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty$$

e do Teorema de Plancherel que $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

A etapa seguinte seria supor $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ que é o semi-espaço. Finalmente o caso Ω regular. Estas duas etapas são trabalhosas por serem técnicas e não triviais. A demonstração encontra-se em G. Duvaut-J.L. Lions [1].

Referências Bibliográficas

[1] G. Duvaut-J.L. Lions, *Les inequations en Mécanique et en Physique*, Dunod-Paris, 1972.

[2] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1990.

[3] E. Persico, *Introduzione alla Fisica Matematica*, Zanichelli, Bollogna, Itália, 1971 (2ª edição).

Equação Hiperbólica com um Termo de Resistência

F. D. Araruna
Instituto de Matemática-UFRJ

G. O. Antunes
Instituto de Matemática-UFRJ

IM-UFRJ - Junho de 2001
Rio de Janeiro - RJ

Introdução

Em um trabalho de J. L. Lions, ver [3], estuda-se um problema de controle exato para um modelo do tipo equação de ondas, porém com uma condição de incompressibilidade, isto é, $\operatorname{div} u = 0$, aparentemente sem uma motivação física. O objetivo desta exposição é mostrar que este modelo é proveniente de um problema de elasticidade com uma resistência do material. Após encontrado o modelo, demonstra-se-á a existência e unicidade de solução. com um acréscimo de uma dissipação, proveniente da resistência do meio e do tipo de material, obtém-se também um decaimento exponencial para a energia associada a solução do problema.

3.1 Dedução do Modelo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um sólido constituído de um material elástico. Representa-se por $u(x,t)$ as pequenas deformações ou deslocamentos de Ω no tempo t.

Como na exposição anterior, denota-se por σ e ε os tensores de tensões e de deformações ou deslocamentos, respectivamente, de Ω.

Seja $f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$ a densidade de forças volumétricas atuando em Ω. Tem-se ainda que a variação da tensão σ gera uma força dada por $\dfrac{\partial \sigma_{ij}(x,t)}{\partial x_j}$. Portanto pela segunda lei de Newton, ver Sommerfeld [6], segue-se que

$$f_i(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[m \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}\right] - \frac{\partial \sigma_{ij}(x,t)}{\partial x_j}, \quad i = 1,2,3, \tag{3.1}$$

onde m representa a massa do corpo.

Como existe uma força agindo sobre Ω, a terceira lei de Newton garante a existência de uma força de reação do material em cada ponto x de Ω. Denota-se tal força por $p(x,t)$.

Como é feito em elasticidade linear, supõe-se que a tensão seja do tipo

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}. \tag{3.2}$$

Substituindo (3.2) em (3.1) tem-se que

$$f_i = \frac{\partial}{\partial t}\left[m\frac{\partial u_i}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}\right). \tag{3.3}$$

A deformação $u(x,\cdot)$ pode ser representada por

$$u(x,\cdot) = F(x) - x, \tag{3.4}$$

onde $F(x)$ é a posição do ponto x no corpo deformado ou deslocado, ver figura 1.

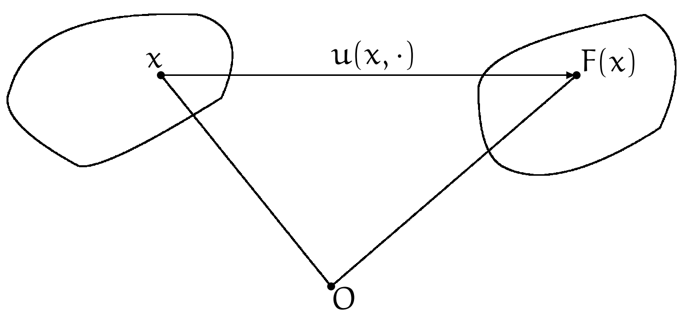


Figura 1

Suponha-se que Ω seja incompressível, isto é, Ω deforma-se mas seu volume fica invariante. Matematicamente esta hipótese significa que $|\det \nabla F(x)| = 1$.

Aplicando a hipótese de incompressibilidade em (3.4) obtém-se

$$|\det(I + \nabla u)| = 1, \tag{3.5}$$

onde I é a matriz indentidade.

Demonstra-se que para pequenas deformações

$$|\det(I + \nabla u)| = 1 + \operatorname{div} u. \tag{3.6}$$

Comparando (3.5) e (3.6) conclui-se que

$$\text{(3.7)} \qquad div\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Da exposição anterior, tem-se que $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$. Assim por (3.3) e (3.7) segue-se que

$$f_i = \frac{\partial}{\partial t}\left[m\frac{\partial u_i}{\partial t}\right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

É razoável pensar que apesar de o volume $\mathbb{V}$ do corpo ser invariante, localmente a densidade $\rho\,(x,t)$ varia, ver Batchelor [1], portanto, sendo $m = \mathbb{V}\rho\,(x,t) > 0$, obtém-se o sistema de equações diferenciais parciais

$$\mathbb{V}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\,(x,t)\,\frac{\partial u_i\,(x,t)}{\partial t}\right] - \Delta u_i = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

3.2 Estudo Matemático

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ bem regular. Denota-se por η a normal unitária exterior a Γ. Para um número real $T > 0$, considere-se o cilíndro $Q = \Omega \times]0,T[$ com fronteira $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$. Estudar-se-á existência e unicidade do seguinte problema misto

$$\text{(3.8)} \qquad \left|\begin{array}{l} (K\,(x,t)\,u')' - \Delta u = f - \nabla p \quad \text{em} \quad Q, \\ div\ u = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u\,(0) = u_0, \quad u'\,(0) = u_1 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right.$$

onde

$$\text{(3.9)} \qquad K\,(x,t) \geq k_0 > 0$$

e a " $'$ " significa a derivada em relação a t.

Antes de iniciar o estudo de (3.8), será estabelecida a notação. Considere-se os espaços de Hilbert

$$V = \left\{ u \in \left(H_0^1(\Omega) \right)^3 ;\ div\ u = 0 \right\}$$

e

$$H = \left\{ u \in \left(L^2(\Omega) \right)^3 ;\ div\ u = 0 \text{ e } u.\eta = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\},$$

com a estrutura de produto interno e norma induzida de $\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ e $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, respectivamente, como na exposição sobre o sistema de Navier-Stokes.

Teorema 3.1. Dados $u_0 \in V$, $u_1 \in H$, $f \in L^2(0,T;H)$ e $K \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))$ satisfazendo (3.9), existe uma única função u tal que

$$u \in L^\infty(0,T;V), \tag{3.10}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;H), \tag{3.11}$$

$$(Ku')' - \Delta u = f - \nabla p \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'\left(0,T;\left(\mathcal{D}'(\Omega)\right)^3\right), \tag{3.12}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.13}$$

Antes de iniciar a demonstração do Teorema 3.1, considera-se o Lema:

Lema 3.1. Dados u_0, u_1, f e K nas condições do Teorema 3.1, existe uma única função u satisfazendo

$$u \in L^\infty(0,T;V), \tag{3.14}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;H), \tag{3.15}$$

$$\left((K(t)\,u'(t))', v\right) + ((u(t), v)) = (f(t), v),\ \forall v \in V, \text{ em } \mathcal{D}'(0,T), \tag{3.16}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.17}$$

Demonstração: Será feita pelo Método de Faedo-Galerkin. Seja $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana de V. Considere-se $V_m = [w_1, ..., w_m]$ o subespaço de V gerado pelos m primeiros vetores da base. O problema aproximado de $(3.14)-(3.17)$ consiste em determinar $u_m(t) \in V_m$ satisfazendo

$$(3.18) \qquad \left|\begin{array}{l} \left((K(t)\,u_m'(t))', v\right) + ((u_m(t), v)) = (f(t), v)\,, \ \forall v \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ forte em } V, \\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ forte em } H. \end{array}\right.$$

Pelo Teorema de Carathèodory, (3.18) tem solução sobre um intervalo $[0, t_m[$, $t_m < T$. Esta solução pode ser estendida a todo o intervalo $[0, T]$ como uma consequência das estimativas que serão obtidas a seguir.

Estimativas: Fazendo-se $v = u_m'(t)$ em $(3.18)_1$, tem-se

$$(3.19) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\sqrt{K(t)}u_m'(t)\right|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) \le \frac{1}{2}\left|(K'(t)\,u_m'(t), u_m'(t))\right| + |f(t)|\,|u_m'(t)|\,.$$

Integrando-se (3.19) de 0 a $t \le t_m$ e usando-se as hipóteses sobre K e f, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{2}|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 &\le \frac{1}{2}\|K(0)\|_{L^\infty(\Omega)}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2 + \\ &+\frac{1}{2}\|K'\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t |u_m'(s)|^2\,ds + \int_0^t |f(s)|^2\,ds + \int_0^t |u_m'(s)|^2\,ds. \end{aligned}$$

Por $(3.18)_2$, $(3.18)_3$, as condições de K e f e o Lema de Gronwall, obtém-se

$$(3.20) \qquad |u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \le C_1,$$

onde C_1 é uma constante que independe de t e m. Assim pode-se prolongar a solução aproximada $u_m(t)$ a todo o intervalo $[0, T]$.

Dessa forma tem-se por (3.20) que

$$(3.21) \qquad (u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V)$$

e

$$(3.22) \qquad (u_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H)\,.$$

De (3.21) e (3.22), segue-se que existe uma subsequência de (u_m), ainda denotada por (u_m), tal que

$$u_m \to u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;V) \tag{3.23}$$

e

$$u'_m \to u' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H). \tag{3.24}$$

As convergências (3.23) e (3.24), juntamente com as hipóteses feitas sobre K, são suficientes para passar ao limite na equação aproximada $(3.18)_1$ obtendo-se a solução u satisfazendo $(3.14)-(3.17)$. Para provar a unicidade, considere-se u e $\hat{u}$ duas funções nas condições do Lema 2.1. Portanto $w = u - \hat{u}$ satifaz

$$w \in L^\infty(0,T;V), \tag{3.25}$$

$$w' \in L^\infty(0,T;H), \tag{3.26}$$

$$\left((K(t)\, w'(t))', v\right) + ((w(t), v)) = 0, \ \forall v \in V, \text{ em } \mathcal{D}'(0,T), \tag{3.27}$$

$$w(0) = 0, \quad (Kw')(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.28}$$

Segue-se por (3.27) que

$$(Kw')' - \Delta w = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'\left(0,T;(\mathcal{D}'(\Omega))^3\right).$$

Como $0 \in L^2(0,T;H)$, tem-se $(Kw')' - \Delta w \in L^2(0,T;H)$. Assim, por Temam [7], Lema 4.1, pag. 78, obtém-se

$$\left((K(t)\, w'(t))' - \Delta w(t), w'(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\sqrt{K(t)}w'(t)\right|^2 + \|w(t)\|^2\right) + \frac{1}{2}(K'(t)\, w'(t), w'(t)).$$

Dessa forma, tem-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\sqrt{K(t)}w'(t)\right|^2 + \|w(t)\|^2\right) = -\frac{1}{2}(K'(t)\, w'(t), w'(t)). \tag{3.29}$$

Integrando-se (3.29) de 0 a $t \leq T$ e usando as hipóteses sobre K, obtém-se

$$\frac{k_0}{2}\left|w'(t)\right|^2 + \left\|w(t)\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|K'\right\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \left|w'(s)\right|^2 ds.$$

Pelo Lema de Gronwall, conclui–se

$$\left|w'(t)\right|^2 + \left\|w(t)\right\|^2 = 0,$$

donde $w = 0$, o que prova a unicidade.■

Demonstração do Teorema 3.1. Note-se que para provar o Teorema 3.1 é suficiente provar que u satisfaz $(3.14) - (3.17)$ se, e somente se, u satisfaz $(3.10) - (3.13)$. De fato, consideremos o seguinte funcional linear

$$L = (Ku')' - \Delta u - f,$$

onde u é a solução dada pelo Lema 3.1. Observe que $L \in \left(H^{-1}(\Omega)\right)^3$. De (3.16) segue-se que $L(v) = 0$ para toda $v \in V$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Assim, do que ficou demonstrado na exposição referente ao sistema de Navier-Stokes, resulta que existe $p \in L^2(\Omega)\diagup\mathbb{R}$ tal que

$$L(v) = \int_\Omega p \operatorname{div} v dx,$$

para toda $v \in V$. Em particular, para toda $\varphi \in \mathcal{V} = \left\{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3;\ \operatorname{div}\varphi = 0\right\}$. Assim, tem-se

$$\left\langle (Ku')' - \Delta u - f, \varphi \right\rangle = \left\langle -\nabla p, \varphi \right\rangle,$$

provando que

$$(Ku')' - \Delta u = f - \nabla p \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'\left(0,T;(\mathcal{D}'(\Omega))^3\right).$$

Reciprocamente, se u satisfaz $(3.10) - (3.13)$, então multiplicando (3.12) por $\varphi \in \mathcal{V}$ e integrando sobre Ω, obtém-se

(3.30) $\left((K(t)\,u'(t))', \varphi\right) + ((u(t), \varphi)) = (f(t), \varphi) - \langle \nabla p, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in V$, em $\mathcal{D}'(0,T)$.

Observação 3.1. Note-se que

$$\langle \nabla p, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i}, \varphi_i \right\rangle = -\left\langle p, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right\rangle = -\langle p, div\ \varphi \rangle .$$

Como $\varphi \in \mathcal{V}$, tem-se $\langle \nabla p, \varphi \rangle = 0$.

Desde que $\mathcal{V}$ é denso em V, u é solução do Lema 3.1.■

3.3 Comportamento Assintótico

Para se obter um decaimento para a solução do problema (3.8), é necessário que se tenha um termo dissipativo originário da influência do meio e do tipo do material de constituição do sólido. Considere-se a dissipação do tipo $\alpha u'$, onde α é uma constante positiva satisfazendo à hipótese

$$\alpha - \frac{1}{2} |K'(x,t)| \geq \delta > 0. \tag{3.31}$$

Como o problema trata de pequenas deformações ou deslocamentos, é natural pensar que a densidade de força volumétrica seja pequena, então suponha-se que

$$\int_{\Omega} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^3}^2 \leq C_2 e^{-\epsilon t}, \tag{3.32}$$

onde C_2 e ϵ são constantes positivas.

Dessa forma temos o seguinte problema dissipativo

$$\left| \begin{array}{l} (K(x,t)\,u')' - \Delta u + \alpha u' = f - \nabla p \quad \text{em} \quad Q, \\ div\ u = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u(0) = u_0, \quad u''(0) = u_1 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.33}$$

A hipótese (3.31) permite obter existência e unicidade de solução do problema (3.33), sem que haja necessidade da utilização do lema de Gronwall, assim esta solução pertence à seguinte classe

$$u \in L^{\infty}(0,\infty;V), \quad u' \in L^{\infty}(0,\infty;H).$$

O objetivo desta seção é estudar o decaimento exponencial da energia $E(t)$ associada a solução do problema (3.33) usando o método de pertubação da energia como em Zuazua [8].

A energia associada a (3.33) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\left|\sqrt{K(t)}u'(t)\right|^2 + \|u(t)\|^2\right]. \tag{3.34}$$

Teorema 4.1. Considere-se K, u_0, u_1 ef nas condições do Teorema 3.1, com$f$ satisfazendo (3.32) e α uma constante satisfazendo (3.31). Então a energia (3.34) satisfaz

$$E(t) \leq Ce^{-\frac{\epsilon}{2}t}, \ \forall t \geq 0, \tag{3.35}$$

onde C e ϵ são constantes positivas.

Demonstração. Foi provado anteriormente que estudar a solução do Teorema 3.1 é equivalente a estudar a solução do Lema 3.1, assim, para mostrar o comportamento da solução do problema (3.33), é suficiente mostrar o comportamento da solução associada ao Lema 3.1 mais o termo dissipativo, ou seja, consideraremos agora a equação

$$\left((K(t)u'(t))', v\right) + ((u(t), v)) + \alpha(u'(t), v) = (f(t), v), \ \forall v \in V, \text{ em } \mathcal{D}'(0,T). \tag{3.36}$$

Por (3.36) obtém-se

$$(Ku')' - \Delta u + \alpha u' = f \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'\left(0,T;(\mathcal{D}'(\Omega))^3\right). \tag{3.37}$$

Como $f - \alpha u' \in L^2(0,T;H)$, tem-se $(Ku')' - \Delta u \in L^2(0,T;H)$. Logo, por Temam [7], Lema 4.1, pag. 78, conclui-se que

(3.38)
$$\left((K(t)u'(t))' - \Delta u(t), u'(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\sqrt{K(t)}u'(t)\right|^2 + \|u(t)\|^2\right) + \frac{1}{2}(K'(t)u'(t), u'(t)).$$

Segue-se por (3.37) e (3.38) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|\sqrt{K(t)}u'(t)\right|^2+\|u(t)\|^2\right]+\left(\left[\alpha+\frac{1}{2}K'(t)\right]u'(t),u'(t)\right)=(f(t),u'(t)).$$

Logo, por (3.31), tem-se

$$E'(t)\leq -\frac{\delta}{2}|u'(t)|^2+\frac{1}{2\delta}|f(t)|^2. \tag{3.39}$$

Para um número arbitrário $\epsilon>0$, define-se a energia pertubada

$$E_\epsilon(t)=E(t)+\epsilon\psi(t), \tag{3.40}$$

com

$$\psi(t)=(K(t)u'(t),u(t)).$$

Usando-se a hipótese sobre K, obtém-se

$$|\psi(t)|\leq C_3E(t), \tag{3.41}$$

onde $C_3=\max\left\{1,C^2(\Omega)\|K\|_{L^\infty(Q)}\right\}$, com $C(\Omega)$ sendo a constante de Poincaré em Ω.

Por (3.40) and (3.41), tem-se que

$$|E_\epsilon(t)-E(t)|=\epsilon|\psi(t)|\leq\epsilon C_4E(t)$$

ou

$$(1-\epsilon C_3)E(t)\leq E_\epsilon(t)\leq(1+\epsilon C_3)E(t).$$

Tomando-se $0<\epsilon\leq\dfrac{1}{2C_3}$, segue-se que

$$\frac{E(t)}{2}\leq E_\epsilon(t)\leq 2E(t),\ \forall t\geq 0. \tag{3.42}$$

Derivando a função $\psi(t)$ e usando (3.36) (com $v=u(t)$), obtém-se

$$\psi'(t)=-2E(t)+2\left|\sqrt{K(t)}u'(t)\right|^2-\alpha(u'(t),u(t))+(f(t),u(t)). \tag{3.43}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, tem-se por (3.43) que

$$\psi'(t) \leq -E(t) + C_4 |u'(t)|^2 + C^2(\Omega)|f(t)|^2, \tag{3.44}$$

onde $C_4 = \left(C^2(\Omega)\alpha + 2\|K\|_{L^\infty(Q)}\right)$.

Segue-se por (3.39), (3.40), (3.41) e (3.44) que

$$E'_\epsilon(t) \leq -\epsilon E(t) + \left(\epsilon C_4 - \frac{\delta}{2}\right)|u'(t)|^2 + \left(\epsilon C^2(\Omega) + \frac{1}{2\delta}\right)|f(t)|^2. \tag{3.45}$$

Tomando-se $0 < \epsilon \leq \min\left\{\frac{1}{2C_3}, \frac{\delta}{2C_4}\right\}$ e observando-se (3.32) e (3.42), temos de (3.45) que

$$E'_\epsilon(t) \leq -\frac{\epsilon}{2}E_\epsilon(t) + C_5 e^{-\epsilon t},$$

onde $C_5 = C_2\left(\epsilon C^2(\Omega) + \frac{1}{2\delta}\right) > 0$. Donde pelo Lema de Gronwall, tem-se

$$E_\epsilon(t) \leq \left[E_\epsilon(0) + \frac{2C_5}{\epsilon}\right]e^{-\frac{\epsilon}{2}t}, \ \forall t \geq 0. \tag{3.46}$$

De (3.42), tem-se por (3.46) que

$$E(t) \leq 4\left[E(0) + \frac{C_5}{\epsilon}\right]e^{-\frac{\epsilon}{2}t}, \ \forall t \geq 0.$$

Logo

$$E(t) \leq Ce^{-\frac{\epsilon}{2}t}, \ \forall t \geq 0,$$

onde $C = 4\left[E(0) + \frac{C_5}{\epsilon}\right]$, como se queria mostrar.■

Referências Bibliográficas

[1] BATCHELOR, G. K., An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1970.

[2] BREZIS, H., Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris, 1999.

[3] LIONS, J. L., Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[4] LIONS, J. L., On Some Hyperbolic Equations with a Pressure Term, Proceedings of the conference dedicated to Louis Nirenberg held in Trento, Italy, September 3-8, 1990. Harlow: Longman Scientific and Technical, Pitman Res. Notes Math. Ser 269, 196-208, 1992.

[5] ROCHA, A., Exact Controllability for a Hyperbolic System with a Pressure Term, Anais do XVIII CNMAC, vol 1, 10-15, Curitiba-PR, 1995.

[6] SOMMERFELD, A., Mecanics, Lectures on Theoretical Physics, vol. 1, Academic Press, New York, 1943.

[7] TEMAM, R, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanicsand Physics, Springer-Verlag, New York, 1997.

[8] ZUAZUA, E., Stabilty and Decay for a class of Nonlinear Hyperbolic Problems. Asymptotic Analysis 1, 161-185, 1988.

Lições sobre o Sistema de Navier-Stokes

L. A. Medeiros

Instituto de Matemática-UFRJ

IM-UFRJ - Março de 1983

Rio de Janeiro - RJ

Introdução

O presente texto contém uma série de exposições feitas pelo autor, por ocasião do 17º Seminário Brasileiro de Análise, no ITA, sobre o sistema de Navier-Stokes. Apresenta-se no parágrafo segundo uma caracterização das formas lineares contínuas sobre $(H_0^1(\Omega))^{-1}$ nulas nos vetores com divergência zero, devido a Lions [7], quando Ω é regular. Sobre uma outra demonstração, também analítica, do mesmo resultado, consulte-se Tartar [10]. Assim, de posse deste resultado, faz-se uma análise matemática autosuficiente do sistema de Navier-Stokes, seguindo-se Lions [6], Temam [9] e Tartar [10].

Com o objetivo de facilitar ao leitor a compreensão dos símbolos usados no sistema a ser estudado, são apresentadas determinadas considerações físicas no parágrafo primeiro e consequente obtenção do sistema de Navier-Stokes.

Esta exposição é um fragmento de uma disciplina sobre equações diferenciais parciais não lineares, lecionada pelo autor no Instituto de Matemática da UFRJ, durante o primeiro semestre de 1982. Usa-se o método de compacidade baseado em resultados de compacidade demonstrados nos Apêndices, devidos a Aubin [1], Lions [4], Temam [10].

O plano do presente texto é o seguinte:

§1. Considerações Físicas.

§2. Espaços Funcionais.

§3. Sistema de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^2$.

Apêndice I

§4. Sistema de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^n$ $(n \leq 4)$

Apêndice II

Complementos

1. Soluções Periódicas.

2. Sistema de Stokes

4.1 Considerações Físicas

Considere-se uma região do $\mathbb{R}^3$ ocupada por um fluido em movimento. Suponha-se nesta região um aberto limitado Ω, cuja fronteira representa-se por Γ, a qual admite-se bem regular. Assim, Γ é fronteira de uma parte aberta, conexa, limitada Ω do $\mathbb{R}^3$, contendo o fluido. A normal externa à Γ representa-se por n. Entende-se por fluxo do fluido através de Γ a massa de fluido que atravessa Γ na direção da normal na unidade de tempo. O fluxo na direção positiva de n diz-se positivo e na direção oposta diz-se negativo. Considere-se um elemento $d\Gamma$ de Γ e seja u o vetor velocidade das partículas, isto é, u possui três componentes. Se representarmos os vetores do $\mathbb{R}^3$ por $x = (x_1, x_2, x_3)$, então o vetor velocidade u será $(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ sendo t o tempo. No instante Δt cada partícula se desloca de $u\Delta t$, aqui é o módulo de u. Seja θ o ângulo dos vetores u e n. Com u_n representa-se a componente do vetor u na direção n. Assim, mede-se o total de partículas atravessando $d\Gamma$ na unidade de tempo na direção da normal, por meio do volume do prisma de base $d\Gamma$ e altura $u_n\Delta t$, isto é, o número real

$$u_n \, d\Gamma \, \Delta t.$$

Representando por $\rho(x,t)$ a densidade do fluido, a massa de fluido contida neste prisma é

$$\rho \, u_n \, d\Gamma \, \Delta t.$$

Resulta, portanto, que o fluxo de fluido através de Γ na direção da normal, na unidade de tempo, é dado pelo somatório, isto é, por

$$\int_\Gamma \rho(x,t)u_n(x,t)\,d\Gamma.$$

Note-se que o sinal será mais ou menos, dependendo da hipótese de ser o fluxo do interior para o exterior de Ω ou o de sentido contrário.

A seguir deduz-se a equação de continuidade, traduzindo, matematicamente, o princípio de conservação de massa. Este princípio diz que a variação da massa de fluido no interior de Ω em relação ao tempo é igual ao fluxo através de sua fronteira Γ. A massa de fluido no interior de Ω é dada por

$$M(t) = \int_\Omega \rho(x,t)\,dx,$$

sendo $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ e a integral tripla em Ω. A variação da massa $M(t)$ é obtida por

$$\frac{dM}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx.$$

Para fixar as idéias, suponha que haja aumento da massa de fluido. Logo, esta variação é igual ao fluxo de fluido que entra em Ω através de Γ, isto é,

$$-\int_\Gamma \rho(x,t)u_n(x,t)\,d\Gamma$$

no instante de tempo. Assim, do princípio de conservação de massa, obtém-se

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx + \int_\Gamma \rho\, u_n\,d\Gamma = 0$$

em cada instante. Do teorema da divergência deduz-se que

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\rho u)\,dx = 0$$

para cada aberto limitado Ω. Logo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

que é denominada equação de continuidade.

Suponha, agora, que a posição de cada partícula seja uma função derivável do tempo, isto é $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Admitindo-se esta hipótese, obtém-se

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\operatorname{grad}\rho, u),$$

sendo

$$(\operatorname{grad}\rho, u) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\rho}{\partial x_i} u_i\,, \quad u_i = \frac{dx_i}{dt}\,\cdot$$

Verifica-se que

$$\operatorname{div}(\rho u) = \rho \operatorname{div} u + (\operatorname{grad}\rho, \nu).$$

Substituindo-se $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ e $\operatorname{div}(\rho u)$ na equação da continuidade, obtém-se, quando supõe-se que $x = x(t)$ derivável:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Diz-se que um fluido é incompressível, quando sua densidade ρ é constante. Neste caso a equação da continuidade reduz-se a

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

A seguir será deduzido o sistema de Navier-Stokes, que é o modelo matemático para descrição do movimento de um fluido incompressível e viscoso.

Seja Δx um prisma de Ω. Segue-se que $\rho(x)\Delta x$ é a massa de fluido contida em Ω. Assim, $\rho\Delta x u$ é o momentum da massa $\rho\Delta x$, sendo u o módulo de u. O momentum de Ω será

$$m(t) = \int_\Omega \rho(x) u(x,t)\, dx.$$

A variação do momentum com o tempo, será

$$\frac{dm}{dt} = \int_\Omega \rho(x)\,\frac{du}{dt}\, dx.$$

Esta variação deve ser igual à resultante das forças aplicadas ao Ω. Elas são supostas de duas espécies, a saber:

i) volumétricas aplicadas a Ω de densidade $f(x,t)$,

ii) tensões e viscosidade na fronteira Γ de Ω cujas componentes são supostas da forma

$$F_i(x,t) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(x,t) n_j$$

n_j componentes da normal n à Γ.

Supõe-se $\sigma_{ij}(x,t)$ pertencentes, para cada t, a $C^1(\overline{\Omega})$, funções uma vez continuamente deriváveis em Ω tais que as funções e suas derivadas são contínuas em $\overline{\Omega}$. A matriz $\sigma_{ij}(x)$ denomina-se tensor de tensões. Quanto à função $f(x,t)$, supõe-se integrável em Ω, para cada t. Estas hipóteses são suficientes para as considerações do presente parágrafo.

Do equilíbrio entre forças e variação do momentum, segunda lei de Newton, resulta:

$$\int_\Omega \rho(x) \frac{du}{dt}\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, dx + \int_\Gamma \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(x) n_j \, d\Gamma \tag{4.1}$$

para cada Ω em cada instante t.

Tem-se:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j\,, \quad u_j = \frac{dx_j}{dt} \tag{4.2}$$

sendo u_j a componente de ordem j da velocidade $u = (u_1, u_2, u_3)$.

Do Lema de Gauss, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \sigma_{ij}(x,t) n_j \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, dx. \tag{4.3}$$

Substituindo (4.2) e (4.3) em (4.1), resulta:

$$\int_\Omega \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \right] dx = \int_\Omega \left[f(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] dx \tag{4.4}$$

para $i = 1,2,3$, em cada instante t, para cada Ω.

Diz-se que o fluido incompressível é viscoso, quando o tensor de tensões é dado por:

$$\sigma_{ij}(x,t) = -p(x)\delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_u} \right)$$

sendo $p(x)$ a pressão do fluido no ponto x no instante t, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$, $\nu > 0$ denomina-se a viscosidade do fluido.

Note que sendo o fluido incompressível, tem-se $u = 0$. Daí obtém-se

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p}{\partial x_j}\,\delta_{ij} + \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \nu\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,u.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i\,. \tag{4.5}$$

Substituindo (4.5) em (4.4), obtém-se:

$$\int_\Omega \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,u_j\right] dx = \int_\Omega \left[f(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i\right] dx$$

Daí resulta que, u e p são soluções do sistema de equações diferenciais parciais não lineares

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,u_j\right] = f(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \tag{4.6}$$

para $i = 1, 2, 3$, sendo

$$\operatorname{div}\, u = 0.$$

O sistema (4.6) denomina-se sistema de equações diferenciais parciais de Navier-Stokes.

O objetivo principal da presente exposição é fazer a análise matemática do problema misto para o sistema de Navier-Stokes, no $\mathbb{R}^2$, seguindo Lions [6], Tartar [9] e Temam [10]. Posteriormente no $\mathbb{R}^n$ com $n \leq 4$ seguindo a mesma bibliografia.

4.2 Espaços Funcionais

Serão definidos, no presente parágrafo, os espaços funcionais apropriados para a análise matemática do sistema de Navier-Stokes. Antes, porém, será estudado um problema estacionário, simples. Em lugar do $\mathbb{R}^3$, considere-se o $\mathbb{R}^n$ e Ω um aberto limitado conexo do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular. Do ponto de vista da análise a ser feita não se perde em generalidade ao supor a densidade $\rho = 1$, o que será feito.

Considere-se, inicialmente, o problema que consiste em determinar uma função $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um vetor do $\mathbb{R}^n$, definida em Ω, satisfazendo as condições:

$$-\nu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.7}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{4.8}$$

$$u_i = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \tag{4.9}$$

sendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ conhecida.

O sistema (4.7), (4.8), (4.9) denomina-se sistema de Stokes linearizado. Este sistema é o modelo linearizado, do movimento de um fluido incompressível viscoso, com velocidade u, confinado ao reservatório Ω, em regime permanente, submetido a uma densidade volumétrica de forças f. A função p é a pressão do fluido e $\nu > 0$ a viscosidade, como convencionou-se anteriormente.

Considere-se o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ e o produto cartesiano $(H_0^1(\Omega))^n$ munido do produto escalar:

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{H_0^1(\Omega)} . \tag{4.10}$$

Resulta que $(H_0^1(\Omega))^n$ é um espaço de Hilbert. Da desigualdade de Poincaré, resulta poder-se considerar em $(H_0^1(\Omega))^n$ a norma equivalente

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\nabla v_i|^2_{L^2(\Omega)} \,, \tag{4.11}$$

para todo $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ em $(H_0^1(\Omega))^n$, sendo

$$|\nabla v_i|^2 = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx, \tag{4.12}$$

$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$.

Considera-se o subespaço V, fechado, de $(H_0^1(\Omega))^n$, definido por

$$V = \left\{v \in (H_0^1(\Omega))^n; \text{div } v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\right\}.$$

Representa-se por $(L^2(\Omega))^n$ o produto cartesiano com n fatores iguais a $L^2(\Omega)$. Define-se em $(L^2(\Omega))^n$ o produto escalar

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i v_i \, dx, \tag{4.13}$$

cuja norma induzida é

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i^2 \, dx. \tag{4.14}$$

Representa-se por H a aderência de $\mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n; \text{div } \varphi = 0\}$ em $(L^2(\Omega))^n$. Note-se que $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço das funções testes em Ω. Demonstra-se que $\mathcal{V}$ é denso em V.

Procurando-se uma formulação variacional para o sistema linearizado de Stokes, multiplique-se ambos os membros de (4.7) por um vetor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $(H_0^1(\Omega))^n$ e integre-se sobre Ω. Procedendo-se formalmente, obtém-se

$$-\int_\Omega \nu \Delta u_i v_i \, dx + \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \, dx = \int_\Omega f_i v_i \, dx$$

ou

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega f_i v_i \, dx.$$

Somando-se em i, obtém-se

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - \int_{\Omega} p \ v \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx.$$

Restringindo-se os vetores v ao espaço de Hilbert V, resulta que $v = 0$, logo o problema reduz-se a encontrar u em V tal que

$$\nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx \tag{4.15}$$

para todo v em V.

Para demonstrar a existência e unicidade de u em V solução de (4.15), será aplicado o Lema de Lax-Milgram. Considere-se a forma bilinear

$$a(u, v) = \nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx$$

definida para u, v em V. Tem-se

$$a(u, v) = \nu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \leq \nu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\nabla u_i|_{\mathbb{R}^n} \, |\nabla v_i|_{\mathbb{R}^n} \, dx \leq$$
$$\leq \nu \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_i|^2_{\mathbb{R}^n} \ dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 \ dx \right)^{1/2} \leq \nu \, \|u\| \ \|v\|$$

provando ser $a(u, v)$ contínua em V.

Sendo para todo v em V,

$$a(v, v) = \nu \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = \nu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2_{\mathbb{R}^n} \, dx = \nu \, \|v\|^2$$

conclui-se que $a(u, v)$ é coerciva.

Para todo $f \in H$, a aplicação

$$f \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx = (f, v), \quad v \in V, \tag{4.16}$$

é uma forma linear contínua em V, conseqüência simples da desigualdade de Schwarz.

Portanto, sendo $a(u, v)$ uma forma bilinear contínua, coerciva em V e $f \to (f, v)$ definida por (4.16) uma forma linear contínua em V para todo $f \in H$, conclui-se, do Lema de Lax-Milgram, que existe um único $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = (f, v) \quad \text{para todo } v \text{ em } V. \tag{4.17}$$

A etapa seguinte do presente argumento, seria relacionar a solução u de (4.17) como problema original formulado para o sistema (4.7), que é a parte mais delicada desta análise. Com o objetivo de tornar inteligível este ponto, será caracterizado, inicialmente, o dual de V, por meio de um argumento analítico, devido a Lions [7] e Tartar [10].

Do estudo dos espaços de Sobolev sabe-se que o dual de $(H_0^1(\Omega))^n$ identifica-se ao espaço $(H^{-1}(\Omega))^n$, sendo $H^{-1}(\Omega)$ o dual de $H_0^1(\Omega)$. Será demonstrado que se L pertence a $(H^{-1}(\Omega))^n$ for tal que $L(v) = 0$ para toda $v \in V$, então existe uma função $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que $L = \nabla p$, isto é,

$$L(v) = \int_\Omega P\, v \, dx \tag{4.18}$$

para todo $v \in V$. Assim, ficam caracterizadas por meio de (4.18) as formas lineares contínuas sobre $(H_0^1(\Omega))^n$ que se anulam em V.

Observação 1: A demonstração a ser reproduzida aqui supõe Ω com fronteira Γ regular. No caso geral de Ω com fronteiras gerais, encontra-se em Lions [6] outra demonstração por meio do teorema de dualidade de De Rham ou em Temam [9].

Represente-se por $d(x)$ a distância de um ponto x de Ω a fronteira Γ.Tem-se que $d(x)$ é uma função Lipschitziana em Ω. Resolve-se a equação

$$\operatorname{div}(d(x)\phi) = g \quad \text{em} \quad \Omega$$

usando resultados do estudo de equações elíticas degeneradas. Demonstra-se que existe $\phi \in H^2(\Omega)$ solução do problema e que a aplicação $g \longmapsto \phi$ é contínua de $L_0^2(\Omega)$ em $H^2(\Omega)$, sendo

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ g \in L^2(\Omega); \int_\Omega g(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Deduz-se que existe uma aplicação $p\colon L^2_0(\Omega) \to (H^1_0(\Omega))^n$ linear e contínua, definida por

$$pg = d(x)\phi.$$

De fato, $\phi \in H^2(\Omega) \quad d(x)\,\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i} \in H^1_0(\Omega)$, logo $pg \in (H^1_0(\Omega))^n$ e

$$\text{div } pg = g. \tag{4.19}$$

Dado um $f \in V'$, o mesmo argumento usado em (4.17) garante a existência de um único u em V tal que

$$a(u, v) = (f, v)_{V' \times V} \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{4.20}$$

A idéia é aproximar a solução u de (20) por soluções de um problema penalizado em $(H^1_0(\Omega))^n$. Do Lema de Lax-Milgram, conclui-se que para cada $\alpha > 0$, existe $u_\alpha \in (H^1_0(\Omega))^n$ tal que

$$a(u_\alpha, v) + \frac{1}{\alpha}\,(\operatorname{div} u_\alpha, \operatorname{div} v) = (f, v)_{V' \times V} \tag{4.21}$$

para todo $v \in (H^1_0(\Omega))^n$.

Demonstra-se, a seguir, que u_α converge fraco em $(H^1_0(\Omega))^n$ para u, solução de (4.20). De fato, substituindo $v = u_\alpha \in (H^1_0(\Omega))^n$ em (4.21), obtém-se

$$\|u_\alpha\| < C \quad \text{independente de} \quad \alpha > 0. \tag{4.22}$$

Fazendo-se

$$p_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\,\text{div } u_\alpha\,,$$

obtém-se de (4.21):

$$a(u_\alpha, v) = (f, v)_{V' \times V} + (p_\alpha, \operatorname{div} v), \tag{4.23}$$

para todo $v \in (H^1_0(\Omega))^n$, sendo

$$\int_\Omega p_\alpha\, dx = -\frac{1}{\alpha}\int_\Omega \operatorname{div} u_\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_\Gamma u_\alpha \nu\, d\Gamma = 0, \tag{4.24}$$

porque $u_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$.

A seguir demonstrar-se-á que p_α é limitado em $L^2(\Omega)$. De fato, $p_\alpha \in L_0^2(\Omega)$, como visto em (4.24). Logo, por (4.19) existe $v_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ tal que

$$\text{div } v_\alpha = p_\alpha \tag{4.25}$$

e

$$\|v_\alpha\| \leq C\,|p_\alpha|\,, \tag{4.26}$$

porque p_α: $L_0^2(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^n$ é contínua.

Tomando $v = v_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ em (4.23), observando a (4.25), obtém-se

$$|p_\alpha|^2 = a(u_\alpha, v_\alpha) - (f, v_\alpha)_{V'\times V} \leq K\,\|u_\alpha\|\;\|v_\alpha\| + |f|_{V'}\;\|v_\alpha\|.$$

De (4.22) e (4.26), conclui-se que

$$|p_\alpha| < \text{ constante.}$$

Logo, existe uma subsucessão ainda representada por p_α tal que

$$p_\alpha \rightharpoonup p \quad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega).$$

De (4.22) existe uma sub u_α tal que

$$u_\alpha \rightharpoonup w \quad \text{fraco em} \quad (H_0^1(\Omega))^n.$$

Tomando o limite na equação penalizada (4.21), obtém-se

$$a(w, v) = (f, v)_{V'\times V} + (p, \text{div } v) \tag{4.27}$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$.

Em particular, para $v \in v \subset (H_0^1(\Omega))^n$, em (4.27), obtém-se w é solução de

$$a(w, v) = (f, v)_{V'\times V} \quad \text{para todo } v \text{ em } V.$$

Comparando com (4.20), resulta que $w = u$, porque a solução u de (4.20) é única.

Conclui-se que a solução de (4.20) é obtida como limite fraco de soluções da equação penalizada (4.21) ou (4.23).

Seja $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ tal que $(f, v)_{V' \times V} = 0$ para todo $v \in V$. Então a solução u de (4.20) é a solução $u = 0$. Retornando à equação (4.27), onde já demonstrou-se que $w = u$, obtém-se

$$(4.28) \qquad (f, v)_{V' \times V} + (p, \text{div } v) = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in (H_0^1(\Omega))^n$$

isto é,

$$(f, v)_{V' \times V} + (-\text{grad } p, v) = 0$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$, provando que

$$f = \text{grad } p.$$

Note que $p \in L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ resolve o problema. Assim existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que $f = p$.

Conclui-se de (4.28) que se L for uma forma linear contínua sobre $(H_0^1(\Omega))^n$ que se anula em V, então existe um único $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$(4.29) \qquad L(v) = \int_\Omega p \text{ div } v \, dx$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$.

É claro que para todo $p \in L^2(\Omega)$ a (4.29) define uma forma linear contínua em $(H_0^1(\Omega))^n$ nula em V.

A seguir, usando-se a caracterização (4.29), será feita a interpretação da solução u de (4.17).

De fato, seja $u \in V$ solução de (4.17). Considere-se a forma linear contínua $L(v)$ definida em $(H_0^1(\Omega))^n$ do modo seguinte:

$$(4.30) \qquad L(v) = a(u, v) - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i v_i \, dx$$

sendo $f \in H$. Sendo u solução de (4.17), resulta que $L(v) = 0$ para todo v em V, sendo $L(v)$ definida por (4.30). De (4.29) conclui-se que existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$L(v) = \int_\Omega p \; v \, dx,$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$. Logo, o par u, p de $V \times H$ é solução de

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_\Omega p \; \operatorname{div} v \, dx, \tag{4.31}$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$. Sendo $(\mathcal{D}(\Omega))^n$ contido em $(H_0^1(\Omega))^n$, restringindo-se v a $(\mathcal{D}(\Omega))^n$ em (4.31), conclui-se que existe uma única $u \in V$ tal que

$$\begin{aligned}
&-\nu \Delta u_i = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ em } \Omega \\
&\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\
&u_i = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma,
\end{aligned}$$

isto é, solução do sistema de Stokes.

4.3 Sistema de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^2$

Embora deseje-se analisar o sistema no plano, os problemas serão formulados no caso geral para não trazer dúvidas desnecessárias ao leitor. Inicia-se com certas notações. Considera-se o cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$ e o vetor velocidade $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Serão adotadas as seguintes notações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right); \quad \Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_n).$$

O sistema de Navier-Stokes toma a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f - \operatorname{grad} p, \quad \nu > 0 \tag{4.32}$$

$$\text{div } u = 0 \tag{4.33}$$

com as condições de fronteira e iniciais seguintes:

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \quad \text{isto é} \quad u_i = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \tag{4.34}$$

sendo Σ a fronteira lateral de Q

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \text{ isto é, } u_i(x, 0) = u_{0i}(x) \tag{4.35}$$

em Ω.

O problema a resolver consiste em determinar u e p satisfazendo às condições (4.32) ... (4.35).

Antes da formulação correta, estabelece-se mais alguma notação.

Para u, v em V, definiu-se no §2 a forma bilinear

$$a(u, v) = \nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx,$$

que é contínua e coerciva em V.

Considera-se a forma trilinear $b(u, v, w)$ definida para u, v, w em V, do modo seguinte:

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx.$$

Uma primeira propriedade desta forma trilinear é a seguinte:

Lema 1. $b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0.$

Demonstração:

$$b(u, v, w) + b(u, w, v) = \sum_{ij} \left(\int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx + \int_{\Omega} u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i \, dx \right) =$$

$$= \sum_{ij} \int_{\Omega} u_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i \right) dx = \sum_{ij} \int_{\Omega} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i w_i) \, dx =$$

$$= \sum_{ij} \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \, dx,$$

porque a contribuição na fronteira Γ é nula, de vez que $u, v, w \in V$. Esta última integral é nula porque $u = 0$.

Note-se que sendo $b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0$, segue-se que $b(u, v, w) = 0$ toda vez que $v = w$.

Problema 1. Dados

$$f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^2), \quad u_0 \in H, \tag{4.36}$$

determinar u e p, sendo $p \in \mathcal{D}'(Q)$ tais que

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \tag{4.37}$$

$$u' - \nu\Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \text{grad } p \text{ em } \mathcal{D}'(Q) \tag{4.38}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{4.39}$$

A solução do Problema 1, satisfaz às condições (4.31)...(4.35).

Problema 2. Dados

$$f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^2), \quad u_0 \in H$$

determinar u tal que

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \tag{4.40}$$

$$(u'(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \tag{4.41}$$

para todo $v \in V$.

$$u(0) = u_0\,. \tag{4.42}$$

O plano que se tem em mente consiste em demonstrar a equivalência dos dois problemas e a seguir resolver o Problema 2.

- Se u for solução do Problema 1 então u é solução do Problema 2.

De fato, seja u solução do Problema 1 e $\varphi \in \mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega)^2);\ \varphi = 0\}$. Multiplicando-se ambos os membros de (4.38) por φ e integrando, obtém-se

$$(u'(t), \varphi) + \nu a(u(t), \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi) - (\ p, \varphi).$$

Sendo $(\ p, \varphi) = 0$ para φ com $\ \varphi = 0$, obtém-se

$$(u'(t), \varphi) + \nu a(u(t), \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi)$$

em $\mathcal{D}'(0, T)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$. Sendo $\mathcal{V}$ denso em $V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^2;\ v = 0\}$ resulta que u é solução do Problema 2.

- Se u for solução do Problema 2 então u é solução do Problema 1.

Veja demonstração em Lions [6], Temam [9], Tartar [10]. A solução do Problema 2 denomina-se solução fraca.

Teorema 1. Sejam $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$, então existe uma única $(n=2)$ u satisfazendo as condições

(4.43) $$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$$

(4.44) $$u' \in L^2(0,T;V')$$

(4.45) $$(u'(t),v) + \nu a(u(t),v) + b(u(t),u(t),v) = (f(t),v)$$

para todo v em V, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

(4.46) $$u(0) = u_0 \, .$$

Observação 2. De $u \in L^2(0,T;V)$, $u' \in L^2(0,T;V')$, sendo $V \subset H = H' \subset V'$, injeções contínuas, resulta que u é contínua de $[0,T]$ com valores em V'; também de $[0,T]$ com valores em $[V,V']_{1/2} = H$ e fracamente contínua com valores em V. Consulte-se Lions-Magenes [8]. Resulta desta observação fazer sentido calcular-se $u(0)$.

A demonstração do Teorema 1, será feita usando o método de Galerkin, consistindo em obter a solução do Teorema 1 por meio de soluções aproximadas de problemas análogos em dimensão finita. É fundamental a obtenção de estimativas sobre as soluções aproximadas permitindo a obtenção de subsucessões convergentes. Alguns lemas técnicos serão demonstrados inicialmente.

Lema 2. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, $n=2$, tem-se:

$$|u|^2_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega) \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \, |u|_{L^2(\Omega)} \, .$$

Demonstração: Sendo $u \in H_0^1(\Omega)$, a função $\tilde{u} = u$ em Ω e nula no complemento de Ω pertence a $H^1(\mathbb{R}^2)$. Sendo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ denso no $H^1(\mathbb{R}^2)$, limitar-nos-emos às funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. De fato,

$$u^2(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s} u^2(s,x_2)\, ds = \int_{-\infty}^{x_1} 2u(s,x_2) \frac{\partial u}{\partial s}(s,x_2)\, ds$$

ou

$$|u(x_1,x_2)|^2_{\mathbb{R}} \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u(s,x_2)| \left|\frac{\partial u}{\partial s}(s,x_2)\right| ds = \nu(x_2).$$

Analogamente,

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1,s)| \left|\frac{\partial u}{\partial s}(x_1,s)\right| ds = \nu(x_1).$$

Multiplicando-se membro à membro, obtém-se

$$|u(x_1,x_2)|^4 \leq \nu(x_1)\nu(x_2)$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x_1,x_2)|^4 \, dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(x_2)\, dx_2$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x_1,x_2)|^4 \, dx_1 dx_2 \leq 4\int_{-\infty}^{+\infty} |u| \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| dx_1 dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right| dx_1 dx_2 \tag{4.47}$$

Aplicando-se a desigualdade de Schwarz às integrais do segundo membro de (4.47), a seguir usando-se a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$ e a desigualdade de Poincaré $\left(|\nabla u|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\right)$, obtém-se a desigualdade do Lema 2.

Lema 3. A forma trilinear $b(u,v,w)$ é contínua em $V \times V \times V$.

Demonstração: Do teorema de imersão de Sobolev, tem-se que $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} > 0$. Quando $n = 2$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} = 0$ e a imersão de $H_0^1(\Omega)$ faz-se continuamente em $L^q(\Omega)$, qualquer que seja o número real $q > 0$. Portanto, para $n = 2$ pode-se tomar $q = 4$, concluindo-se que $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^4(\Omega)$.

Tem-se

$$|b(u,v,w)| \leq \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega} \left| u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \right| dx. \tag{4.48}$$

Notando-se que

$$\int_\Omega |u_j w_i| \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right| dx \leq \left(\int_\Omega |u_j w_i|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\left(\int_\Omega |u_j|^4\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |w_i|^4\, dx\right)^{1/2}\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_\Omega |u_j|^4\, dx\right)^{1/4} \left(\int_\Omega |w_i|^4\, dx\right)^{1/4} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2},$$

obtém-se, da desigualdade de Hölder com $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=1$,

$$\int_\Omega \left|u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i\right| dx \leq |u_j|_{L^4(\Omega)} \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega)} |w_i|_{L^4(\Omega)}\,. \tag{4.49}$$

Substituindo-se (4.49) em (4.48) e usando teorema de imersão, obtém-se

$$|b(u,v,w)| \leq \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}$$

isto é,

$$|b(u,v,w)| \leq C \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= C\, \|u\|_V \sum_{i=1}^{2} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}\, \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\, \|u\|_V\, \|v\|_V\, \|w\|_V\,,$$

provando a continuidade de $b(u,v,w)$ em $V\times V\times V$.

Resulta do Lema 3 que fixados u e v, a aplicação $w \longmapsto b(u,v,w)$ é uma forma linear contínua em V. Define-se, por esta razão, uma aplicação $B(u,v)$ de $V\times V$ em V' do modo seguinte:

$$\langle B(u,v), w\rangle = b(u,v,w),$$

sendo $B(u,v)$ bilinear e contínua.

Lema 4. Se $u,v \in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$ então $B(u,v)\in L^2(0,T;V')$.

Demonstração: Sendo $B(u,v)$ bilinear contínua de $V\times V$ em V', obtém-se

$$|B(u,v)|_{V'} \leq C\, \|u\|_V\, \|v\|_V \leq \frac{C}{2}\,(\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2),$$

provando que $B(u,v) \in L^1(0,T;V')$. Para provar que ela é $L^2(0,T;V')$, considere-se

$$\langle B(u,v), w\rangle = b(u,v,w) = -b(u,w,v) = -\langle B(u,w), v\rangle\,\rangle.$$

Resulta que

$$|\langle B(u,v), w\rangle| = |b(u,w,v)| \leq C\,|u|^2_{(L^4(\Omega))^2}\ \|w\|_V\ |v|^2_{(L^4(\Omega))^2}\ ,$$

por (4.49), usando-se um argumento análogo ao empregado na demonstração do Lema 3. Daí obtém-se

$$\|B(u,v)\|_{V'} \leq C\,|u|^2_{(L^4(\Omega))^2}\ |v|^2_{(L^4(\Omega))^2}\ , \tag{4.50}$$

sendo

$$|u|^4_{(L^4(\Omega))^2}\ |v|^4_{(L^4(\Omega))^2} \leq \left(\sum_{j=1}^{2} |u_j|^2_{L^4(\Omega)}\right)\left(\sum_{j=1}^{2} |v_j|^2_{L^4(\Omega)}\right),$$

que substituindo em (4.50) tomando-se o quadrado de ambos os membros e aplicando o Lema 2, obtém-se

$$\|B(u,v)\|^2_{V'} \leq C\sum_{j=1}^{2} |u_j|_{L^2(\Omega)}\ \|u_j\|_{H^1_0(\Omega)} \sum_{j=1}^{2} |v_j|_{L^2(\Omega)}\ \|v_j\|_{H^1_0(\Omega)}$$

ou

$$\|B(u,v)\|^2_{V'} \leq$$
$$\leq C\left(\sum_{j=1}^{2} |u_j|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{2} |v_j|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{2} \|v_j\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{1/2}$$

isto é,

$$\|B(u,v)\|^2_{V'} \leq C\,|u|_H\ \|u\|_V\ |v|_H\ \|v\|_V \leq K\,\|u\|_V\ \|v\|_V\ ,$$

que demonstra ser $B(u,v) \in L^2(0,T;V')$ quando u e v estão nas condições do Lema 4.

Demonstração da Unicidade no Teorema 1

Note-se que a solução $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, sendo $u' \in L^2(0,T;V')$. Logo, faz sentido calcular-se $\langle u', v\rangle$ para todo $v \in V$. Por esta razão é relativamente simples demonstrar-se a unicidade no caso $n = 2$. Quando $n \geq 2$, $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, mas $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} > 0$, perdendo-se a arbitrariedade providencial do q, como no caso $n = 2$. Tal dificuldade refletir-se-á nas estimativas das soluções aproximadas.

Sejam u e $\hat{u}$ duas soluções nas condições do Teorema 1, com $n = 2$. Fazendo-se $w = u - \hat{u}$, resulta que

$$(w'(t), v) + \nu a(w(t), v) + b(u(t), u(t), v) - b(\hat{u}(t), \hat{u}(t), v) = 0 \tag{4.51}$$

para todo $v \in V$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

$$w(0) = 0. \tag{4.52}$$

Observação 3: Note-se que $b(u, u, v) - b(\hat{u}, \hat{u}, v) = b(u - \hat{u} + \hat{u}, u, v) - b(\hat{u} - u + u, \hat{u} - u + u, v) = b(w, u, v) + b(\hat{u}, u, v) - b(-w, -w, v) - b(-w, u, v) - b(u, -w, v) - b(u, u, v) = b(w, u, v) - b(w, u, v) - b(w, w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) = b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v)$.

Da Observação 3, o sistema (4.51) modifica-se em

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0 \tag{4.53}$$

para todo v em V, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$,

$$w(0) = 0. \tag{4.54}$$

Tomando-se $v = w \in V$ em (4.53), obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu a(w, w) + b(w, u, w) + b(u, w, w) - b(w, w, w) = 0$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu\|w(t)\|^2 \leq -b(w, u, w) \leq$$
$$\leq C|w|_{(L^4(\Omega))^2}\ \|u\|_V\ |w|_{(L^4(\Omega))^2} \leq C|w|^2_{(L^4(\Omega))^2}\ \|u\|_V \leq C|w|\ \|w\|_V\ \|u\|_V\ ,$$

pelo Lema 2. Logo

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu\,\|w(t)\|^2 \leq \nu\,\|w\|_V^2 + \frac{C^2}{\nu}|w|^2\ \|u\|_V^2\ ,$$

de onde resulta que:

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq \frac{C^2}{\nu}\ \|u\|_V^2\ |w|^2.$$

Fazendo-se $\theta(t) = \dfrac{C^2}{\nu}\ \|u(t)\|_V^2, \quad \varphi(t) = \|w(t)\|_V^2$, vem

$$\theta \in L^1(0,T) \quad \text{e} \quad \varphi \in C^1([0,T];\mathbb{R}),$$

satisfazem a desigualdade

$$\varphi'(t) \leq \theta(t)\varphi(t).$$

Daí resulta que $\varphi(t) = 0$ em $[0,T]$, provando que $w(t) = 0$ em $[0,T]$, isto é, $u(t) = \hat{u}(t)$ em $[0,T]$, concluindo-se a unicidade.

Demonstração da Existência no Teorema 1

Será feita por meio do método de Galerkin, escolhendo-se uma base especial de funções próprias. Para isto, suponhamos que $V \subset H$ seja contínua, densa e compacta. Identificando-se $H = H' \subset V'$, continuamente. Assim, V e H são espaços de Hilbert tais que

$$V \subset H \subset V'.$$

Fazendo $a(u,v) = ((u,v))$ que é o produto escalar em V, o problema espectral

$$((u,v)) = \lambda(u,v),$$

sendo (u,v) o produto escalar em H, possui solução (w_i) correspondentes aos valores próprios (λ_i). Sabe-se que $\lambda_i > 0$ para todo i, a sucessão dos λ_j é crescente e divergente para mais infinito. Obtém-se

$$((w_i,v)) = \lambda_i(w_i,v), \qquad i = 1,2,\dots,$$

para todo v em V.

Cálculo de Normas

i) Sendo (w_i) ortonormal completo em H, para v em H, obtém-se

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} (v, w_i)\, w_i\,,$$

sendo, pelo teorema de Parseval

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(v, w_i)|^2$$

que é a norma de v em H.

ii) Tem-se

$$((w_i, v)) = \lambda_i (w_i, v)$$

para todo v em V. Resulta que $\left(w_i / \sqrt{\lambda_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ é ortonormal e completa em V. Portanto, para todo v em V, obtém-se

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(v, \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right) \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\,.$$

Daí resulta:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\left(\left(v, \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)\right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} |((v, w_i))|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} |\lambda_i (v, w_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(v, w_i)|^2,$$

que é a norma de v em V.

iii) Seja A o operador definido pela forma bilinear $((\cdot, \cdot))$. Tem-se $Aw_i = \lambda_i w_i$, sendo A linear e contínuo de V sobre V' aliás, A é um isomorfismo entre V e V'. Define-se

$$\|v\|_{V'} = \left\|A^{-1} v\right\|_V\,.$$

Por (ii) obtém-se

$$\|v\|_{V'}^2 = \left\|A^{-1} v\right\|_V^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(A^{-1} v, w_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(v, A^{-1} w_i)|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(v, w_i/\lambda_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} |(v, w_i)|^2.$$

Conclui-se que a norma de v em V' é

$$\|v\|_{V'}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} |(v, w_i)|^2.$$

Sistema Aproximado

Considere-se os vetores (w_i), solução de $((w_i, v)) = \lambda_i (w_i, v)$, obtido anteriormente. Represente-se por V_m o subespaço de dimensão m de V gerado pelos m primeiros vetores $w_1, w_2, \dots, w_m$. Para cada m, considere $u_m \in V_m$ definida por

$$(u_m'(t), v) + \nu a(u_m(t), v) + b(u_m(t), u_m(t), v) = (f(t), v), \tag{4.55}$$

para todo $v \in V_m$.

$$u_m(0) = u_m \quad \text{sendo} \quad \lim u_{0m} = u_0 \quad \text{forte em} \quad H. \tag{4.56}$$

Para escrever-se (4.55) explicitamente, substitui-se

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\,,$$

no sistema (4.55), tomando-se $v = w_i$, obtém-se

$$g_{im}'(t) + \nu \lambda_i g_{im}(t) + F(g_{1m}(t), g_{2m}(t), \dots, g_{mm}(t)) = f_i \tag{4.57}$$

$i = 1, 2, \dots, m$, porque

$$a(u_m, w_i) = ((u_m, w_i)) = \lambda_i (u_m, w_i) = \lambda_i g_{im}(t)$$

e

$$(u_m', w_i) = g_{im}'(t).$$

Relativamente à condição inicial, obtém-se

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} c_{jm} w_j\,, \quad g_{im}(0) = c_{im}\,. \tag{4.58}$$

Resulta que o sistema (4.57), (4.58) possui uma solução $(g_{im})_{1\leq i\leq m}$ em um intervalo $[0, t_m)$. As estimativas a serem obtidas demonstram que u_m pode ser prolongada no intervalo $[0, T)$.

Estimativa I

Tomando-se $v = u_m(t)$ em (4.55), obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 \leq \|f\|_{V'} \|u_m(t)\|_V ,$$

porque $b(u_m, u_m, u_m) = 0$. Sendo

$$\|f\|_{V'} \|u_m(t)\|_V \leq \frac{1}{\nu} \|f\|^2_{V'} + \nu \|u(t)\|^2_{V'} ,$$

segue-se

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f\|^2_{V'} . \tag{4.59}$$

Integrando-se (4.59) de 0 a $t < t_m$, obtém-se

$$|u_m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 \, ds \leq \|u_m(0)\|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(s)\|^2_{V'} \, ds. \tag{4.60}$$

De (4.60) encontra-se uma estimativa para $|u_m(t)|$ na norma de H, independente de m e t em $[0, t_m)$. Resulta que o prolongamento ao intervalo $[0, T)$ é possível. Retornando-se à (4.60) obtém-se

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{pertence a um limitado de} \quad L^\infty(0, T; H) \tag{4.61}$$

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{pertence a um limitado de} \quad L^2(0, T; V) \tag{4.62}$$

Estimativa II

Seja $h_m = f - \nu\Delta u_m - B(u_m, u_m)$. Sabe-se que $B(u_m, u_m)$ pertence a $L^2(0, T; V')$, sendo

$$\|B(u_m, u_m)\|_{V'} \leq \|u_m\|^2 .$$

De u_m limitada em $L^2(0,T;V)$, conclui-se que $B(u_m,u_m)$ é limitada em $L^2(0,T;V)$. Sendo $-\Delta$ pertencente a $\mathcal{L}(V,V')$ e $f \in L^2(0,T;V')$, resulta que h_m pertence a um limitado de $L^2(0,T;V')$.

Cálculo da norma de $\dfrac{du_m}{dt}$ **em** V'

$$\left\|\frac{du_m}{dt}\right\|_{V'}^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-1} \left|\left(\frac{du_m}{dt}, w_i\right)\right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-1} \left|(h_m, w_i)\right|^2 \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} \left|(h_m, w_i)\right|^2 = \|h_m(t)\|_{V'}^2$$

que é limitada em $L^1(0,T)$. Conclui-se:

(4.63) $$\left(\frac{du_m}{dt}\right)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;V').$$

Observação 4: Note-se que para a obtenção da estimativa (4.61), usou-se uma base especial de vetores próprios do problema espectral $((w,v)) = \lambda(w,v)$.

De (4.61), (4.62), (4.63) deduz-se a existência de uma subsucessão de u_m, ainda representada por u_m, tal que

(4.64) $$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{converge para } u \text{ fraco em} \quad L^2(0,T;V)$$

(4.65) $$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{converge para } u \text{ fraco estrela em} \quad L^\infty(0,T;H)$$

(4.66) $$\left(\frac{du_m}{dt}\right)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{converge para} \quad \frac{du}{dt} \quad \text{fraco} \quad L^2(0,T;V')$$

Estas convergências não são suficientes para tomar-se o limite, com sucesso, na equação aproximada. Para obter-se convergências que permitam tomar limites no termo não linear $b(u_m,u_m,v)$, recorre-se a um teorema de compacidade cujo enunciado vem a seguir, porém a demonstração encontra-se em Lions [6], Aubin [1] ou Temam [9] reproduzida no Apêndice I destas notas.

Considere-se os espaços de Banach $B_0 \subset B \subset B_1$, sendo as injeções contínuas. Suponha-se que a injeção de B_0 em B seja compacta e $1 < p_i < \infty \quad i = 1,2$. Considera-se o espaço de Banach

$$W = \left\{ v \in L^{p_0}(0,T;B_0);\ \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\}$$

com a norma:

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Sendo $B_0 \subset B$ continuamente, resulta que a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é contínua. Demonstra-se que a compacidade de $B_0 \subset B$ implica ser compacta a injeção de W em $L^{p_0}(0,T;B)$, cf. Apêndice I.

Aplicando o teorema de compacidade mencionado à presente situação, quando $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V'$, $p_0 = p_1 = 2$, obtém-se

$$W = \left\{ v \in L^2(0,T;V);\ \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;V') \right\}.$$

Notando as estimativas (4.62) e (4.63), resulta que u_m é limitada em W. Sendo compacta a injeção de W em $L^2(0,T;H)$ conclui-se que existe uma subsucessão, ainda representada por u_m, tal que

(4.67) $\qquad (u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge para u forte em $L^2(0,T;H)$

e quase sempre em Q.

Note que em (4.64), (4.65), (4.66), (4.67) tem-se a mesma subsucessão u_m e o mesmo limite u.

Convergência do Termo não Linear

Demonstrar-se-á que $b(u_m,u_m,v)$ converge para $b(u,u,v)$ para todo $v \in V$ no sentido de $L^p(0,T)$ para algum $p \geq 1$. Tem-se:

$$b(u_m,u_m,v) = -b(u_m,v,u_m) = -\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_{mj} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_{mi}\, dx.$$

Sendo $v \in V$ resulta que $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$. Encontrou-se $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ limitada em $L^2(0,T;V)$ sendo $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, quando $n = 2$, injeção contínua. Logo, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em

$L^2(0,T;(L^4(\Omega))^2)$. Daí resulta que

$$\int_\Omega |u_{mi}u_{mj}|^2\,dx \le \left(\int_\Omega |u_{mi}|^4\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |u_{mj}|^2\,dx\right)^{1/2},$$

da qual obtém-se $u_{mi}u_{mj}$ limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$. Resulta que existe uma subsucessão, ainda represenada por $u_{mi}u_{mj}$, tal que

$$(u_{mi}u_{mj})_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{converge para } \chi_{ij} \text{ em } L^2(0,T;H) \text{ fraco.}$$

Encontrou-se em (4.67) que u_m converge para u forte em $L^2(0,T;H)$ e quase sempre em Q. Logo u_{mi} converge para u_i quase sempre em Q, isto é,

$$(u_{mi}u_{mj})_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{converge para } u_iu_j \text{ quase sempre em } Q.$$

Em resumo, tem-se $g_m = u_{mi}u_{mj}$ limitada em $L^2(Q)$ e convergindo quase sempre para u_iu_j em Q. Do Lema 3.1 de Lions [6], resulta que $g_m = u_{mi}u_{mj}$ converge para u_iu_j fraco em $L^2(Q)$, concluindo-se $\chi_{ij} = u_iu_j$.

Resulta que para toda $\psi(x,t) \in L^2(0,T;H) = L^2(Q)$, obtém-se:

$$\lim_{m\to\infty}\int_Q u_{mi}u_{mj}\,\psi(x,t)\,dxdt = \int_Q u_iu_j\,\psi(x,t)\,dxdt. \tag{4.68}$$

Para toda $v \in V$, tem-se $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, logo tomando $\theta \in L^2(0,T)$ a função $\psi(x,t) = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\theta(t)$ pertence a $L^2(0,T;H)$ para $i,j = 1,2$. Substituindo-se esta $\psi(x,t)$ em (4.68), resulta:

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T\left(\int_\Omega u_{mi}u_{mj}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx\right)\theta(t)dt = \int_0^T\left(\int_\Omega u_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}u_j\,dx\right)\theta(t)dt,$$

provando que

$$\lim_{m\to\infty} b(u_m(t),u_m(t),v) = b(u(t),u(t),v) \quad \text{em } L^2(0,T) \text{ fraco,} \tag{4.69}$$

para todo v em V.

Passagem ao limite na derivada

De (4.66) obtém-se

$$\int_0^T \langle u_m'(t), v\rangle\, \theta\, dt \to \int_0^T \langle u'(t), v\rangle\, \theta\, dt$$

para cada $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in V$. Note que $\langle\, ,\, \rangle$ é a dualidade $V \times V'$. Daí obtém-se

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta\, dt \to \int_0^T \langle u'(t), v\rangle\, \theta\, dt.$$

Tem-se

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta\, dt = -\int_0^T (u_m(t), v)\theta'\, dt \to -\int_0^t -(u(t), v)\theta'\, dt$$

pois $u_m \rightharpoonup u$ fraco estrela $L^\infty(0,T;H)$. Logo

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\,(u(t), v)\theta\, dt = -\int_0^T (u(t), v)\theta'\, dt = \int_0^T \langle u'(t), v\rangle\theta\, dt.$$

Escreve-se que

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta\, dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\,(u(t), v)\theta\, dt$$

para toda $v \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,t)$.

Das convergências (4.64), (4.65), (4.66), (4.69) é lícito tomar o limite em ambos os membros da equação aproximada (4.55), fixando $v = w_i\,,\ \ i < m$, obtendo-se

$$\frac{d}{dt}\,(u(t), v) + \nu a(u(t), w_i) + b(u(t), u(t), w_i) = (f(t), w_i)$$

para todo i, fraco em $\mathcal{D}(0,T)$. Sendo a sucessão (w_ν) base Hilbertiana de V, resulta

$$\left(\frac{du}{dt}, v\right) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \tag{4.70}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo v em V, demonstrando que u é solução fraca do sistema de Navier-Stokes no caso $n = 2$.

Para completar a demonstração do Teorema 1, resta constatar que u assume o valor inicial u_0 quando $t = 0$. De fato, sabe-se que u é contínua em $[0,T]$ com valores em H. Sendo $\dfrac{du_m}{dt}$ convergente para $\dfrac{du}{dt}$ fracamente em $L^2(0,T;V')$, obtém-se

$$\int_\Omega \left(\frac{du_m}{dt}, w_i\right)\theta(t)dt \quad \text{converge para} \quad \int_0^T \left(\frac{du}{dt}, w_i\right)\theta(t)dt \tag{4.71}$$

para todo $\theta \in L^2(0,T)$. Considere-se $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 1, \quad \theta(T) = 0$. De (4.71) obtém-se

$$\int_\Omega \frac{d}{dt}(u_m(t), w_i)\theta(t)\, dt \quad \text{converge para} \quad \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), w_i)\theta(t)\, dt$$

para tais θ. Integrando por partes, o que é lícito pois $t \longmapsto (u(t), w_i)$ é contínua em $[0,T]$, obtém-se

(4.72)
$$\lim_{m\to\infty}\left[-(u_m(0), w_i) - \int_0^T (u_m(t), w_i)\theta'(t)dt\right] = \\ = -(u(0), w_i) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\, dt.$$

De (4.65) aplicda a (4.72), conclui-se que

(4.73)
$$\lim_{m\to\infty}(u_m(0), w_i) = (u(0), w_i).$$

Sendo $u_m(0) = u_{0m}$ convergente fortemente para u_0 em H, resulta que $(u_m(0), w_i)$ converge também para (u_0, w_i) para todo i. Comparando com (4.73) conclui-se que $u(0) = u_0$, completando a demonstração do Teorema 1.

Apêndice I

No presente apêndice demonstrar-se-á um teorema de compacidade usado na demonstração do teorema de existência do sistema de Navier-Stokes. Consulte-se Aubin [1], Lions [6].

Considere-se $1 < p_i < +\infty$, $i = 1, 2$ e $B_0 \subset B \subset B_1$ espaços de Banach reflexivos sendo as injeções contínuas e $B_0 \subset B$ compacta. Para $0 < T < \infty$, seja

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\}$$

munido da norma:

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^{p_1}}.$$

Resulta que W é um espaço de Banach sendo W continuamente imerso em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Teorema 2. Com as hipóteses acima sobre $B_0 \subset B \subset B_1$, $0 < p_1 < +\infty$, $i = 1, 2$, resulta ser compacta a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Lema 1. Sendo $B_0 \subset B \subset B_1$ nas condições anteriores, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon)$ tal que

(4.74) $$\|u\|_B \leq \varepsilon \|u\|_{B_0} + c(\varepsilon) \|u\|_{B_1}$$

para todo $u \in B_0$.

Demonstração: Suponha falsa a conclusão do Lema 1. Resulta que para algum $\varepsilon > 0$ existe um vetor $u_n \in B$ tal que

(4.75) $$\|u_n\|_B > \varepsilon \|u_n\|_{B_0} + n \|u_n\|_{B_1}.$$

Sendo $u_n \neq 0$, faz sentido considerar

(4.76) $$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{B_0}}.$$

De (4.76) modifica-se (4.75) obtendo-se

$$\|w_n\|_B = \frac{\|u_n\|_B}{\|u_n\|_{B_0}} > \varepsilon + n \frac{\|u_n\|_{B_1}}{\|u_n\|_{B_0}}$$

ou

$$\|w_n\|_B > \varepsilon + n \|w_n\|_{B_1} \;. \tag{4.77}$$

Tem-se a continuidade de $B_0 \subset B$:

$$\|w_n\|_B = \frac{\|u_n\|_B}{\|u_n\|_{B_0}} \leq C. \tag{4.78}$$

De (4.77) e (4.78) resulta

$$\frac{\varepsilon}{n} + \|w_n\|_{B_1} < \frac{\|w_n\|_B}{n} < \frac{C}{n} \,,$$

da qual resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{B_1} = 0. \tag{4.79}$$

Sendo B_0 reflexivo e de (4.76) $\|w_n\|_{B_0} = 1$, conclui-se que existe uma subsucessão de (w_n) que converge fraco em B_0 e sendo $B_0 \subset B$ compacta, existe uma subsucessão (w_ν) que converge forte em B para um vetor w. Da continuidade de $B_1 \subset B$, juntamente com (4.79) resulta que (w_ν) converge forte para zero em B. Logo $w = 0$, o que é contraditório, porque $\|w_\nu\|_B > \varepsilon > 0$. Conclui-se a validade do Lema 1.

Demonstração do Teorema 2

Dever-se-á demonstrar que de toda sucessão (v_n) limitada em W, pode-se extrair uma subsucessão, ainda representada por (v_n), fortemente convergente para v em $L^{p_0}(0,T;B)$. A demonstração será feita no caso $v=0$, sem perda de generalidade.

Do Lema 1, para cada $\varepsilon>0$ existe $c(\varepsilon)>0$ tal que

$$\|v_n(t)\|_B \leq \varepsilon\,\|v_n(t)\|_{B_0} + c(\varepsilon)\,\|v_n(t)\|_{B_1}$$

pois $v_n \in W$. Tomando-se a norma $L^{p_0}(0,T)$ de ambos os membros, obtém-se que para cada $\eta>0$ existe $d(\eta)>0$ tal que

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq \eta\,\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + d(\eta)\,\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)}\ . \tag{4.80}$$

Sendo (v_n) limitada em W, obtém-se

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \leq \|v_n\|_W < C.$$

Logo, de (4.80), obtém-se

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq c\eta + d(\eta)\,\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)}\ . \tag{4.81}$$

Sendo W reflexivo, pois os B_i o são, resulta que da sucessão (v_n) extrai-se uma subsucessão (v_n) tal que $v_n \to 0$ fracamente em W. De (4.81) e da arbitrariedade do $\eta>0$, para demonstrar-se que (v_n) converge forte em $L^{p_0}(0,t;B)$, o que implica a injeção compacta de W neste espaço, é suficiente verificar-se que (v_n) converge para zero forte em $L^{p_0}(0,T;B_1)$.

De fato, tem-se que a injeção de W em $C^0([0,T];B_1)$ é contínua Lions-Magenes [8]. Logo,

$$\|v_n(s)\|_{B_1} \leq \|v_n\|_{C^0([0,T];B_1)} \leq C_0\,\|v_n\|_W < K, \tag{4.82}$$

sendo K constante, porque (v_n) é limitada em W.

Se demonstrarmos que $\|v_n(s)\|_{B_1}$ converge para zero quase sempre em $(0,T)$, obtém-se de (4.82) que $\|v_n(s)\|_{B_1}^{p_0}$ é limitada e $\|v_n(s)\|_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $(0,T)$. Logo o teorema da convergência dominada de Lebesgue, garante que $\|v_n\|_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $L(0,T)$, isto é (v_n) converge para zero em $L^{p_0}(0,T;B_1)$. Retornando a (4.81) conclui-se que (v_n) converge para zero em $L^{p_0}(0,T;B)$ provando a compacidade da imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Portanto, resta apenas demonstrar que $\|v(s)\|_{B_1}$ converge para zero em $(0,T)$. Limitar-se-á ao ponto $s=0$. De fato, seja w_n definida por

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \quad \lambda > 0 \quad \text{a fixar.}$$

Obtém-se

$$w_n(0) = v_n(0)$$

$$\|w_n(t)\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \leq C_1 \lambda^{-\frac{1}{p_0}}$$

$$\|w_n'(t)\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)} \leq C_2 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}}.$$

Seja $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ sendo $\theta(0) = -1, \ \ \theta(T) = 0$. Tem-se:

$$w_n(0) = \int_0^T (\theta w_n)'\, dt = \int_0^T \theta w_n'\, dt + \int_0^T \theta' w_n\, dt = \beta_n + \gamma_n$$

isto é,

$$w_n(0) = \beta_n + \gamma_n\, .$$

Resulta que

$$\|w_n(0)\|_{B_1} \leq \|\beta_n\|_{B_1} + \|\gamma_n\|_{B_1} \leq C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} + \|\gamma_n\|_{B_1}\ .$$

Para cada $\varepsilon > 0$, considere-se $\lambda > 0$ tal que $C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} < \varepsilon/2$. Resulta que

$$v_n(0) = w_n(0) \quad \text{converge para zero em } B_1 \text{ forte,}$$

se demonstrar-se que

$$\|\gamma_n\|_{B_1} \quad \text{converge para zero,}$$

isto é, se γ_n converge para zero em B_1 forte.

De fato, tem-se v_n converge para zero em W fraco. Sendo $W \subset L^{p_0}(0,T;B_0)$ resulta que v_n converge para zero em $L^{p_0}(0,T;B_0)$ fraco. Logo, para $\lambda > 0$ fixo, resulta que w_n converge para zero fracamente em $L^{p_0}(0,T;B_0)$. Seja

$$\gamma_n = \int_0^T \theta' w_n \, dt, \text{ integral em } B_0\,, \;\; \gamma_n \in B_0\,.$$

Para toda $\psi \in B_0'$, dual de B_0, tem-se

$$\psi(\gamma_n) = \int_0^T \theta' \gamma(w_n) \, dt,$$

que converge para zero. Logo γ_n converge para zero em B_0 fraco. Sendo $B_0 \subset B$ compacta, resulta que γ_n converge para zero em B forte, o que completa a demonstração. Note que resta apenas o cuidado de tomar subsucessões.

4.4 Sistema de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^n$ com $n \leq 4$

Considere-se o sistema de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ com }, \; i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.83}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{4.84}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma \tag{4.85}$$

$$u(x, 0) = 0. \tag{4.86}$$

Note-se que Γ é a fronteira de Ω, aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $Q = \Omega \times (0, t)$, $T > 0$, com fronteira lateral Σ.

Embora tenha sido feita a formulação fraca no caso $\mathbb{R}^2$, será reencontrada aqui para efeitos de auto suficiência. A notação usada é a fixada nos parágrafos anteriores.

Supondo-se os cálculos a seguir válidos, multiplique-se ambos os membros de (4.83) por v_i, com $v \in \mathcal{V}$ e integre-se em Ω. Obtém-se

$$\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} v_i \, dx - \nu \int_\Omega \Delta u_i v_i \, dx + \sum_j \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx =$$
$$= \int_\Omega f_i v_i \, dx - \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \, dx.$$

Aplicando-se a fórmula de Green e usando-se o Lema de Gauss, obtém-se

$$\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} v_i \, dx + \nu \sum_j \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx + \sum_j \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx =$$
$$= \int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_\Omega p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx$$

pois $v_i = 0$ em Γ. Somando-se em i, sendo $v = 0$, resulta

$$\begin{aligned} &\sum_i \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} v_i \, dx + \nu \sum_i \sum_j \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx + \\ &+ \sum_i \sum_j \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx = \sum_i \int_\Omega f_i v_i \, dx. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Com a notação já fixada nos parágrafos anteriores, a equação (4.87) toma a forma:

$$(u'(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \tag{4.88}$$

para todo v em V.

Daí são formulados os dois problemas seguintes.

Problema 1. Encontrar um vetor $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t))$ sendo $u_i \colon Q \to \mathbb{R}$ e uma função numérica $p \colon Q \to \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q) \tag{4.89}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{div } u = 0 \tag{4.90}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma \tag{4.91}$$

$$u(x, 0) = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{4.92}$$

Os vetores f e u_0 são conhecidos em $L^2(0,T;V')$ e H respectivamente.

Problema 2. Dados $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$, encontrar um vetor u tal que

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{4.93}$$

$$(u'(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) + (f(t), v) \tag{4.94}$$

para todo $v \in V$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

$$\text{div } u = 0 \tag{4.95}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma \tag{4.96}$$

$$u(x, 0) = u_0 \,. \tag{4.97}$$

Como no caso do $\mathbb{R}^2$, com certa regularidade sobre Ω, demonstra-se que os dois problemas anteriores são equivalentes. Há uma demonstração de equivalência para Ω gerais, baseada no teorema de De Rham, como em Lions [6], Temam [9]. Neste parágrafo será estudado o Problema 2 no $\mathbb{R}^2$, com $n \leq 4$. Antes será relembrado o teorema de imersão de Sobolev.

De fato, tem-se $H_0^1(\Omega)$ continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \tag{4.98}$$

quando $n > 2$. Se $n = 2$, a imersão contínua é feita em $L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$. Note-se que para $n \geq 5$ a imersão faz-se em $L^{2n/(n-2)}(\Omega)$, e para $n = 3$ ou 4 em $L^6(\Omega)$ e $L^4(\Omega)$.

Continuidade de $b(u,v,w)$ em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$.

O espaço $V \cap (L^n(\Omega))^n$ é dotado da norma

$$v \longmapsto \left(\|v\|^2 + \|v\|^2_{(L^n(\Omega))^n} \right)^{1/2}.$$

Considere-se $u \in V$, $v \in V$ e $w \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Tem-se $u_i \in H_0^1(\Omega)$ e $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$. Do teorema de imersão de Sobolev, $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ com q dado por (4.87), se $n > 2$. Resulta que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$$

e $u_i \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, $w_i \in L^n(\Omega)$. Portanto, da desigualdade de Hölder, obtém-se

$$\begin{aligned} |b(u,v,w)| &\leq \sum_i \sum_j \int_\Omega |u_j| \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| |w_i| \, dx \leq \\ &\leq \sum_i \sum_j \|u_j\|_{L^q(\Omega)} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)} . \end{aligned}$$

Da continuidade da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, obtém-se

$$|b(u,v,w)| \leq C \sum_i \sum_j \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)} .$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy discreta relativamente ao índice j, obtém-se

$$|b(u,v,w)| \leq C \sum_i \left(\sum_j \|u_j\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_j \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \|w_i\|_{L^n(\Omega)} . \tag{4.99}$$

Da desigualdade de Poincaré, resulta que

$$\left(\sum_j \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} = \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

Portanto, a (4.99) toma a forma seguinte:

$$|b(u,v,w)| \leq C_1 \|u\|_V \sum_i \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)} .$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy, obtém-se

$$|b(u,v,w)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V \|w\|_{(L^n(\Omega))^n} \,. \tag{4.100}$$

Daí resulta a continuidade em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$.

Note-se que para $n \leq 4$, encontra-se $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$, devido ao teorema de imersão de Sobolev. Conclui-se de (4.100) que a forma $b(u,v,w)$ é contínua em $V \times V \times V$ quando $n \leq 4$. Daqui até o final deste parágrafo, será suposto $n \leq 4$.

Fixado u em V, resulta que a aplicação

$$v \longmapsto b(u,u,v)$$

de V em R, é uma forma linear contínua em V. Logo fica bem definido um operador linear limitado Bu de V em V'. No caso $n = 2$ representamos por $B(u,u)$ este operador. Ele é definido por

$$(Bu, v) = b(u,u,v).$$

Sendo

$$|(Bu,v)| = |b(u,u,v)| \leq C_1 \|u\|^2 \|v\| \,,$$

isto é,

$$\|Bu\|_{V'} \leq C_1 \|u\|^2 . \tag{4.101}$$

Supondo-se $u \in L^2(0,T;V)$, tem-se que $\|Bu(t)\|_{V'}$ é mensurável e de (4.101) conclui-se que $\|Bu(t)\|_{V'}$ pertence a $L^1(0,T)$. Conclui-se então:

$$\text{Se} \quad u \in L^2(0,T;V) \quad \text{tem-se} \quad Bu \in L^1(0,T;V'). \tag{4.102}$$

Teorema 3. Supõe-se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado, com $n \leq 4$. Dados

$$f \in L^2(0,T;V'), \quad u_0 \in H, \tag{4.103}$$

existe

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{4.104}$$

tal que

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \nu((u(t),v)) + b(u(t),u(t),v) = (f(t),v) \tag{4.105}$$

para todo $v \in V$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

$$u(0) = u_0\,. \tag{4.106}$$

Observação 5. Supondo-se (4.105) válida, obtém-se

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) = -\langle f - \nu A - Bu, v\rangle$$

para todo $v \in V$. Tem-se $f - \nu A - Bu \in V'$ e portanto $f - \nu A - Bu \in L^1(0,T;V')$. Resulta daí que u é fracamente contínua de $[0,T]$ com valores em V e em H. Note-se que $V \subset H = H' \subset V'$. Logo, faz sentido calcular $u(0)$.

Demonstração: Sendo V separável existe em V uma base Hilbertiana (w_ν). Represente-se por V_m o subespaço gerado pelos vetores $w_1, w_2, \ldots, w_m$ para $m = 1, 2, \ldots$. Sendo $u_0 \in H$ e V denso em H, u_0 pode ser aproximado por vetores w_ν. Considera-se o seguinte problema aproximado: encontrar u_m em V_m tal que

$$(u_m'(t),v) + \nu((u_m(t),v)) + b(u_m(t),u_m(t),v) = (f(t),v) \tag{4.107}$$

para todo $v \in V_m$, com a condição inicial:

$$u_m(0) = u_{0m}\,, \text{sendo } u_{0m} \text{ convergente para } u_0 \text{ em } H. \tag{4.108}$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (4.107) com condições iniciais (4.108), possui uma solução em $[0, t_m)$. O prolongamento ao intervalo $[0,T)$ é conseqüência das estimativas a priori que vêm a seguir.

Estimativa a priori I

Considerando-se em (4.107) $v = u_m$, sendo $b(u_m, u_m, u_m) = 0$, resulta

$$\frac{d}{dt}\,|u_m(t)|^2 + 2\nu\,\|u_m(t)\|^2 \leq 2\,\|f\|_{V'}\,\|u_m(t)\|$$

ou

$$\frac{d}{dt}\,|u_m(t)|^2 + 2\nu\|u_m(t)\|^2 \leq \nu\,\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{\nu}\,\|f(t)\|_{V'}\,.$$

Daí obtém-se

(4.109) $$\frac{d}{dt}\,|u_m(t)|^2 + \nu\,\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\,\|f(t)\|^2_{V'}\,.$$

Integrando-se de 0 a $t < t_m$,

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu}\,\|f(t)\|^2_{V'}$$

obtém-se

(4.110) $$|u_m(t)|^2 \leq |u_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T |f(s)|^2_{V'}\,ds,$$

mostrando que $|u_m(t)|$ é uniformemente limitada em $[0, t_m)$, do que resulta o prolongamento ao intervalo $[0, T)$. Retornando a (4.110) e integrando-se a (4.109) de 0 a T, conclui-se que

$$\begin{aligned} &u_m \quad \text{pertence a um limitado de} \quad L^\infty(0, T; H)\\ &u_m \quad \text{pertence a um limitado de} \quad L^2(0, T; V) \end{aligned}$$

Note-se que as duas conclusões acima não permitem passar ao limite na equação aproximada, pois ambas dão origem a convergências fracas, nada sendo possível concluir quanto ao limite do termo não linear. Para sobrepor-se a esta dificuldade, usa-se um teorema de imersão compacta para obter-se uma convergência forte, o que permite passar o limite no termo não linear $b(u_m(t), u_m(t), v)$. O teorema mencionado encontra-se no Apêndice II, o qual envolve a derivada fracionária de $u_m(t)$. Os detalhes serão feitos a seguir.

Estimativa a priori II

Deseja-se limitar $D_t^\gamma u_m(t)$, sendo $0 < \gamma < 1/4$. Do Apêndice II, sabe-se que $D_t^\gamma u_m(t)$ é a transformada de Fourier inversa de $(2\pi i\tau)^\gamma \hat{u}_m(\tau)$, isto é, $\widehat{D_t^\gamma u_m(t)} = (2\pi i\tau)^\gamma \hat{u}_m(\tau)$, supondo-se $u_m(t)$ estendida à $\mathbb{R}$. Portanto, para limitar $D_t^\gamma u_m(t)$ em $L^2(R, H)$ é suficiente limitar $(2\pi i\tau)^\gamma \hat{u}_m(\tau)$ em $L^2(R, H)$, isto é, mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_m(\tau)|^2 \, d\tau, \quad \text{para} \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4},$$

é limitada. Note que $|\hat{u}_m(\tau)|$ é a norma em H.

Com o objetivo de encontrar tal estimativa, escreve-se a equação aproximada (4.107) sob a forma seguinte

$$\frac{d}{dt}(u_m(t), v) + \nu((u_m(t), v)) + (Bu_m(t), v) = (f(t), v) \tag{4.111}$$

para v em V_m. Represente-se por $\tilde{g}$ a extensão nula fora de $(0, T)$ de uma função g definida em $(0, T)$. A transformada de Fourier de $\tilde{g}(t)$ representa-se por $\hat{g}(\tau)$ em vez de $\hat{\tilde{g}}$. Estendendo-se $u_m(t)$ à reta R, notando-se que $u_m(t)$ está definida em $(0, T)$, encontra-se

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\tilde{u}_m(t), v) + \nu((\tilde{u}_m(t), v)) + (B\tilde{u}_m(t), v) = \\ &= (\tilde{f}(t), v) + (u_{0m}, v)\delta_0 - (u_m(T), v)\delta_T\,. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Considerando-se a transformada de Fourier, relativamente a t, de ambos os membros de (4.112), obtém-se

$$\begin{aligned} &2\pi i\tau(\hat{u}_m(\tau), v) + \nu((\hat{u}_m(\tau), v)) + (B\hat{u}_m(\tau), v) = \\ &= (\hat{f}(\tau), v) + (u_{0m}, v) - (u_m(T), v)e^{-2\pi i\tau T}. \end{aligned} \tag{4.113}$$

Note-se que $\hat{\delta}_a(\tau) = e^{-2\pi i\tau a}$ logo $\hat{\delta}_0(\tau) = 1$ e $\hat{\delta}_T(\tau) = e^{-2\pi i\tau T}$.

Sendo $\hat{u}_m(\tau) \in V_m$, é lícito tomar $v = \hat{u}_m(\tau)$ em (4.113), obtendo-se

$$\begin{aligned} &2\pi i\tau\,|\hat{u}_m(\tau)|^2 + \nu\,\|\hat{u}_m(\tau)\|^2 + (B\hat{u}_m(\tau), \hat{u}_m(\tau)) = \\ &= (\hat{f}(\tau), \hat{u}_m(\tau)) + (u_{0m}, \hat{u}_m(\tau)) - (u_m(T), \hat{u}_m(\tau))e^{-2\pi i\tau T}. \end{aligned} \tag{4.114}$$

Considerando-se a parte imaginária de (4.114) e a seguir o valor absoluto, encontra-se

$$\begin{aligned}2\pi|\tau|\,|\hat{u}_m(\tau)|^2 \leq |(B\hat{u}_m(t), \hat{u}_m(t))| + \left|(\hat{f}(\tau), \hat{u}_m(\tau))\right| + \\ + |(u_{0m}, \hat{u}_m(\tau))| + |(u_m(T), \hat{u}_m(\tau))|\,.\end{aligned} \tag{4.115}$$

Observação 6. Demonstrou-se que

$$\|B\hat{u}_m(\tau)\|_{V'} \leq C\,\|\hat{u}_m(\tau)\|^2.$$

Tem-se

$$\hat{u}_m(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_m(t)e^{-2\pi i\tau t}\,dt = \int_0^T u_m(t)e^{-2\pi i\tau t}\,dt.$$

Resulta daí, que

$$\|\hat{u}_m(t)\|^2 \leq \left(\int_0^T \|u_m(t)\|\,dt\right)^2 \leq T\int_0^T \|u_m(t)\|^2\,dt. \tag{4.116}$$

Demonstrou-se que u_m pertence a um conjunto limitado de $L^2(0,T;V)$, resultando de (4.116) que $\|B\hat{u}_m(\tau)\|_{V'} < C$ independente de m.

Retornando-se à igualdade (4.115), em face da Observação 5, obtém-se

$$|\tau|\,|\hat{u}_m(\tau)|^2 \leq C\,\|\hat{u}_m(\tau)\| + \left\|\hat{f}(\tau)\right\|_{V'}\,\|\hat{u}_m(\tau)\|\,, \tag{4.117}$$

observando-se que $|\hat{u}_m(\tau)|$ norma em H é dominada por $\|\hat{u}(\tau)\|$ norma em V.

O objetivo a alcançar é provar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}\,|\hat{u}_m(\tau)|^2\,d\tau < \text{ constante} \tag{4.118}$$

para $0 < \gamma < \dfrac{1}{4}$. De posse de (4.117) e da desigualdade

$$|\tau|^{2\gamma}(1 + |\tau|^{1-2\gamma}) \leq k(\gamma)(1 + |\tau|), \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4}\,,$$

provar-se-á que (4.118) é válida.

De fato,

$$|\tau|^{2\gamma}|\hat{u}_m(\tau)|^2 \leq k\,\frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}}\,|\hat{u}_m(\tau)|^2 \leq k\,\frac{|\hat{u}_m(\tau)|^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} + \frac{|\tau|\,|\hat{u}_m(\tau)|^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}}\,.$$

A última parcela do membro da direita desta última desigualdade, é dominada por meio de (4.117). Resulta que para obter-se a estimativa (4.118), é suficiente dominar as seguintes integrais:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau|\,|\hat{u}_m(\tau)|^2}{|\tau|\,(1+|\tau|^{1-2\gamma})}\,d\tau\,; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{u}_m(\tau)\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\,d\tau$$

e

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{f}(\tau)\|_{V''}\,\|\hat{u}_m(\tau)\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\,d\tau.$$

Por meio da desigualdade de Schwarz reduz ao cálculo de integrais do tipo

$$\int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2} \quad \text{com} \quad 0<\gamma<\frac{1}{4}\cdot$$

Calcula-se em $0 \leq \tau \leq 1$ que existe por continuidade e a seguir em $1 \leq \tau \leq \eta$, tomando limite quando $\eta \to \infty$ que existe porque $(1+|\zeta|^{1-2\gamma})^2 > |\zeta|^{2(1-2\gamma)}$ e $0<\gamma<\dfrac{1}{4}\cdot$ Observar sempre a desigualdade (4.117).

Note-se que para $0<\gamma<\dfrac{1}{4}$, então $\alpha = 1-2\gamma > \dfrac{1}{2}\cdot$ Resulta daí que a função $1/(1+|\tau|^{\alpha})$ pertence a $L^2(\mathbb{R})$. Sendo $1+|\tau|^{1-2\gamma} > 1$ e u_m pertencente a um limitado de $L^{\infty}(0,T;H)$, resulta do teorema de Plancherel que I_1 é finita.

Tem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{u}_m(\tau)\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\,d\tau \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\tau|^{1-2\gamma})^{-2} d\tau\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{u}_m(\tau)\|^2\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Sendo $(1+|\tau|^{1-2\gamma})^{-1}$ pertencente a $L^2(R)$ e u_m pertencente a um limitado de $L^2(0,T;V)$, conclui-se, pelo mesmo argumento acima, que I_2 e finita. Note que

$$I_3 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\hat{f}(\tau)\right\|_{V'}\,\|u_m(\tau)\|\,d\tau$$

é limitada.

Conclui-se, portanto, que (4.118) é válida, isto é, $|\tau|\,|\hat{u}_m(\tau)|$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$, isto é, $D_t^{\gamma} u_m(t)$ pertence a um limitado de $L^2(\mathbb{R}, H)$.

No teorema de compacidade existente no Apêndice II, tomando-se $B_0 = V$, $B_1 = B = H$, resulta que o espaço das restrições de $H^{\gamma}(R; V, H)$ ao intervalo $(0,T)$ é compactamente imerso em $L^2(0,T;H)$, se $0 < \gamma < \dfrac{1}{4}$. Conclui-se que existe uma subsucessão de u_m, pertencente a $H_K^\gamma(R,V,H)$, $K = (0,T)$, ainda representada por u_m, tal que

$$u_m \quad \text{converge para } u \text{ fortemente em } L^2(0,T;H). \tag{4.119}$$

Resumindo, encontrou-se uma subsucessão u_m satisfazendo às seguintes condições:

- u_m converge para u em $L^2(0,T;V)$ fraco
- u_m converge para u em $L^\infty(0,T;H)$ fraco
- u_m converge para u em $L^2(0,T;H)$ forte

A segunda e terceira convergências permitem concluir a convergência do termo não linear.

Para passar ao limite na equação aproximada, considere-se θ em $C^1([0,T])$, tal que $\theta(T) = 0$. Multiplique-se a equação aproximada por θ, integre-se de 0 a T. Obtém-se

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)\,dt + \nu\int_0^T ((u_m(t),v))\theta(t)\,dt + \\ + \int_0^T b(u_m(t),u_m(t),v)\theta(t)\,dt = (u_{0m},v)\theta(0) + \int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Observação 7. O termo não linear pode ser modificado de modo a ser possível passar o limite. De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^T b(u_m,u_m,\theta v)\,dt = -\int_0^T b(u_m,\theta v,u_m)\,dt = \\ = -\sum_{ij}\int_0^T\int_\Omega u_{mj}\,\frac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j}\,u_{mi}\,dxdt, \end{aligned}$$

Fazendo-se $\chi_m^{ij} = \dfrac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j}\,u_{mi}$, tem-se que quando $m \to \infty$ ele converge forte para $\chi^{ij} = \dfrac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j}\,u_i$ em $L^2(0,T;H)$ forte. O termo u_{mj} converge fraco para u_j em $L^2(0,T;H)$. Logo

$$\int_0^T\int_\Omega u_{mj}\,\frac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j}\,u_{mi}\,dxdt \quad \text{converge para} \quad \int_0^T\int_\Omega u_j\,\frac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j}\,u_i\,dxdt.$$

Tem-se, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T b(u_m, u_m, v)\theta \, dt = - \lim_{m\to\infty} \int_0^T b(u_m, \theta v, u_m) \, dt =$$

$$= - \int_0^T b(u_m, \theta v, u_m) \, dt = \int_0^T b(u_m, u_m, v)\theta \, dt.$$

Da Observação 7, passando-se ao limite, encontra-se:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u(t), v)\theta'(t) \, dt + \nu \int_0^T ((u(t), v))\theta(t) \, dt + \\ & + \int_0^T b(u(t), u(t), v)\theta(t) \, dt = (u_0, v)\theta(0) + \int_0^T (f(t), v)\theta(t) \, dt \end{aligned} \tag{4.121}$$

para todo v em V_{m_0}, $m_0 < m$. Sendo as combinações lineares finitas dos (w_ν) densas em V, resulta que a equação (4.121) é válida para todo $v \in V$ e θ em $C^1([0,T])$. Tomando-se $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, (4.121) implica ser $u(t)$ solução fraca do sistema de Navier-Stokes. De (4.121) deduz-se também, com $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$, que $u(0) = u_0$ no sentido de V'.

Apêndice II

Demonstrar-se-á no presente apêndice, um resultado de compacidade devido a Lions, em espaços de Sobolev de ordem fracionária de funções vetoriais, caracterizado pela derivada de ordem fracionária.

Considere-se os espaços de Hilbert $B_0 \subset B \subset B_1$ sendo as injeções contínuas e a injeção $B_0 \subset B$ compacta. Para uma função v de $\mathbb{R}$ em B_1, sua transformada de Fourier $\hat{v}$ é representada por

$$\hat{v}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\tau t} v(t)\, dt$$

cuja transformada inversa é dada por

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\tau t} \hat{v}(\tau)\, d\tau.$$

Seja n um número natural e D_t^n o símbolo de derivação de ordem n em relação a t. Derivando-se formalmente, encontra-se

$$D_t^n v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi i\tau)^n e^{2\pi i\tau t} \hat{v}(\tau)\, d\tau.$$

Com esta motivação em mente, quando γ for um número real, define-se a derivada fracionária D_t^γ de ordem γ de $v(t)$, como sendo a transformada inversa de $(2\pi i\tau)^\gamma \hat{v}(\tau)$, isto é,

$$\widehat{D_t^\gamma v(t)} = (2\pi i\tau)^\gamma \hat{v}(\tau) \tag{4.122}$$

por definição.

Para $\gamma > 0$, define-se

$$H^\gamma(R; B_0, B_1) = \left\{ v \in L^2(R, B_0),\ |\tau|^\gamma\ \hat{v}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}, B_1) \right\}$$

com a norma

$$\|v\|^2_{H^\gamma(\mathbb{R},B_0,B_1)} = \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R},B_0)} + \|\, |\tau|^\gamma\ \hat{v}(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R},B_1)}\ .$$

Resulta, desta definição, que $H^\gamma(\mathbb{R}, B_0, B_1)$ é um espaço de Hilbert.

Dado $K \subset \mathbb{R}$, represente-se por H^γ_K o subespaço de H^γ constituido pels funções u de H^γ com suporte contido em K.

Teorema 4. Supondo-se $B_0 \subset B \subset B_1$, espaços de Hilbert nas hipóteses fixadas acima, para todo $\gamma > 0$ e qualquer conjunto limitado $K \subset \mathbb{R}$, a injeção de

$$H^\gamma_K(\mathbb{R}; B_0, B_1) \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}, B)$$

é compacta.

Demonstração: Deve demonstrar-se que toda sucessão (u_m) limitada em $H^\gamma_K(\mathbb{R}; B_0, B_1)$ possui uma subsucessão, ainda representada por (u_m) que converge fortemente em $L^2(\mathbb{R}, B)$.

Note-se que sendo $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$ um espaço de Hilbert, deduz-se que (u_m) possui uma subsucessão (u_m) fracamente convergente para u pertencente a $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$. Resulta que $v_m = u_m - u$ é uma sucessão convergente fracamente para zero neste espaço. Daí, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^2(\mathbb{R}; B_0)$$
$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^2(\mathbb{R}; B_1).$$

Para concluir, deve-se demonstrar que (v_m) converge fortemente para zero em $L^2(\mathbb{R}; B)$.

Observação 8. Demonstrou-se no Apêndice I que para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R};B)} \leq \varepsilon \, \|v\|_{L^2(\mathbb{R},B_0)} + c(\varepsilon) \, \|v\|_{L^2(\mathbb{R};B_1)} \, .$$

Da Observação 8, sendo v_m limitada em $L^2(\mathbb{R}; B_0)$, por ser em $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$, conclui-se que para deduzir-se que v_m converge para zero em $L^2(\mathbb{R}; B)$, é suficiente demonstrar-se que v_m converge para zero em $L^2(\mathbb{R}; B_1)$. De fato, nestas condições, da Observação 8 deduzir-se-ia que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R};B)} \leq k\varepsilon,$$

para cada $\varepsilon > 0$, implicando que v_m converge para zero em $L^2(\mathbb{R}; B)$.

Portanto, resta apenas demonstrar que

$$\lim_{m\to\infty} v_m = 0 \quad \text{fortemente em} \quad L^2(\mathbb{R}; B_1),$$

ou seja,

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R};B_1)} = 0.$$

Da identidade de Parseval obtém-se

$$J_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \|v_m(t)\|_{B_1}^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2 \, d\tau.$$

É suficiente demonstrar que $\lim J_m = 0$. Obtém-se

$$\begin{aligned} J_m = & \int_{|\tau|\leq M} \|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2 \, d\tau + \\ & + \int_{|\tau|>M} (1+|\tau|^\gamma)\, \|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2 \, (1+|\tau|^\gamma)^{-1} \leq d\tau \leq \\ & \leq \int_{|\tau|\leq M} \|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2 \, d\tau + \frac{C}{1+M^{2\gamma}}, \end{aligned}$$

de vez que (v_m) é limitada em $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$.

Dado $\varepsilon > 0$ escolhe-se M de modo que

$$\frac{C}{1+M^{2\gamma}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

implicando

$$J_m \leq \int_{|\tau|\leq M} \|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2 \, d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Resta demonstrar que a integral do segundo membro tem limite zero quando m tende para o infinito, o que será feito reduzindo-se ao teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Seja χ a função característica de K. Logo $v_m = \chi\, v_m$ porque v_m possui suporte em K, por hipótese tem-se

$$\hat{v}_m(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \tau t}\, v_m(t)\chi(t)\, dt.$$

Obtém-se

$$\|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1} \leq \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R};B_1)} \|e^{-2\pi i\tau t}\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Sendo $B_0 \subset B \subset B_1$ contínua e v_m limitada em $L^2(\mathbb{R}; B_0)$, resulta que

$$\|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1} < C.$$

Para todo $w \in B_0$ obtém-se

$$(\hat{v}(\tau), w)_{B_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (v_n(t), e^{-2\pi i\tau t} w\,\chi(t)_{B_0}\, dt.$$

Sendo

$$\lim_{m\to\infty} v_m = 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^2(\mathbb{R}; B_0),$$

resulta que

$$\lim_{m\to\infty} (\hat{v}_m(\tau), w)_{B_0} = 0 \quad \text{para todo} \quad w \in B_0\,,$$

isto é,

$$\lim_{m\to\infty} \hat{v}_m(\tau) = 0 \quad \text{fracamente em} \quad B_0\,.$$

Sendo $B_0 \subset B$ compacta, resulta que $\hat{v}_m$ converge para zero forte em B, logo forte em B_1 porque a injeção de B em B_1 é contínua.

Tem-se $\|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1}$ limitada e convergente para zero, logo, pelo teorema da convergência dominada resulta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2\, d\tau$$

converge para zero, completando a demonstração do Teorema 4.

Complementos

1. Soluções Periódicas

Supondo a dimensão $n = 2$, demonstrar-se-á a existência de soluções periódicas para o sistema de Navier-Stokes, por meio do teorema a seguir.

Teorema 1. Suponha f dada em $L^2(0,T;V')$. Então, existe uma função u satisfazendo às condições:

(i) $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$

(ii) $u' \in L^2(0,T;V')$

(iii) $\dfrac{d}{dt}(u(t),v) + \nu a(u(t),v) + b(u(t),u(t),v) = \langle f(t),v\rangle$ para toda $v \in V$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

(iv) $u(0) = u(T)$.

Demonstração: Considera-se o método de Galerkin com a base Hilbertiana (w_i) de vetores próprios com valores próprios (λ_i) correspondentes ao problema espectral

$$((w_i,v)) = \lambda_i(w_i,v) \quad \text{para todo} \quad v \in V,\ \ i = 1,2,\dots$$

O sistema aproximado correspondente é:

$$(u_m'(t),v) + \nu a(u_m(t),v) + b(u_m(t),u_m(t),v) = (f(t),v), \tag{4.123}$$

$u_m(t) \in V_m$, para todo $v \in V_m$.

Sabe-se que (4.123) possui solução qualquer que seja o valor inicial $u_m(0)$ fixado em V_m. O objetivo é provar que entre estas soluções aproximadas existe alguma $u_m(t)$, solução de (4.123), satisfazendo à condição:

$$u_m(0) = u_m(T). \tag{4.124}$$

Para obter uma estimativa, suponha $v = u_m(t)$ em (4.123). Obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu\,\|u_m(t)\|^2 \le \|f\|_{V'}\,\|u_m(t)\|. \tag{4.125}$$

Modificando-se o segundo membro por meio da desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, resulta

$$\frac{d}{dt}\,|u_m(t)|^2 + \nu\,\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\,\|f(t)\|^2_{V'}\,.$$

Represente por C_0 a constante de imersão contínua de V em H, obtém-se da desigualdade anterior:

$$\frac{d}{dt}\,|u_m(t)|^2 + \nu\,C_0^2\,|u_m(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu}\,\|f(t)\|^2_{V'}\,. \tag{4.126}$$

Multiplicando-se ambos os membros de (4.126) por $e^{\nu C_0^2 t}$ e integrando em $[0, t)$, resulta

$$e^{\nu C_0^2 t}\,|u_m(t)|^2 \leq |u_m(0)|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(s)\|^2_{V'}\, e^{\nu C_0^2 s}\,ds \tag{4.127}$$

para todo $0 \leq t \leq T$ onde está definida a solução $u_m(t)$ do sistema aproximado (4.123). De (4.127) obtém-se:

$$|u_m(t)|^2 \leq e^{-\nu C_0^2 t}\,|u_m(0)|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T e^{\nu C_0^2 (s-t)}\,\|f(s)\|^2_{V'}\,ds$$

ou

$$|u_m(t)|^2 \leq \theta(t)\,|u_m(0)|^2 + C$$

para todo $0 \leq t \leq T$, sendo

$$\theta(t) = e^{-\nu C_0^2 t} \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{\nu}\int_0^T e^{\nu C_0^2 (s-t)}\,\|f(s)\|^2_{V'}\,ds.$$

Note que $0 < \theta(t) < 1$.

Portanto,

$$|u_m(T)|^2 \leq \theta\,|u_m(0)|^2 + C \tag{4.128}$$

sendo $\theta = \theta(T)$ constante, $0 < \theta < 1$. Portanto $0 < 1 - \theta < 1$ e $C < \dfrac{C}{1-\theta}$. Seja $R > 0$ tal que $\dfrac{C}{1-\theta} < R^2$.

Escolhe-se o dado inicial $u_m(0) \in V_m$ tal que

$$|u_m(0)| < R. \tag{4.129}$$

Portanto, $C < (1-\theta)R^2$ e, por (4.128)

$$|u_m(T)|^2 \leq \theta R^2 + (1-\theta)R^2 = R^2.$$

Conseqüentemente, obtém-se da escolha (4.129)

$$\text{Se} \quad |u_m(0)| < R \quad \text{então} \quad |u_m(T)| < R. \tag{4.130}$$

Assim, define-se a aplicação $\tau\colon V_m \to V_m$ definida por

$$\tau(u_m(0)) = u_m(T) \tag{4.131}$$

sendo $u_m(t)$ a solução de (4.123) com condição inicial $u_m(0) \in V_m$. O problema da existência de solução periódica, isto é, $u_m(0) = u_m(T)$, reduz-se a provar que $\tau\colon V_m \to V_m$ possui ponto fixo.

Devido a dependência contínua dos dados iniciais para solução de (4.123) resulta a continuidade de τ. Note que τ leva a bola de raio R de V_m na bola de raio R, isto é, $\tau(B_R(0)) \subset B_R(0)$. Resulta do Teorema de Brower que τ possui um ponto fixo $u_{0m} \in B_R(0)$, isto é,

$$\tau(u_{0m}) = u_{0m}\,.$$

Tomando-se u_{0m} como dado inicial em (4.123), isto é, $u_m(0) = u_{0m}$, resulta que a solução u_m de (4.123) é tal que

$$u_m(0) = u_m(T). \tag{4.132}$$

A (4.132) afirma que (4.123) possui uma solução periódica.

Conclui-se que sendo $u_m(0) = u_{0m}$, com $u_{0m} \in B_R(0)$, as estimativas da solução de (4.123) são obtidas como de hábito em $[0,T]$. Portanto, obtém-se subseqüência (u_m) sendo

$$\begin{aligned} &u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco} \quad L^2(0,T;V)\\ &u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco estrela} \quad L^\infty(0,T;H)\\ &u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{fraco} \quad L^2(0,T;V) \end{aligned} \tag{4.133}$$

Segue-se que u é solução de (iii) do Teorema 1.

Para completar a demonstração, resta provar que

$$u(0) = u(T).$$

Note-se que faz sentido calcular u em 0 e T, pois $u \in C^0([0,T]; H)$.

De $(4.133)_1$ resulta

$$\int_0^T (u_m(t), v)\theta'(t)\,dt \to \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)\,dt \tag{4.134}$$

para todo $\theta \in H^1(0,T)$ tal que $\theta(T) = 0$. Analogamente de $(4.133)_3$ obtém-se

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_m(t), v)\theta\,dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), v)\theta\,dt \tag{4.135}$$

para $v \in V$ e $\theta \in H^1(0,T), \quad \theta(T) = 0$.

De (4.134) e (4.135) resulta

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\big[(u_m(t), v)\theta(t)\big]\,dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\big[(u(t), v)\theta(t)\big]\,dt$$

ou

$$(u_m(0), v) \to (u(0), v) \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{4.136}$$

Escolhendo-se θ conveniente, $\theta(0) = 0$, obtém-se

$$(u_m(T), v) \to (u(T), v) \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{4.137}$$

Sendo $u_m(0) = u_m(T)$, de (4.136) e (4.137) resulta que $u(0) = u(T)$. $\square$

2. Sistema de Stokes

O problema a resolver consiste em dada $f \in V'$ encontrar $u \in V$ tal que

$$\left|\begin{aligned} & -\nu\Delta u + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f - p \text{ em } \Omega \\ & \text{div } u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ & u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \end{aligned}\right. \tag{4.138}$$

A formulação fraca, equivalente, consiste em determinar $u \in V$ tal que

$$a(u,v) + b(u,u,v) = (f,v) \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{4.139}$$

Teorema 1. Se $n \leq 4$, existe uma única solução u de (4.139) quando a viscosidade é "grande" ou quando $\|f\|_{V'}$ é "pequena".

Demonstração: Sendo V separável considere-se uma base Hilbertiana (w_i) de V. Seja $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ o espaço vetorial de dimensão m gerado pelos m primeiros vetores da base. Obtém-se o sistema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} u_m \in V_m \\ \\ a(u_m, v) + b(u_m, u_m, v) = (f, v), \\ \\ \text{para todo } v \in V_m \end{array} \right. \tag{4.140}$$

O problema inicial consiste em provar que o sistema (4.140) possui solução u_m em V. Demostra-se, inicialmente, o seguinte lema.

Lema 1. Seja $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que para um $\rho > 0$ se tenha

$$(P(\xi), \xi) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^m \quad \text{com} \quad |\xi| = \rho.$$

Então existe $|\xi| \leq \rho$ tal que $P(\xi) = 0$.

Demonstração: Com $(\xi, \eta) = \sum\limits_i \xi_i \eta_i$ representa-se o produto escalar no $\mathbb{R}^m$ cuja norma induzida é $|\xi|^2 = \sum\limits_i \xi_i^2$.

A demonstração do Lema 1 é feita por redução a uma contradição. De fato, suponha-se que $P(\xi) \neq 0$ em $K = \{\xi \in \mathbb{R}^m;\ |\xi| \leq \rho\}$. Então, a aplicação

$$\xi \longmapsto \frac{-\rho}{|P(\xi)|}\, P(\xi)$$

é contínua de K em K. Assim, do Teorema de Brower, resulta que ela possui um ponto fixo. Logo existe $\xi \in K$ tal que

$$-\frac{\rho}{|P(\xi)|}\, P(\xi) = \xi.$$

Projetando na direção de ξ, obtém-se

$$-(P(\xi),\xi) = \frac{|P(\xi)|}{\rho}(\xi,\xi) \geq 0.$$

Portanto $(P(\xi),\xi) < 0$ em K, contrário à hipótese. □

Retornando ao sistema aproximado (4.140), tem-se $u_m = \sum_{j=1}^{m} \xi_{jm} w_j$ pertencente a V_m e $\xi = (\xi_{jm})_{1\leq j\leq m}$. Pondo $v = w_i$ em (4.140) resulta

$$a(u_m, w_i) + b(u_m, u_m, w_i) = (f, w_i),$$

que é uma função ξ_{jm}. Define-se a aplicação $P\colon V_m \to V_m$ tal que

$$P(\xi) = \eta$$

sendo

$$\eta_i = a(u_m, w_i) + b(u_m, u_m, w_i) - (f, w_i).$$

P é contínua de V_m em V_m.

Tem-se

$$(P(\xi),\xi) = (\eta,\xi) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \xi_{im} = a(u_m, u_m) - (f, u_m).$$

Logo

$$(P(\xi),\xi) \geq \nu \|u_m\|^2 - \|f\|_{V'} \|u_m\|.$$

Considerando-se a bola $\|u_m\| = \rho$, com ρ tal que $\nu\rho \geq \|f\|_{V'}$ obtém-se

$$(P(\xi),\xi) \geq 0 \quad \text{para} \quad |\xi| = \rho.$$

Observação 1. Considere (w_i) ortonormalizado em H. Assim, em V_m as normas são equivalentes e

$$|u_m|^2 = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im}^2 = \xi^2.$$

Portanto conclui-se do Lema 1 que existe $\xi \in V_m$ tal que $P(\xi) = 0$. Mas, $P(\xi) = \eta$, logo $\eta = 0$, isto é, existe $\xi \in V_m$ tal que $u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} w_i$ é solução de

$$a(u_m, w_i) + b(u_m, u_m, w_i) = (f, w_i)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

Estimativas

Tomando-se $\nu = u_m$ na equação aproximada (4.140) obtém-se:

$$\nu \|u_m\|^2 \leq \|f\|_{V'} \|u_m\|,$$

ou

$$\|u_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'} .$$

Logo, u_m é limitada em V. Conseqüentemente existe uma subsucessão u_m tal que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em} \quad V. \tag{4.141}$$

De posse desta subsucessão pode-se passar ao limite em $a(u_m, \nu)$. Para a parte não linear procede-se como no caso de evolução. Tem-se $V \subset H$ contínua e compacta. Daí encontra-se uma subsucessão de u_m que converge forte para u em H e quase sempre em Ω. Portanto, tomando-se o limite na equação aproximada, obtém-se

$$a(u, \nu) + b(u, u, \nu) = (f, \nu)$$

para todo ν em V.

Unicidade ($n \leq 4$). Como foi visto, quando $n \leq 4$ tem-se $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$ e a forma trilinear $b(u, \nu, w)$ é contínua em $V \times V \times V$.

Sejam u e $\hat{u}$ duas soluções dadas pelo Teorema 1. Obtém-se

$$a(u, \nu) + b(u, u, \nu) = (f, \nu)$$

e

$$a(\hat{u}, v) + b(\hat{u}, \hat{u}, v) = (f, v)$$

para todo $v \in V$. Fazendo-se $w = u - \hat{u}$ obtém-se

$$a(w, v) + b(u, u, v) - b(\hat{u}, \hat{u}, v) = 0$$

ou

$$a(w, v) + b(u, w, v) + b(w, u, v) - b(w, w, v) = 0$$

para todo $v \in V$. Fazendo-se $v = w$, obtém-se

$$a(w, w) + b(w, u, w) = 0$$

ou

(4.142) $$\nu \|w\|^2 \leq \|u\| \; \|w\|^2 .$$

Tem-se

$$a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v).$$

Tomando-se $v = u$, obtém-se

$$a(u, v) = (f, v)$$

ou

$$\nu \|u\|^2 \leq \|f\|_{V'} \; \|u\| ,$$

isto é,

(4.143) $$\|u\| \leq \frac{1}{\nu} \; \|f\|_{V'} .$$

Substituindo (4.143) em (4.142) obtém-se

$$\nu \|w\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \; \|f\|_{V'} \; \|w\|^2$$

ou

$$(\nu^2 - \|f\|_{V'}) \, \|w\| \leq 0.$$

Se $\nu^2 > \|f\|_{V'}$, isto é, ν muito grande ou $\|f\|_{V'}$ muito pequeno, obtém-se unicidade para o sistema de Stokes. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] J.P. Aubin, *Un théorème de compacité*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Juin 1963 (5042-5044).

[2] O.A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, N.Y., 1969.

[3] J. Leray, *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux qui limitent des parois*, J. Math. Pures et Appl. t. 13, 1934 (331-418).

[4] J.L. Lions, *Sur l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Mai 1959 (2847-2849).

[5] J.L. Lions, G. Prodi, *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Juin 1959 (3519-3521).

[6] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1959.

[7] J.L. Lions, *Some problems connected with the Navier-Stokes equations*, IV ELAM, Lima, Perú, 1978.

[8] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1*, Dunod, Paris, 1969.

[9] R. Temam, *Navier-Stokes equations - theory and numerical analysis*, North Holland, N.Y., 1979.

[10] L. Tartar, *Topics in nonlinear analysis*, Univ. Paris Sud, Orsay, France, 1978.

Regularização Elítica

L. A. Medeiros F. D. Araruna G. O. Antunes

Instituto de Matemática - UFRJ

IM-UFRJ - Setembro de 2000

Rio de Janeiro - RJ

Introdução

O método de regularização elítica foi idealizado por J. L. Lions [1] para estudar problemas mistos de natureza parabólica.

Deseja-se investigar o seguinte problema: dados $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ e $f : Q \to \mathbb{R}$, encontrar uma única $u : Q \to \mathbb{R}$ solução de

$$(5.1) \qquad \left| \begin{array}{lll} u' - \Delta u = f & \text{em} & Q, \\ u = 0 & \text{em} & \Sigma, \\ u(0) = u_0. & \text{em} & \Omega. \end{array} \right.$$

Existem várias maneiras de resolver este problema, como por exemplo, pelo método de Faedo-Galerkin ou usando teoria de semigrupos. Aqui adotar-se-á o método da regularização elítica, que consiste em considerar (5.1) como limite de uma família de problemas elíticos coercivos em determinado espaço de Hilbert W e aplicar a estes problemas elíticos o Lema de Lax-Milgram.

5.1 Notações e Hipóteses

Considere-se o espaço W definido por

$$W = \left\{ \varphi \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right); \ \varphi' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \text{ and } \varphi(x, T) = 0 \right\}.$$

Observação 1.1. Veja que na definição do W, o cálculo de $\varphi(x, T) = 0$ faz sentido, pois $\varphi \in C^0\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$.

W com a estrutura Hilbertiana dada por

$$\|\varphi\|_W^2 = \int_0^T \|\varphi(t)\|^2 \, dt + \int_0^T |\varphi(t)|^2 \, dt$$

é um espaço de Hilbert separável.

Com o objetivo de motivar o conceito de solução do problema parabólico (5.1), multiplique-se $(5.1)_1$ por $\varphi \in W$ e integre-se em Q. Resulta

$$(5.2) \qquad \int_0^T ((u(t), \varphi(t))) \, dt - \int_0^T (u(t), \varphi'(t)) \, dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle \, dt + (u_0, \varphi(0)).$$

Definição 1.1. Dados $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, a solução do problema (5.1) é uma função $u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ satisfazendo (5.2), para todo $\varphi \in W$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa a dualidade $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Considere-se $b(\cdot,\cdot)$ a forma bilinear definida em W por

$$b(u,\varphi) = \int_0^T ((u(t), \varphi(t)))\, dt - \int_0^T (u(t), \varphi'(t))\, dt$$

e $L(\cdot)$ a forma linear e contínua definida em W dada por

$$L(\varphi) = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)\rangle\, dt + (u_0, \varphi(0)).$$

5.2 Existência e Unicidade de Soluções

Teorema 2.1. Dados $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, existe uma única função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \tag{5.3}$$

satisfazendo

$$b(u,\varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in W. \tag{5.4}$$

Demonstração: A idéia da demonstração é aplicar o Lema de Lax-Milgram, porém ainda não pode-se aplicá-lo, pois apesar da forma $L(\cdot)$ ser linear e contínua, a foma bilinear $b(\cdot,\cdot)$ não é coerciva em W. Para obter-se uma forma bilinear, contínua e coerciva em W, pertuba-se $b(\cdot,\cdot)$ adequadamente. Dado $\epsilon > 0$, define-se $b_\epsilon(\cdot,\cdot)$ da seguinte forma:

$$b_\epsilon(u,\varphi) = b(u,\varphi) + \epsilon\int_0^T (u'(t), \varphi'(t))\, dt, \quad \forall u, \varphi \in W. \tag{5.5}$$

Lema 2.1. A forma bilinear $b_\epsilon(\cdot,\cdot)$ definida por (5.5) é contínua e coerciva em W.

Demonstração: Considere-se $b_\epsilon(\cdot,\cdot)$ definida por (5.5). Assim

$$|b_\epsilon(u,\varphi)| \leq \int_0^T |((u(t), \varphi(t)))|\, dt - \int_0^T |(u(t), \varphi'(t))|\, dt + \epsilon\int_0^T |(u'(t), \varphi'(t))|\, dt.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtém-se

$$|b_\epsilon(u,\varphi)| \le C\,\|u\|_W\,\|\varphi\|_W\,, \quad \forall \epsilon > 0,$$

logo a continuidade.de $b_\epsilon(\cdot,\cdot)$. Para provar a coercividade, considere-se a forma quadrática

$$b_\epsilon(\varphi,\varphi) = b(\varphi,\varphi) + \epsilon \int_0^T |\varphi'(t)|^2\, dt$$

Tem-se

$$b(\varphi,\varphi) = \int_0^T \|\varphi(t)\|^2\, dt - \int_0^T (\varphi(t),\varphi'(t))\, dt = \int_0^T \|\varphi(t)\|^2\, dt + \frac{1}{2}|\varphi(0)|^2,$$

porque $\varphi(T) = 0$.

Substituindo-se em $b_\epsilon(\cdot,\cdot)$, obtém-se

$$b_\epsilon(\varphi,\varphi) \ge C(\epsilon)\,\|\varphi\|_W\,, \quad \forall \epsilon > 0. \quad \blacksquare$$

Desta forma, $b_\epsilon(\cdot,\cdot)$ está nas condições do Teorema de Lax-Milgram, logo, para cada $\epsilon > 0$, existe uma única função $u_\epsilon \in W$ tal que

$$b_\epsilon(u_\epsilon,\varphi) = L(\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in W. \tag{5.6}$$

Agora considere-se em (5.6) $\varphi = u_\epsilon$. Assim

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|u_\epsilon(t)\|^2\, dt - \int_0^T (u_\epsilon(t),u'_\epsilon(t))\, dt + \epsilon\int_0^T |u'_\epsilon(t)|^2\, dt = \\ &= \int_0^T \langle f(t),u_\epsilon(t)\rangle\, dt + (u_0,u_\epsilon(0))\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Tem-se

- $\displaystyle\int_0^T (u_\epsilon(t),u'_\epsilon(t))\, dt = -\frac{1}{2}|u_\epsilon(0)|^2.$
- $\displaystyle\int_0^T \langle f(t),u_\epsilon(t)\rangle\, dt \le \frac{1}{2}\int_0^T \|f(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \|u_\epsilon(t)\|^2\, dt.$
- $\displaystyle|(u_0,u_\epsilon(0))| \le |u_0|^2 + \frac{1}{4}|u_\epsilon(0)|^2.$

Substituindo-se em (5.7), obtém-se

$$\frac{1}{2}\int_0^T \|u_\epsilon(t)\|^2\,dt + \epsilon\int_0^T |u'_\epsilon(t)|^2\,dt + \frac{1}{4}|u_\epsilon(0)|^2 \leq C, \tag{5.8}$$

onde C independe de $\epsilon > 0$. Segue de (5.8) que existe uma subsequência de u_ϵ, que ainda denotada por u_ϵ, tal que

$$u_\epsilon \to u \quad \text{fraco em} \quad L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \tag{5.9}$$

e

$$\sqrt{\epsilon}u'_\epsilon \to \chi \quad \text{fraco em} \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{5.10}$$

Lema 2.2. $\epsilon\int_0^T (u'_\epsilon(t), \varphi'(t))\,dt \to 0$, quando $\epsilon \to 0$, para todo $\varphi \in W$, isto é, $\chi = 0$.

Demonstração: Por (5.10) tem-se que

$$\sqrt{\epsilon}\int_0^T (u'_\epsilon(t), v(t))\,dt \to \int_0^T (\chi(t), v(t))\,dt, \quad \forall v \in L^2(0,T;H).$$

Tomando-se $v = \varphi'$, para qualquer $\varphi \in W$, resulta que

$$\epsilon\int_0^T (u'_\epsilon(t), \varphi'(t))\,dt = \sqrt{\epsilon}\left(\sqrt{\epsilon}\int_0^T (u'_\epsilon(t), \varphi'(t))\,dt\right)$$

converge para zero quando $\epsilon \to 0$. Assim, por (5.9) e (5.10), pode-se passar o limite em (5.6), quando $\epsilon \to 0$, obtendo uma única função u satisfazendo (5.3) e (5.4). Antes de provar o dado inicial, obter-se-á mais informações sobre a solução u de (5.4). Considere-se em (5.4) $\varphi = \theta v \in W$, onde $\theta \in H^1(0,T)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Assim

$$\int_0^T ((u(t), v))\,\theta(t)\,dt - \int_0^T (u(t), v)\,\theta'(t)\,dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle\,\theta(t)\,dt + (u_0, v)\,\theta(0), \tag{5.11}$$

para todo $\theta \in H^1(0,T)$ e $v \in V$. Considerando-se, em particular, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, segue de (5.11) que

$$\int_0^T \left[((u(t), v)) + \frac{d}{dt}(u(t), v) - \langle f(t), v\rangle\right]\theta(t)\,dt = 0,$$

logo, pelo Lema de Du bois Raimond, tem-se que

$$((u(t), v)) + \frac{d}{dt}(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle \text{ em } \mathcal{D}'(0,T), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e, portanto,

$$u' - \Delta u = f \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right).$$

Comof $\in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ e por (5.9) segue que

$$u' - \Delta u = f \quad \text{em} \quad L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right). \tag{5.12}$$

Por (5.12) obtém-se

$$u' \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right).$$

Portanto $u \in C^0([0,T];H)$. Dessa forma faz sentido o cálculo de $u(0)$. Agora prova-se a condição inicial. Por (5.4) e usando integração por partes, obtém-se

$$\begin{aligned} &\int_0^T ((u(t),\varphi(t)))\,dt + \int_0^T \langle u'(t),\varphi(t)\rangle\,dt + (u(0),\varphi(0)) = \\ &= \int_0^T \langle f(t),\varphi(t)\rangle\,dt + (u_0,\varphi(0)), \quad \forall \varphi \in W. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Tomando a dualidade de (5.12) por $\varphi \in W$, tem-se

$$\int_0^T \langle u'(t),\varphi(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t),\varphi(t)\rangle\,dt = \int_0^T \langle f(t),\varphi(t)\rangle\,dt, \quad \forall \varphi \in W.$$

Donde, pela Fórmula de Green

$$\int_0^T \langle u'(t),\varphi(t)\rangle\,dt + \int_0^T ((u(t),\varphi(t)))\,dt = \int_0^T \langle f(t),\varphi(t)\rangle\,dt, \quad \forall \varphi \in W. \tag{5.14}$$

Comparando (5.13) e (5.14), conclui-se que $u(0) = u_0$. Para provar a unicidade é suficiente mostrar que se $u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ é tal que

$$\left| \begin{array}{lll} u' - \Delta u = 0 & \text{em} & L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right), \\ u(0) = 0. & \text{em} & \Omega, \end{array} \right. \tag{5.15}$$

então $u = 0$. De fato, fazendo a dualidade $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ de $(5.15)_1$ com u, segue que

$$\int_0^T \langle u'(t),u(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t),u(t)\rangle\,dt = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\left|u\left(t\right)\right|^2 dt + \int_0^T \left\|u\left(t\right)\right\|^2 dt = 0. \tag{5.16}$$

Usando $(5.15)_2$ em (5.16), obtém-se

$$\frac{1}{2}\left|u\left(T\right)\right|^2 + \int_0^T \left\|u\left(t\right)\right\|^2 dt = 0$$

e, portanto, $u = 0$. ■

Observação 2.1. Todos os resultados desta exposição são válidos quando são considerados os espaços de Hilbert V e H sendo $V \subset H$ contínua e densa e A o operador definido pelo terno $\{V, H; ((\cdot,\cdot))_V\}$.

Referências Bibliográficas

[1] LIONS, J. L., *Équations Différentielles Opérationelles dans les Espaces de Hilbert*, CIME, Varena, 1963.

[2] LIONS, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[3] LIONS, J. L. & MAGENES, E., *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, 1968.

On an Evolution Problem on Manifolds

F. D. Araruna
Departamento de Matemática-UFMA

M. A. F. Araújo
Departamento de Matemática-UFMA

DEMAT-UFMA - Março de 2005
São Luís - MA

Introduction

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ with smooth boundary Γ. We Consider $\{\Gamma_0,\ \Gamma_1\}$ a partition of Γ, with Γ_0 and Γ_1 having positive Lebesgue measure and $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. Let ν be the outward normal to Γ and for $T > 0$ a real number, we consider the cylinder $Q = \Omega \times]0, T[$.

This work is dedicated to solve following nonlinear boundary value problem

$$
(6.1) \qquad \left| \begin{array}{l} -\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u' + |u|^\rho u = f \quad \text{on} \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[\,, \\ u(0) = u_0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \end{array} \right.
$$

where the prime $'$ stands the derivative with respect to t, $\partial u / \partial \nu$ represents the normal derivative of u and ρ is a positive real number satisfying appropriate conditions.

As the solution of system depends on x and t and the equation $(6.1)_1$ does not have temporal derivative of the function u, this system is not of Cauchy-Kovalevsky type.

This problem associated to evolution equation on lateral boundary was studied in [1] and [2], both motivated by the idea applied in Lions ([3], pp. 134), which consists to reduce the problem (6.1) in a model of mathematical physics on the manifolds Σ_1. In this work we use the technical due to Lions ([3], pp. 471), which transforms the system (6.1) in a Cauchy-Kovalevsky type one by means of a suitable perturbations in the equation $(6.1)_1$. The solution of (6.1) is obtained as limit of this perturbed problem.

The contents of this work are as follows: in the Section 6.1 we give some notations and state assumptions. In Section 6.2 we obtain the solution of (6.1) as singular limit of solution of the perturbed system.

6.1 Notations and Assumptions

Let the Hilbert space

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega); \quad v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0 \right\}$$

be equipped with the inner product and norm given respectively by

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right), \qquad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2,$$

where $(\cdot,\cdot)$ and $|\cdot|$ are, respectively, the inner product and norm in $L^2(\Omega)$.

Let us denote by $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_1}$ the inner product of $L^2(\Gamma_1)$ and by $|\cdot|_q$ the norm of $L^q(\Gamma_1)$, $1 \leq q < \infty$.

In (6.1) we assume ρ a real number such that

$$\rho > 0, \quad \text{if} \quad n = 1 \quad \text{or} \quad 0 < \rho \leq \frac{2}{n-1}, \quad \text{if} \quad n > 1. \tag{6.2}$$

By the choice of ρ, we have that the imbedding of $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ in $L^{\rho+2}(\Gamma_1)$ is continuous. Thus, by trace theorem, the function $\gamma_0 : V \longrightarrow L^{\rho+2}(\Gamma_1)$ is also continuous.

6.2 Singular Limit

This section is devoted to obtain the solution of the problem system (6.1) using a method due to Lions [3]. As was said in the introduction, we firstly consider, for each $\epsilon > 0$, the perturbed system

$$\left| \begin{array}{lll} \epsilon u_\epsilon' - \Delta u_\epsilon = 0 & \text{in} & Q, \\ u_\epsilon = 0 & \text{on} & \Gamma_0 \times]0,T[, \\ \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} + u_\epsilon' + |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon = f & \text{on} & \Sigma_1, \\ u_\epsilon(0) = w_0 & \text{in} & \Omega, \end{array} \right. \tag{6.3}$$

where $w_0 = \gamma_0^{-1} u_0 \in V$.

The existence and uniqueness of weak solution of (6.3) is guaranteed by the following result:

Theorem 6.2.1. *Let* ρ *as in* (6.2), $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ *and* $f \in L^q(\Sigma_1)$, $q = (\rho+2)/(\rho+1)$. *Then, for each* $\epsilon > 0$, *there exists a unique function* $u_\epsilon : Q \to \mathbb{R}$ *satisfying*

$$\{u_\epsilon, u_\epsilon'\} \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0,T;V)\right] \times L^q(0,T;V'), \tag{6.4}$$

$$\{u_\epsilon, u_\epsilon'\} \in \left[L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right) \cap L^{\rho+2}(\Sigma_1)\right] \times L^q\left(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right), \tag{6.5}$$

$$\epsilon\frac{d}{dt}(u_\epsilon, v) + ((u_\epsilon, v)) + \frac{d}{dt}(u_\epsilon, v)_{\Gamma_1} + (|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon, v)_{\Gamma_1} = (f, v)_{\Gamma_1}, \ \forall v \in V \tag{6.6}$$

and the initial condition

$$u_\epsilon(\cdot, 0) = w_0 \quad on \quad \Omega. \tag{6.7}$$

Remark 6.2.1. *Note that, given* $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, *there exists* $w_0 \in V$, *because the trace application* $\gamma_0 : V \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ *is surjective.*

Once guaranteed the existence and uniqueness of weak solution of the problem (6.3), we can consider the following relative result to the problem (6.1):

Theorem 6.2.2. *Under the conditions of Theorem 6.2.1, then, as* $\epsilon \to 0$, *the solution* u_ϵ *of system* (6.3) *verifies*

$$u_\epsilon \to u \text{ weakly in } L^2(0,T;V),$$

where u *is the solution of the problem* (6.1).

Proof of Theorem 6.2.1. We employ the Faedo-Galerkin's method. Indeed, let $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ be a Hilbertian basis of V and, for each $m \in \mathbb{N}$, we consider $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ the subspace of V generated by the first m vectors of $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$. Let us find an approximate solution $u_{\epsilon m} \in V_m$ of the type $u_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{j=1}^m g_{j\epsilon m}(t) w_j(x)$, where $g_{j\epsilon m}(t)$ are found as solutions of the initial value problem for the system of ordinary differential equations

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon\left(u_{\epsilon m}'(t), v\right) + \left(\left(u_{\epsilon m}(t), v\right)\right) + \left(u_{\epsilon m}', v\right)_{\Gamma_1} + \left(|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}, v\right)_{\Gamma_1} = (f(t), v)_{\Gamma_1}, \\ \\ u_{\epsilon m}(0) = w_{0m} \to w_0 \text{ strongly in } V. \end{array} \right. \tag{6.8}$$

The system (6.8) has solution on an interval $[0, t_m[$, with $t_m < T$. This solution can be extended to the whole interval $[0, T]$ as a consequence of the a priori estimates that shall be proved in the next step.

Estimates. Making $v = u_{\epsilon m}(t)$ in (6.8), integrating from 0 to $t \le t_m$ and using the Young's inequality we obtain

$$\frac{\epsilon}{2}|u_{\epsilon m}(t)|^2 ds + \int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}|u_{\epsilon m}(t)|_2^2 + \frac{1}{q}\int_0^t |u_{\epsilon m}(s)|_{\rho+2}^{\rho+2} ds \le$$
$$\le \frac{\epsilon}{2}|w_{0m}|^2 + \frac{1}{2}|\gamma_0(w_{0m})|_2^2 + \frac{1}{q}\int_0^T |f(s)|_q^q ds.$$

By the hypotheses about the data, we can assert

$$\frac{\epsilon}{2}|u_{\epsilon m}(t)|^2 ds + \int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}|u_{\epsilon m}(t)|_2^2 + \int_0^t |u_{\epsilon m}(s)|_{\rho+2}^{\rho+2} ds \le C_0, \tag{6.9}$$

where C_0 is a positive constant which is independent of t, ϵ and m. The estimates (6.9) imply that we can prolong the approximate solution $u_{\epsilon m}(t)$ for all t in $[0, T]$. In this way, we conclude

$$\left|\begin{array}{l} (u_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0, T; V), \\ (u_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^\infty\left(0, T; L^2(\Gamma_1)\right) \cap L^{\rho+2}(\Sigma_1), \\ (u_{\epsilon m}(T)) \text{ is bounded in } L^2(\Omega), \\ (u_{\epsilon m}(T)) \text{ is bounded in } L^2(\Gamma_1). \end{array}\right. \tag{6.10}$$

According to $(6.10)_3$, we have

$$(|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^q(\Sigma_1). \tag{6.11}$$

Note that using $(6.8)_1$ we can observe that

$$\langle\{\epsilon u'_{\epsilon m}(t), \gamma_0 u'_{\epsilon m}(t)\}, \{\gamma_0 v, v\}\rangle = (f(t) - |u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}, \gamma_0 v)_{\Gamma_1} - ((u_{\epsilon m}(t), v)),$$

where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ represents the duality between $\left[V' \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right]$ and $\left[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times V\right]$. In this way,

$$\|\{\epsilon u'_{\epsilon m}(t), \gamma_0 u'_{\epsilon m}(t)\}\|_{V' \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \le C_1\left(|f(t) - |u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}|_q + \|u_{\epsilon m}(t)\|\right). \tag{6.12}$$

Therefore, according to hypothesis about f and (6.11) ,it follows by (6.12) that

$$(6.13)\qquad (\{\epsilon u'_{\epsilon m}(t), \gamma_0 u'_{\epsilon m}(t)\}) \text{ is bounded in } L^q\left(0,T;V' \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right).$$

Limit of approximate solutions. Thanks to (6.10), (6.11) and (6.13), there exists a subsequence, still denoted by $(u_{\epsilon m})$, such that

$$(6.14)\qquad \left|\begin{array}{l} u_{\epsilon m} \to u_\epsilon \text{ weak} - * \text{ in } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ u_{\epsilon m} \to u_\epsilon \text{ weakly in } L^2(0,T;V), \\ u_{\epsilon m} \to u_\epsilon \text{ weak} - * \text{ in } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right), \\ u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon \text{ weakly in } L^q(0,T;V'), \\ u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon \text{ weakly in } L^q\left(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right), \\ |u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m} \to \phi \text{ weakly in } L^q(\Sigma_1), \\ u_{\epsilon m}(T) \to \eta \text{ weakly in } L^2(\Omega), \\ u_{\epsilon m}(T) \to \xi \text{ weakly in } L^2(\Gamma_1). \end{array}\right.$$

Using the convergences (6.14) in (6.8) we obtain

$$(6.15)\qquad \epsilon\frac{d}{dt}(u_\epsilon(t),v) + ((u_\epsilon(t),v)) + \frac{d}{dt}(u_\epsilon(t),v)_{\Gamma_1} + (\phi,v)_{\Gamma_1} = (f,v)_{\Gamma_1},\ \forall v \in V.$$

By standard procedure, we show that $u_\epsilon(\cdot,0) = w_0$ and $u_\epsilon(\cdot,T) = \eta$, where $\eta = \gamma_0^{-1}\xi$.

It remains to prove that $\phi = |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon$. Since the function $h(s) = |s|^\rho s$ is increasing monotonic, we have

$$(6.16)\qquad \int_0^T (|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m})_{\Gamma_1}\,dt - \int_0^T (|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}, v)_{\Gamma_1}\,dt - \int_0^T (|v|^\rho v, u_{\epsilon m} - v)_{\Gamma_1}\,dt \geq 0.$$

Putting $v = u_{\epsilon m}(t)$ in (6.8) and integrating from 0 to T, we get

$$(6.17)\qquad \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m})\,dt = \int_0^T (f(t), u_{\epsilon m})_{\Gamma_1}\,dt - \int_0^T \|u_{\epsilon m}(t)\|^2\,dt + \\ \displaystyle+\frac{\epsilon}{2}|w_{0m}|^2 - \frac{\epsilon}{2}|u_{\epsilon m}(T)|^2 + \frac{1}{2}|\gamma_0(w_{0m})|_2^2 - \frac{1}{2}|u_{\epsilon m}(T)|_2^2. \end{array}$$

Substituting (6.17) in (6.16) and according to convergences $(6.8)_2$, $(6.14)_2-(6.14)_5$, we can apply $\lim\limits_{m\to\infty}\inf$ in both of members to obtain

$$\begin{aligned}0\leq&\int_0^T(f(t),u_\epsilon)_{\Gamma_1}\,dt-\int_0^T\|u_\epsilon(t)\|^2\,dt+\frac{\epsilon}{2}|w_0|^2-\frac{\epsilon}{2}|u_\epsilon(T)|^2+\\&+\frac{1}{2}|u_0|_2^2-\frac{1}{2}|u_\epsilon(T)|_2^2-\int_0^T(\varphi,v)_{\Gamma_1}\,dt-\int_0^T(|v|^\rho v,u_\epsilon-v)_{\Gamma_1}\,dt.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Taking $v=u_\epsilon$ in (6.15) and integrating in $[0,T]$, we deduce

$$\begin{aligned}\int_0^T(\varphi,u_\epsilon)_{\Gamma_1}\,dt=&\int_0^T(f(t),u_\epsilon)_{\Gamma_1}\,dt-\int_0^T\|u_\epsilon(t)\|^2\,dt+\\&+\frac{\epsilon}{2}|w_0|^2-\frac{\epsilon}{2}|u_\epsilon(T)|^2+\frac{1}{2}|u_0|_2^2-\frac{1}{2}|u_\epsilon(T)|_2^2.\end{aligned}$$

Substituting the last identity in (6.18) we conclude

$$\int_0^T(\varphi-|v|^\rho v,u_\epsilon-v)_{\Gamma_1}\,dt\geq 0.\tag{6.19}$$

Making in (6.19) $u_\epsilon-v=\lambda w$, $\lambda>0$, we have

$$\int_0^T(\varphi-|u_\epsilon-\lambda w|^\rho(u_\epsilon-\lambda w),w)_{\Gamma_1}\,dt\geq 0.$$

Passing to limit the last inequality, as $\lambda\to 0$, we obtain

$$\int_0^T(\varphi-|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon,w)_{\Gamma_1}\,dt\geq 0.$$

Taking $-w$ in place of w, we get the inequality in inverse sense. In this way, we can conclude that

$$\int_0^T(\varphi-|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon,w)_{\Gamma_1}\,dt=0,\ \forall w\in L^{\rho+2}(\Sigma_1)$$

and, therefore, $\varphi=|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon$.

Uniqueness of solution. To obtain the uniqueness of solution we suppose the existence of two solutions u_ϵ and $\widehat{u}_\epsilon$ in the conditions of Theorem 6.2.1. It follows that $w_\epsilon=u_\epsilon-\widehat{u}_\epsilon$ satisfies

$$w_\epsilon\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2(0,T;V),\tag{6.20}$$

$$w_\epsilon \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right) \cap L^{\rho+2}(\Sigma_1), \tag{6.21}$$

$$\epsilon\frac{d}{dt}(w_\epsilon,v) + ((w_\epsilon,v)) + \frac{d}{dt}(w_\epsilon,v)_{\Gamma_1} + (|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon - |\widehat{u}_\epsilon|^\rho \widehat{u}_\epsilon, v)_{\Gamma_1} = 0,\ \forall v \in V \tag{6.22}$$

and the initial condition

$$w_\epsilon(\cdot,0) = 0 \quad \text{on} \quad \Omega. \tag{6.23}$$

Taking $v = w(t)$ in (6.22), integrating from 0 to $t \leq T$ and using the monotony of the function $h(s) = |s|^\rho s$ we get

$$\frac{\epsilon}{2}|w_\epsilon(t)|^2 + \int_0^t \|w_\epsilon(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}|w_\epsilon(t)|_2^2 \leq 0,$$

this is, $w_\epsilon(t) = 0$, $\forall\ t \in [0,T]$, which prove the uniqueness. ■

Now we can prove to the main result of this work.

Proof of Theorem 6.2.2. Making $v = u_\epsilon(t)$ in (6.6), we proceeded as before (see (6.10), (6.11) and (6.13)) to deduce that

$$\left|\begin{array}{l} (u_\epsilon) \text{ is bounded in } L^2(0,T;V), \\ \left(\sqrt{\epsilon}u_\epsilon\right) \text{ is bounded in } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ (u_\epsilon) \text{ is bounded in } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right) \cap L^{\rho+2}(\Sigma_1), \\ (\epsilon u'_\epsilon) \text{ is bounded in } L^q(0,T;V'), \\ (u'_\epsilon) \text{ is bounded in } L^q\left(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right), \\ (|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon) \text{ is bounded in } L^q(\Sigma_1). \end{array}\right. \tag{6.24}$$

Hence, there exists a subsequence, still denoted by (u_ϵ), such that, as $\epsilon \to 0$,

$$\left|\begin{array}{l} u_\epsilon \to u \text{ weakly in } L^2(0,T;V), \\ \epsilon u_\epsilon \to 0 \text{ weak} - * \text{ in } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ u_\epsilon \to u \text{ weak} - * \text{ in } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right), \\ u_\epsilon \to u \text{ weakly in } L^{\rho+2}(\Sigma_1), \\ u'_\epsilon \to u' \text{ weakly in } L^q\left(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right), \\ |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon \to \phi \text{ weakly in } L^q(\Sigma_1). \end{array}\right. \tag{6.25}$$

Similarly to proof of the Theorem 6.2.1, we can use monotony method to conclude that $\phi = |u|^{\rho} u$.

Using the convergences (6.25) in (6.6) we obtain the variational formulated of the system (6.1)

$$((u, v)) + \frac{d}{dt}(u, v)_{\Gamma_1} + (|u|^{\rho} u, v)_{\Gamma_1} = (f, v)_{\Gamma_1}, \ \forall v \in V.$$

By $(6.24)_3$ and $(6.24)_5$, we can use the Aubin-Lions' compactness lemma to extract a subsequence of $(\gamma_0 u_\epsilon)$ such that $\gamma_0 u_\epsilon \to \gamma_0 u$ in $C^0\left([0, T]; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right)$ which combining with (6.7) it follows the initial condition

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{on} \quad \Gamma_1.$$

In this way, we have the solution of (6.1) as limit of the perturbed problem (6.3). ■

Referências Bibliográficas

[1] ARARUNA, F. D., ANTUNES, G. O. & MEDEIROS, L. A., Semilinear Wave Equation on Manifolds, Annales de la Faculté des Science de Toulouse, **XI**(1) , 2002, pp. 7-18.

[2] CAVALCANTI, M. M. and DOMINGOS CAVALCANTI, V. N., On Solvability of Solutions of Degenerate Nonlinear Equations on Manifolds, Differential and Integral Equation, **13**(10-12), 2000, pp. 1445-1458.

[3] LIONS, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[4] LIONS, J. L. & MAGENES, E., *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, 1968.