MÉTODOS CLÁSSICOS

EM

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

MÉTODOS CLÁSSICOS

EM

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

(2ª Edição)

Luis Adauto Medeiros

Professor Emérito UFRJ

Juan Limaco Ferrel

Professor Adjunto IM/UFF

Angela Cássia Biazutti

Professora Adjunta IM/UFRJ

Instituto de Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro, RJ - 2000

M488

Medeiros, Luis Adauto, 1926-
Métodos Clássicos em Equações Diferenciais Parciais/ Luis Adauto Medeiros, Juan Limaco Ferrel, Angela Cássia Biazutti - 2. Ed. - Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 1999.
163p.
Inclui bibliografia.

1. Equações Diferenciais Parciais. I. Limaco Ferrel, Juan. II. Biazutti, Angela Cássia. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. IV. Título.

ISBN: 85-87674-02-1 CDD-20ª 515.353

I don't believe I can really do without teaching. The reason is, I have to have something so that when I don't have any ideas and I'm not getting anywhere I can say to myself, "At least I'm living; at least I'm doing something; I am making some contribution" - it's just psychological.

Richard Feymman
(Prêmio Nobel de Física)

PREFÁCIO

A esta segunda edição foram anexadas substanciais modificações. A primeira edição foi adotada no Instituto de Matemática da UFF pelo Professor Juan Limaco Ferrel, sugerindo, com base em suas aulas, várias mudanças no texto e a introdução de uma coleção de exercícios resolvidos e outra por resolver com dificuldades semelhantes. O capítulo sobre equações parabólicas foi totalmente re-escrito pela Professora Angela Cássia Biazutti anexando, também, uma relação de exercícios resolvidos e por resolver.

Note-se, entretanto, que apesar das alterações mencionadas foi mantido o caráter didático e metódico do texto com escolha de raciocínios simples, porém vigorosos, com o objetivo de transmitir ao aluno idéias, algumas vezes complexas. Acredito que um princípio pedagógico eficiente é apresentar os resultados matemáticos básicos em casos simples para que o aluno possa compreendê-los, por si só, desenvolvê-los em casos mais gerais. Concorda-se com B. Niewenglowski, ao dizer: "C'est en étudiant questions regardées comme élémentaires mais exigeant déjà un sérieux effort d'attention qui nait l'amour de la science; c'est en resolvant ce qu'on peut appeler de jolies questions qu'on se sent pris du desir d'aller en avant et qu'on réussit à allumer le flambeau sacré."

Os métodos adotados para o estudo de equações diferenciais parciais são "clássicos", isto é, a derivada é no sentido de Newton-Liebniz, a integral é a de Cauchy-Riemann-Darboux e o espaço onde tudo acontece é o plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$, onde habitam as funções reais do texto.

Agradeço à Lourdinha quem, pacientemente, fez a revisão do texto e re-desenhou as figuras com os instrumentos sagrados – a régua e o copo, substituto natural do compasso em situações apropriadas.

À Liliana Angelina Leon e ao Silvano Bezerra de Menezes, agradeço pela leitura do texto por ocasião da disciplina introdutória de Equações Diferenciais Parciais no IMUFRJ, primeiro semestre de 1998. Agradeço, também, ao professor Waldemar Bastos da Unesp de Rio Claro que revisou este texto ao lecionar, apresentando diversas sugestes que foram aqui implementadas.

Ao Wilson Góes, pela paciência ao digitar o manuscrito.

Teresópolis, 2 de outubro de 1999

Luis Adaudo Medeiros

INTRODUÇÃO (1ªedição)

O presente texto, parte de uma trilogia sobre equações diferenciais parciais, baseia-se em notas de aula de lições professadas pelo autor na parte propedêutica do Instituto de Matemática da UFRJ. Este e o livro: L.A. Medeiros - N.G. Andrade "Iniciação às Equações Diferenciais" LTC 1973, Rio de Janeiro, RJ, se completam. Note-se, entretanto, que podem ser lidos independentemente. O texto publicado pela LTC objetiva o estudo de três problemas básicos da Física modelados por equações diferenciais parciais. No presente estudo aqueles modelos são examinados sem a preocupação de fazê-los nascer da experiência, mas sim de um ponto de vista puramente analítico, sem a preocupação com a motivação. Os três operadores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

são reencontrados por meio do estudo geral do operador diferencial parcial linear, de segunda ordem, no plano $\mathbb{R}^2$, isto é:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2}$$

sendo $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ funções reais definidas em um aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$.

Quando os operadores diferenciais (1) são realizados, representando problemas da Física a variável y é o tempo denotado por t. Retornando ao citado livro da LTC, os operadores (1) seriam, da esquerda para a direita, o de vibrações transversais de uma corda elástica (d'Alembert 1717-1783); o operador do potencial (Laplace 1749-1827) e o operador do calor (Fourier 1768-1830). Em dimensões do espaço superiores a dois, modelam uma grande variedade de problemas da Ciência em geral. No presente texto eles aparecem como formas canônicas das equações hiperbólicas, elíticas e parabólicas.

Apenas a título de uma primeira informação, mencionou-se o operador

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

de tipo misto (Tricomi 1897-1978).

A presente exposição compõe-se de cinco seções. Uma dedicada ao problema de Cauchy para (2), estudo das características e conseqüente classificação em hiperbólicos, elíticos e parabólicos. Nas seções seguintes são estudadas, resumidamente, cada uma das classes acima. No caso hiperbólico estuda-se o problema de Cauchy e o de Goursat. Analisa-se o método de Riemann aplicando-o à equação do telégrafo. Por meio da fórmula de Riemann reencontra-se a solução de d′Alembert.

Na seção dedicada às equações elíticas são estudados os problemas de Dirichlet e Neumann. Analisa-se a função de Green de um domínio do $\mathbb{R}^2$ que é calculada no caso de um círculo de raio R. Salienta-se a estreita relação entre as funções harmônicas no $\mathbb{R}^2$ com as funções holomorfas em $\mathbb{C}$.

Conclui-se com o estudo das soluções analíticas por intermédio do método de Cauchy, por ele denominado "método dos limites" e também chamado "método de majorantes".

Dir-se-ia que se supõe do leitor o conhecimento dos fundamentos da análise matemática clássica.

Agradece-se à Lourdinha pela revisão e leitura do manuscrito, modificando certos trechos da redação para torná-la mais clara. Também pela construção das figuras que aparecem no texto.

Ao Wilson Góes pelo belo trabalho "micrográfico". Ao Sergio e Carlindo, da Reprografia do IM, pela colaboração no momento da impressão.

Rio de Janeiro, março de 1977

Luis Adauto Medeiros

SUMÁRIO

1. EQUAÇÕES NO PLANO $\mathbb{R}^2$-CARACTERÍSTICAS

Nesta seção serão consideradas equações diferenciais parciais de segunda ordem, para a função incógnita $u(x, y)$, uma aplicação numérica definida para x, y em um aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$. Considere-se o operador diferencial

$$(1) \qquad Lu = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

sendo $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ funções reais definidas e regulares em Ω. O domínio de L é o espaço vetorial real $C^2(\Omega)$ de todas as funções reais em Ω e aí duas vezes continuamente diferenciáveis. Tem-se que L é um operador linear, isto é, para todo par de funções $u, v \in C^2(\Omega)$ e todo par de números reais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(2) \qquad L(\alpha u + \beta v) = \alpha\, Lu + \beta\, Lv.$$

Considere-se uma função F definida em $\Omega \times \mathbb{R}^3$ tal que a cada ponto (x, y, ξ, η, ζ) de $\Omega \times \mathbb{R}^3$ associa o número real $F(x, y, \xi, \eta, \zeta)$.

Definição 1. Denomina-se equação diferencial parcial de segunda ordem, quase linear, na incógnita $u(x, y)$, a uma equação do tipo:

$$(3) \qquad Lu = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

sendo L e F definidos anteriormente.

Definição 2. Denomina-se solução de (3) a uma função $u(x, y)$, de classe $C^2(\Omega)$, tal que a igualdade (3) seja verificada pontualmente em Ω.

Considere-se uma curva γ do plano $\mathbb{R}^2$, com equações paramétricas

$$\gamma:\ x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t) \qquad 0\le t\le 1.$$

Suponha γ regular e sem auto-intersecções. A derivada de φ e ψ relativamente ao parâmetro t, representa-se por $\overset{\circ}{\varphi}$ e $\overset{\circ}{\psi}$. Supõe-se que $\overset{\circ}{\varphi}{}^2+\overset{\circ}{\psi}{}^2>0$ em $[0,1]$.

O Problema de Cauchy, para a equação diferencial quase linear $Lu = F\left(x,y,u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$, consiste em determinar uma solução $u(x,y)$ para esta equação, conhecendo-se os valores de $u(x,y)$ e das derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ sobre γ. Simbolicamente, escreve-se:

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} Lu = F\left(x,y,u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{em} \quad \Omega \\[2ex] u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y} \quad \text{conhecidas sobre} \quad \gamma \end{array}\right.$$

Esta é uma formulação vaga do Problema de Cauchy. Posteriormente retorna-se a este problema com as condições necessárias sobre γ para que o problema (4) possua solução.

Introduz-se uma notação, para tornar mais simples o texto. Assim, representa-se por H, U, V as seguintes funções definidas sobre γ:

$$\left|\begin{array}{l} H(t) = u(x,y) \quad \text{com} \quad (x,y)\in\gamma \\[2ex] U(t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) \quad \text{com} \quad (x,y)\in\gamma \\[2ex] V(t) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \quad \text{com} \quad (x,y)\in\gamma \end{array}\right.$$

Considere-se u uma solução do problema de Cauchy (4). São conhecidas sobre γ as funções u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ e, portanto, $H(t)$, $U(t)$, $V(t)$ e $F(\varphi(t),\psi(t),H(t),U(t),V(t))$.

Portanto, são conhecidas as derivadas $\dfrac{dU}{dt}$ e $\dfrac{dV}{dt}$. Assim, as derivadas segundas $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ são determinadas, sobre γ, por meio do sistema:

$$
(5) \qquad \left|\begin{array}{l}
\dfrac{dU}{dt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\overset{\circ}{\varphi} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,\overset{\circ}{\psi} \\[2ex]
\dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,\overset{\circ}{\varphi} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\overset{\circ}{\psi} \\[2ex]
a\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u\,\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{array}\right.
$$

Observe, uma vez mais, que (5) está sendo considerado sobre a curva γ, isto é, para $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

A matriz do sistema (5) é:

$$
\begin{pmatrix}
\overset{\circ}{\varphi} & \overset{\circ}{\psi} & 0 \\
0 & \overset{\circ}{\varphi} & \overset{\circ}{\psi} \\
a & 2b & c
\end{pmatrix}
$$

cujo determinante é:

$$\delta = c\overset{\circ}{\varphi}{}^2 - 2b\overset{\circ}{\varphi}\overset{\circ}{\psi} + a\overset{\circ}{\psi}{}^2.$$

Do estudo de sistema de equações lineares, conclui-se:

- Se $\delta \neq 0$ o sistema linear (5) é determinado e sua solução $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, sobre γ, é obtida por meio da regra de Cramer.
- Quando $\delta = 0$ o sistema (5) é indeterminado ou impossível.

Definição 3.

i) Denomina-se curva característica para a equação $Lu = F$, a curva γ sobre a qual $\delta = 0$, isto é,

$$c\overset{\circ}{\varphi}^2 - 2b\overset{\circ}{\varphi}\overset{\circ}{\psi} + a\overset{\circ}{\psi}^2 = 0. \tag{6}$$

ii) As curvas γ tais que $\delta \neq 0$ denominam-se não características.

A seguir serão demonstrados alguns resultados permitindo o cálculo das curvas características de $Lu = F$ ou de L.

Proposição 1.

i) Se $a \neq 0$ sobre γ, as curvas características de L são as soluções da equação diferencial ordinária:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0. \tag{7}$$

ii) Se $c \neq 0$ sobre γ, as curvas características de L são as soluções da equação diferencial ordinária

$$c\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b\left(\frac{dx}{dy}\right) + a = 0. \tag{8}$$

iii) Se $a = c = 0$ sobre γ, as curvas características de L são as retas $x =$ cst, $y =$ cst, isto é, a dupla família de retas paralelas aos eixos coordenados.

Demonstração:

i) De fato, suponha que γ seja uma curva característica para a equação $Lu = F$, e $a(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$ em t_0. Esta hipótese implica em $\overset{\circ}{\varphi}(t) \neq 0$ em uma vizinhança de t_0. Realmente, sendo γ característica para $Lu = F$, obtém-se:

$$c\overset{\circ}{\varphi}^2 - 2b\overset{\circ}{\varphi}\overset{\circ}{\psi} + a\overset{\circ}{\psi}^2 = 0 \quad \text{sobre} \quad \gamma. \tag{9}$$

Seja $\overset{\circ}{\varphi}(t) = 0$ em uma vizinhança de t_0. Da equação (9) deduz-se que $\overset{\circ}{\psi}(t) = 0$ nesta vizinhança, contrariando a hipótese feita sobre γ de ser $\overset{\circ}{\varphi}{}^2 + \overset{\circ}{\psi}{}^2 > 0$ em $0 \leq t \leq 1$. Logo $\overset{\circ}{\varphi}(t) \neq 0$ em todo ponto t onde γ é definida. Sendo o coeficiente angular da reta tangente a γ dado por $\dfrac{\overset{\circ}{\psi}(t)}{\overset{\circ}{\varphi}(t)}$, deduz-se que γ não possui tangente vertical em cada um de seus pontos. Resulta, daí, que γ é definida por uma função $y = f(x)$ e suas equações paramétricas podem ser escritas sob a forma seguinte:

$$\gamma: \; x = x, \quad y = f(x),$$

isto é, φ é a identidade e ψ é igual a f. Logo, a equação $\delta = 0$, das características, reduz-se a

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0. \qquad \square$$

ii) Semelhante ao caso (i).

iii) Se $a = c = 0$ sobre γ e $\delta = 0$, a equação característica reduz-se a:

$$2b\overset{\circ}{\varphi}\overset{\circ}{\psi} = 0 \quad \text{sobre} \quad \gamma. \qquad \square \tag{10}$$

Deve-se ter $b \neq 0$, pois se assim não fôsse, não existiria o problema a estudar, isto é, L seria o operador nulo. Logo, de (10), conclui-se que as características de $Lu = F$ são $x =$ cst e $y =$ cst. $\square$

Exemplos

1. Considere o operador

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Tem-se $a = -1, \; b = 0, \; c = 1$.

As características de $Lu = F$ são dadas pela equação:

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

ou $y = x + k, \quad y = -x + k.$

Note que o operador deste exemplo aparece no estudo das vibrações transversais de uma corda elástica.

2. Considere o operador

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot$$

As características da equação $Lu = F$ são dadas pelas soluções da equação diferencial ordinária:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0,$$

porque $a = b = c = 1$. Este operador fatora-se em $\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)^2 = 0$, obtendo-se $\frac{dy}{dx} = 1$ cuja solução são as retas $y = x + k$.

3. Considere o operador do potencial

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot$$

As características de $Lu = F$, são

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

porque $a = c = 1$ e $b = 0$. As soluções desta equação não são reais. Elas são dadas por $y = ix$, $y = -ix$, sendo $i^2 = -1$.

4. Considere o operador $Lu = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, no qual $a = 1$, $b = c = 0$. As características de $Lu = F$ são soluções da equação

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

isto é, a família de retas $y = k$, sendo k um número real. O operador L aparece nos problemas unidimensionais de transferência de calor.

Observação 1. Dos exemplos acima estudados, observa-se o seguinte:

α) $Lu = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F$, possui duas famílias de características, $y = x + k$ e $y = -x + k$.

β) $Lu = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F$, possui uma única família de características, $y = k$.

γ) $Lu = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$ não possui características reais.

O primeiro tem sua origem no estudo de vibrações transversais de uma corda elástica e o segundo no estudo de transferência de calor através de um fio metálico. O terceiro é originário de problemas estacionários. No que vem a seguir estes operadores serão ainda mencionados. Outros exemplos há, de modelos provenientes da Física Matemática.

Por meio de conveniente mudança de variáveis demonstra-se que a equação $Lu = F$ transforma-se em $\overset{\vee}{L}u = G$, sendo $\overset{\vee}{L}$ um dos operadores da Observação 1, razão porque eles são denominados formas canônicas do operador de segunda ordem no plano

$\mathbb{R}^2$. Antes, porém, será feita uma classificação das equações diferenciais parciais de segunda ordem, semelhante a feita para as formas quadráticas no plano $\mathbb{R}^2$.

Considere-se uma forma quadrática no $\mathbb{R}^2$, dada por:

$$Q(\xi, \eta) = a\,\xi^2 + 2b\,\xi\eta + c\eta^2,$$

cujo discriminante é $b^2 - ac$. Diz-se que a forma é uma hipérbole quando $b^2 - ac > 0$, uma parábola quando $b^2 - ac = 0$ e uma elipse se $b^2 - ac < 0$. Será adotada para as equações diferenciais parciais uma análoga classificação. Note-se que classifica-se nos tipos a equação $Lu = F$ ou simplesmente o operador L.

Definição 4. Considere-se a equação

$$Lu = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

i) Diz-se que ela é hiperbólica em Ω, quando $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0$ em Ω.

ii) Diz-se que ela é parabólica em Ω se $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0$ em Ω.

iii) Diz-se que a equação é elítica em Ω quando $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0$ em Ω.

Observação 2. Note-se que sendo Lu o operador que caracteriza o membro da esquerda da equação, diz-se também que ele é hiperbólico, parabólico ou elítico como no caso da equação.

Observação 3. Aplicando-se a Definição 4 às equações da Observação 1, conclui-se: os operadores em α), β) e γ), são, respectivamente, hiperbólico, parabólico e elítico em $\Omega = \mathbb{R}^2$.

No que se segue, por meio da classificação em tipos obtida por meio da Definição 4 e da noção de característica, reduz-se a equação $Lu = F$, da Definição 4, a uma das formas $\alpha)$, $\beta)$ ou $\gamma)$.

Observação 4. Da Definição 4 e da Proposição 1, conclui-se que no caso hiperbólico há duas famílias distintas de características; no caso parabólico uma única e no caso elítico não há características reais.

Para redução de $Lu = F$ às formas canônicas $\alpha)$, $\beta)$ e $\gamma)$ da Observação 1, inicia-se com uma mudança de coordenadas. De fato, considere-se a transformação τ do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$ dada pelas funções:

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad \text{e} \qquad \eta = \psi(x, y).$$

Supõe-se φ e ψ de classe $C^1(\Omega)$ com Jacobiano não nulo, isto é:

$$J(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Note-se que, no cálculo, considera-se φ, ψ ou ξ, η, assim: $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$. Isto facilita a notação.

O objetivo é obter Lu, dado nas coordenadas x, y, nas novas coordenadas ξ, η dadas por τ.

Nas novas coordenadas, obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\,.$$

Sendo $J(\xi, \eta) \neq 0$ em Ω, calcula-se, pelas regras de Cramer, $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ em função de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Para as derivadas de segunda ordem, encontra-se:

$$
(11)\qquad \left|\begin{array}{l}
\bullet\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \\[2ex]
\quad + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\[2ex]
\bullet\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \\[2ex]
\quad + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\[2ex]
\bullet\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \\[2ex]
\quad + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}
\end{array}\right.
$$

Considere as funções $A(x,y)$, $B(x,y)$ e $C(x,y)$ definidas do modo seguinte:

$$
(12)\qquad \left|\begin{array}{l}
\bullet\ A = a\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\[2ex]
\bullet\ B = a\,\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\,\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} \\[2ex]
\bullet\ C = a\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2
\end{array}\right.
$$

Multiplicando $(11)_1$ por a, $(11)_2$ por c e $(11)_3$ por $2b$ e adicionando-se o resultado, obtém-se, levando-se em conta (12), a equação $Lu = F$ nas coordenadas ξ, η, isto é, $\overset{\vee}{L}u = G$:

$$
(13)\qquad A\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).
$$

Observe-se que G é a soma de F com os termos de primeira ordem que aparecem em (11).

Por meio de cálculo obtém-se:

$$B^2 - AC = -(b^2 - ac),$$

provando que a equação (13) $\check{L}u = G$, transformada de $Lu = F$ pela τ, possui o mesmo tipo que $Lu = F$ nas coordenadas x, y.

A próxima etapa consistirá em escolher a transformação

$$\tau: \ \xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

de modo a obter os seguintes casos:

- Hiperbólico, $A = C = 0 \quad (B \neq 0)$
- Parabólico, $A = B = 0 \quad (C \neq 0)$
- Elítico, $B = 0 \qquad (A \neq 0, C \neq 0)$

Caso hiperbólico. Sejam $\varphi(x, y) = c_1$ e $\psi(x, y) = c_2$ as duas famílias independentes de características de $Lu = F$. Provar-se-á que considerando-se a transformação de coordenadas

$$\tau: \ \xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

a equação hiperbólica $Lu = F$ reduz-se à forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = H\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \tag{14}$$

isto é, $A = C = 0$ em (13).

Considerando-se em (14) a mudança de coordenadas:

$$X = \xi + \eta, \qquad Y = \xi - \eta,$$

a forma (14) reduz-se a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = H\left(X, Y, u, \frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}\right) \tag{15}$$

dita forma canônica das equações hiperbólicas. Chamar-se-á, forma canônica (14) e (15).

De fato, suponha-se o caso hiperbólico com $a \neq 0$. Resulta, Proposição 1, que as duas famílias independentes de características são obtidas por meio da equação ordinária:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\,\frac{dy}{dx} + c = 0. \tag{16}$$

O caso $c \neq 0$ é semelhante. Tem-se $b^2 - ac > 0$. Sejam

$$\varphi(x, y) = \xi\,, \quad \psi(x, y) = \eta\,,$$

as famílias de características soluções de (16). Supondo-se y definida implicitamente por $\varphi(x, y) = \xi$, obtém-se:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{17}$$

Aqui supõe-se a, b, c, $\;C^1(\Omega)$, de modo que φ e ψ satisfazem ao teorema das funções implícitas.

Resolvendo $\dfrac{dy}{dx}$ em (17) e substituindo-se em (16) obtém-se:

$$a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

De (12) conclui-se, da equação acima, que $A = 0$.

De modo análogo, considerando-se a outra característica $\psi(x,y) = \eta$, sendo $a \neq 0$, resulta, ver Proposição 1,

$$a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

provando que $C = 0$ em Ω.

Portanto, no caso hiperbólico, por meio das curvas características como sistema de coordenadas, a equação transformada (13) reduz-se à forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi, \partial\eta} = H\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

que é a (14).

Fazendo-se, nesta equação,

$$X = \xi + \eta, \qquad Y = \xi - \eta,$$

obtém-se a FORMA CANÔNICA das equações hiperbólicas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = H\left(X, Y, u, \frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}\right). \qquad \square$$

Exemplo 1. Calcule a solução da equação

$$2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Tem-se $a = 2$, $b = -\dfrac{5}{2}$, $c = 3$, obtendo-se $b^2 - ac = \dfrac{1}{4} > 0$ a equação hiperbólica. As famílias de curvas características são as soluções de

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5\,\frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\cdot$$

As famílias características são:

$$\varphi(x, y) = x - y = k; \qquad \psi(x, y) = 3x - 2y = k.$$

A transformação τ é dada por:

$$\xi = x - y; \qquad \eta = 3x - 2y.$$

A equação em (ξ, η) possui $A = 0$, $C = 0$ e $2B = -1$. Logo a transformada é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Daí obtém-se a solução:

$$u(x, y) = f(x - y) + g(3x - 2y)$$

com f e g funções reais.

Caso Parabólico. Considere família de características de $Lu = F$ dada por $\varphi(x, y) = c$. Para transformação τ toma-se $\xi = \varphi(x, y)$ e $\eta = \psi(x, y)$ uma qualquer função independente de ξ, isto é, com $J(\xi, \eta) \neq 0$ em Ω. Demonstrar-se-á que a equação $Lu = F$ reduz-se a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

De fato, no caso parabólico tem-se $b^2 - ac = 0$ sendo a e c não nulos. Suponha $a \neq 0$. Seja $\xi = \varphi(x, y)$ e η como fixada acima. Obtém-se a fatoração da equação das características:

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{b}{a}\right)^2 = 0 \quad \text{e} \quad b^2 = ac. \tag{18}$$

A equação da característica $\varphi(x,y) = k$, permite calcular a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ por meio da equação

(19) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0.$$

Resolvendo (19) em $\dfrac{dy}{dx}$ e substituindo em (18), sendo $b^2 = ac$ em Ω, conclui-se que o coeficiente $A = 0$.

Para o cálculo de B no caso parabólico, note-se que sendo $b^2 = ac$, o B fatora-se sob a forma:

(20) $$B = a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right).$$

Sendo $\varphi(x,y) = k_1$, característica da equação parabólica, obtém-se $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$ o que implica, teorema das funções implícitas:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Sendo, $\dfrac{\partial\xi}{\partial x} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, resulta de (20) que $B = 0$ em Ω.

Para analisar a função $C(x,y)$, tem-se, por definição:

(21) $$C = a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,$$

com $a \neq 0$. Note que $\eta = \psi(x,y)$ é escolhida de modo que $J(\xi,\eta) \neq 0$, isto é, funcionalmente independente da característica $\xi = \varphi(x,y)$.

Sendo $a \neq 0$ e $b^2 = ac$, deduz-se que a C, dada por (21), fatora-se do modo seguinte:

$$C = \frac{1}{a}\left(a\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,$$

que é não nula.

De fato, se

$$a\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\,\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{22}$$

obtém-se de (19) e $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$, caso parabólico, que

$$a\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{23}$$

Sendo o determinante do sistema linear (22), (23) não nulo em Ω, pois φ e ψ são independentes, conclui-se que $a = 0$, contradição.

Conclui-se que no caso parabólico, isto é, $b^2 = ac$ em Ω, obtém-se $A = B = 0$ e $C \neq 0$. Resulta que a equação $Lu = F$ reduz-se, pela τ, à FORMA CANÔNICA:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad \square$$

Exemplo 1. Calcule a solução da equação

$$x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sendo Ω um domínio no primeiro quadrante $x > 0$, $y > 0$.

Tem-se $a = x^2$, $b = xy$, $c = y^2$, de modo que $b^2 - ac = 0$ em Ω. A equação é parabólica.

A característica é a solução de $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$ ou,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{obtendo-se} \quad \varphi(x., y) = \frac{y}{x} = k,$$

após integração. A transformação τ será

$$\xi = \varphi(x,y) = \frac{y}{x} \qquad \text{e} \qquad \eta = \psi(x,y) = y.$$

Note-se que $J(\xi,\eta) \neq 0$ em Ω. A equação transformada é:

$$\eta \, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Obtém-se $u(\xi,\eta) = f(\xi)\eta + g(\xi)$, ou

$$u(x,y) = yf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{em} \quad \Omega. \qquad \square$$

Caso Elítico. Para fazer o estudo do caso elítico, isto é, $b^2 - ac < 0$, supõe-se que os coeficientes a, b, c sejam funções analíticas em Ω. Isto significa dizer que em cada ponto de Ω estas funções são representadas por séries de potências convergentes na vizinhança deste ponto. Portanto a equação característica, $a \neq 0$,

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{24}$$

possui soluções analíticas em Ω, veja Seção 5. Considere-se a solução

$$\varphi(x,y) = k \quad \text{ou} \quad \varphi_1(x,y) + i\,\varphi_2(x,y) = \alpha + i\beta, \tag{25}$$

sendo $i^2 = -1$, φ_1 e φ_2 reais, α, β números reais. Considera-se os módulos dos números complexos $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ não nulos em Ω.

De (24) e (25) segue-se que φ é solução de

$$a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{26}$$

Considere-se a transformação τ definida por:

$$\xi = \varphi_1(x,y) \qquad \text{e} \qquad \eta = \varphi_2(x,y). \tag{27}$$

Observação 5. Note que $\varphi_1(x,y) + i\,\varphi_2(x,y)$ é uma função holomorfa no sentido de Cauchy. Portanto, valem as equações de Cauchy-Riemann. Foi admitido que $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right|$ e $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right| \neq 0$. Logo, o Jacobiano de ξ, η é não nulo, implicando a independência funcional de φ_1 e φ_2. Isto porque $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}$. O Jacobiano é $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}$.

As equações de Cauchy-Riemann são

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,,$$

implicando em $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}$. Das equações de Cauchy-Riemann obtém-se:

$$J(\xi,\eta) = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2 = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2 \neq 0.$$

Retornando-se a (27), substituindo-se $\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + i\,\varphi_2(x,y)$ em (26), separando-se parte real e parte imaginária, obtém-se:

$$a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

e

$$a\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Observe-se que $\xi = \varphi_1$ e $\eta = \varphi_2$. Estas igualdades dizem que $B = 0$ e $A = C$ em Ω.

Resta provar que A e C não são as funções nulas. De fato, tem-se

$$A = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

sendo $b^2 - ac < 0$. Logo, a forma quadrática A é nula somente no vetor nulo $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 0$. Analogamente, $C = 0$ somente quando $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0$. Sendo $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right|$ e $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right|$ diferentes de zero em Ω não acontecerá que $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0$, identicamente em Ω. Logo A e C não são nulos. Resulta que no caso elítico, a FORMA CANÔNICA da equação $Lu = F$ é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad \square$$

Exemplo 2. Considere a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x > 0,\ \ y > 0.$$

Tem-se

$$a = 1, \qquad b = 0 \qquad \text{e} \qquad c = x^2,$$

obtendo-se $b^2 - ac = -x^2 < 0$ em Ω. Logo, as características são as soluções da equação:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 = 0,$$

isto é,

$$\frac{dy}{dx} = i\,x, \qquad \frac{dy}{dx} = -i\,x.$$

Obtém-se as características:

$$2y - ix^2 = c_1\,, \qquad 2y + ix^2 = c_2\,.$$

Tem-se

$$2y - ix^2 = \varphi_1 + i\,\varphi_2 \quad \text{e} \quad 2y + ix^2 = \varphi_1 - i\,\varphi_2\,,$$

o complexo conjugado. Tem-se a transformação τ dada por:

$$\xi = 2y, \qquad \eta = -x^2.$$

A equação transformada é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

que é a forma canônica da equação dada. $\square$

OPERADOR DE TRICOMI

Considere-se o operador

$$Lu = y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

que aparece no estudo de equações diferenciais parciais modelando o movimento de fluidos transônicos. Foi estudado, inicialmente, por Tricomi, por isto recebe seu nome. Francisco Giacomo Tricomi, matemático italiano, (1897-1979), professor na Universidade de Turim. Além de significantes contribuições à investigação matemática, escreveu excelentes textos de análise matemática, variáveis complexas, equações diferenciais, funções ortogonais etc, os quais influenciaram nossa geração quando estudantes da Universidade do Brasil.

No operador de Tricomi, tem-se:

$$a = y, \qquad b = 0, \qquad c = 1.$$

O discriminante é $b^2 - ac = -y$. Resulta que no semi-plano inferior $y < 0$, Lu é hiperbólico e no semi plano-superior $y > 0$, Lu é elítico. Poder-se-ia dizer que $y = 0$ é uma reta de parabolicidade.

As características, no caso hiperbólico, são as soluções da equação ordinária

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

Daí obtém-se a dupla família de curvas características

$$(x - k)^2 + \frac{4}{9}\, y^3 = 0.$$

Como se observa, a equação de Tricomi $Lu = 0$ é de tipo misto, isto é, elítica em $y > 0$, parabólica para $y = 0$ e hiperbólica para $y < 0$. Como salienta Caetano Fichera em seu discurso "in memoriam" de Francisco Tricomi, 1979, na Academia Dei Lincei, Itália, "a equação de Laplace $u_{xx}+u_{yy} = 0$ é o protótipo das equações elíticas, a equação de Fourier $u_t - u_{xx} = 0$ o das parabólicas, a de d'Alembert $u_{tt} - u_{xx} = 0$ das hiperbólicas e a de Tricomi $yu_{xx}+u_{yy} = 0$ o protótipo das equações de tipo misto". Para informações mais precisas e resultados recentes, consulte-se: N.A. Lar'kin, The Tricomi Problem, Atas do 42º Seminário Brasileiro de Análise, Univ. Estadual de Maringá, Maringá, PR, 1995. J. Barros Neto, On Fundamental Solutions for the Tricomi Operator, Atas do 49º Seminário Brasileiro de Análise, IMEC-UNICAMP, Campinas, SP, 1999.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere a equação:

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(i) Determine o tipo da equação.

(ii) Encontre as curvas características no caso hiperbólico.

SOLUÇÃO:

(i) Tem-se:

$$a(x,y) = y; \quad b(x,y) = 0; \quad c(x,y) = x.$$

Então

a equação é hiperbólica se $xy < 0$

a equação é elítica se $xy > 0$

a equação é parabólica se $x = 0$ ou $y = 0$

(ii) As curvas características são soluções da equação:

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0,$$

de onde deduz-se que:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{-x}{y}}\,.$$

Então

Na região $y > 0$, $x < 0$, as curvas são:

$$(-x)^{3/2} + y^{3/2} = c \qquad \text{e} \qquad -(-x)^{3/2} + y^{3/2} = c$$

e na região $y < 0$ $x > 0$, as curvas são:

$$x^{3/2} + (-y)^{3/2} = c \qquad \text{e} \qquad x^{3/2} - (-y)^{3/2} = c. \qquad \square$$

2. Determine as curvas características da equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4(x^2+1)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x^2+1)^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

SOLUÇÃO:

Observa-se que:

$$a(x,y) = 1$$
$$b(x,y) = 2(x^2+1)$$
$$c(x,y) = (x^2+1)^2$$

Então: $b^2 - ac = 3(x^2+1)^2 > 0$.

Logo a equação é hiperbólica.

As curvas características são soluções da equação:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4(x^2+1)\,\frac{dy}{dx} + (x^2+1)^2 = 0$$

ou seja

$$\frac{dy}{dx} = (2 \pm \sqrt{3})x^2 + (2 \pm \sqrt{3}).$$

Tem-se:

$$\frac{1}{3}\,(2-\sqrt{3})x^3+(2-\sqrt{3})x-y=c \quad \text{e} \quad \frac{1}{3}\,(2+\sqrt{3})x^3+(2+\sqrt{3})x-y=c. \qquad \square$$

3. Seja a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+4\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\,\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{sen} x+\cos x.$$

(i) Encontre as curvas caracteterísticas e as coordenadas características.

(ii) Reduzir à sua forma canônica.

SOLUÇÃO:

(i) Observa-se que os coeficientes do operador são:

$$a(x,y)=1; \quad b(x,y)=5; \quad c(x,y)=4 \quad \text{e} \quad F=\operatorname{sen} x+\cos x-7\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\cdot$$

Logo, as curvas características são soluções de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-5\left(\frac{dy}{dx}\right)+4=0$$

ou seja:

$$y-x=c \qquad \text{e} \qquad y-4x=c$$

e as coordenadas características são:

$$\xi=y-x \qquad \text{e} \qquad \eta=y-4x.$$

(ii) Como $b^2-ac=9>0$, a equação é hiperbólica.

Mediante a mudança $\xi = y - x$ e $\eta = y - 4x$ a equação fica transformada na forma canônica:

$$2B\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

onde B e G são dados em (12) e (13).

Como:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -4; \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = 1$$

$$\text{e} \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} = 0,$$

então:

$$B = -\frac{9}{2} \quad \text{e} \quad G = \operatorname{sen}\left(\frac{\xi-\eta}{3}\right) + \cos\left(\frac{\xi-\eta}{3}\right) - 7\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\cdot$$

Logo, a forma canônica é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{7}{9}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) - \frac{1}{9}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\xi-\eta}{3}\right) + \cos\left(\frac{\xi-\eta}{3}\right)\right)\cdot \qquad \square$$

4. Reduzir à forma canônica as seguintes equações:

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

(ii) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 8\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

SOLUÇÃO:

(i) Tem-se que:

$$a(x,y) = 1; \quad b(x,y) = -3; \quad c(x,y) = 9; \quad F = -6\,\frac{\partial u}{\partial y}\cdot$$

Como $b^2 - ac = 0$, a equação é parabólica. Sua característica é solução da equação:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6\left(\frac{dy}{dx}\right) + 9 = 0$$

que é $y + 3x = c$.

Considerando-se as coordenadas: $\xi = y + 3x$ e $\eta = \eta(x,)$ qualquer função, desde que $J(\xi,\eta) \neq 0$, segue-se que a equação é reduzida à forma canônica

$$C\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = G$$

onde C e G são dados por (12) e (13). Note que pode-se escolher $\eta = y$. Assim, como $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 1$, encontra-se $C = 9$. Como

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0,$$

então

$$G = -6\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

A forma canônica é então:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

(ii) Tem-se que: $a = 1; \quad b = 2; \quad c = 8.$

Como $b^2 - ac = -4 < 0$, a equação é elítica. As soluções da equação:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 8 = 0$$

são complexas e dadas por

$$y - x + i(-2x) = c_1$$

$$y - x + i(2x) = c_2\,.$$

Considerando-se a mudança $\xi = y - x$ e $\eta = -2x$, a equação toma a forma canônica

$$A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = G$$

onde A e G são calculados por (12) e (13).

Tem-se que $A = 4$ e $G = -10\,\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + 10\,\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\cdot$. Logo a forma canônica é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{5}{2}\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{5}{2}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\;\cdot \qquad \square$$

5. Determine a região na qual a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

é hiperbólica, parabólica ou elítica e transforme a equação na respectiva região para a forma canônica.

SOLUÇÃO:

Observa-se que $a = 1.\quad b = -\dfrac{7}{2};\quad c = 0$ e $F = -x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - u.$

Como $b^2 - ac = \dfrac{y^2}{4}\,,$

a equação é parabólica se $y = 0$

e hiperbólica se $y \neq 0$.

No caso parabólico, a equação toma a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -x\,\frac{\partial u}{\partial x} - u$$

que já está na forma canônica.

No caso hiperbólico, as curvas características são soluções da equação:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ou seja: $\quad x = Lny \quad$ e $\quad \eta = y.$

Tem-se que:

$$B(x,y) = -\frac{y}{2} \quad \text{e} \quad G = -(\xi - Ln\eta)\,\frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta\left(\frac{1}{\eta}\,\frac{du}{d\xi} + \frac{du}{d\eta}\right) - u.$$

Então, a forma canônica dada por $2B\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = G$ nos dá

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\frac{1 + \xi - Ln\eta}{\eta}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta}\,u. \qquad \square$$

6. Encontre a solução geral das seguintes equações:

(i) $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(ii) $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

SOLUÇÃO:

(i) Tem-se que $a = 1$; $\quad b = -3$ e $c = 5$.

Logo, $b^2 - ac = 4 > 0$ e a equação é hiperbólica.

As curvas características são as soluções da equação:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4 = 0$$

isto é: $\quad x + y = c \quad$ e $\quad 5x + y = c.$

A mudança $\xi = x + y$ e $\eta = 5x + 4$ reduz a equação à forma canônica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Tem-se $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ com f e g funções arbitrárias.

Logo, a solução é $u(x, y) = f(x + y) + g(5x + y)$.

(ii) Tem-se que: $\quad a = 1; \quad b = -2; \quad c = 4.$

Logo, $b^2 - ac = 0$ e a equação é parabólica.

A única curva característica é solução da equação

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4 = 0$$

isto é: $\quad x + 2x = c.$

A transformação de coordenadas $\xi = y + 2x$ e $\eta = y$ reduz a equação à forma canônica $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$

Tem-se $\quad u(\xi, \eta) = f(\xi)\eta + g(\xi).$

Logo, a solução geral é dada por:

$$u(x, y) = y\, f(y + 2x) + g(y + 2x). \qquad \square$$

7. Determine a solução geral da equação elítica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

SOLUÇÃO:

Resolve-se a equação:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

onde α é constante.

A mudança $\xi = x + \alpha y$ e $\eta = x - \alpha y$ transforma a equação na forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Então,

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

ou seja

$$u(x, y) = f(x + \alpha y) + g(x - \alpha y).$$

Considerando-se em particular $\alpha = i$, $i = \sqrt{-1}$, tem-se a equação que se quer resolver e a solução será:

$$u(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy). \qquad \square$$

8. Encontre a solução geral da equação:

$$2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial u}{\partial x} + 3\,\frac{\partial u}{\partial x} = 3$$

SOLUÇÃO:

Tem-se que:

$$a = 2; \quad b = \frac{5}{2}, \quad c = 3 \quad \text{e} \quad F = 3 - 2\,\frac{\partial u}{\partial x} - 3\,\frac{\partial u}{\partial y} \cdot$$

Logo $b^2 - ac = \dfrac{1}{4} > 0$ e a equação é hiperbólica.

As curvas características são as soluções da equação

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3 = 0,$$

isto é $y - x = c \quad$ e $\quad y - \dfrac{3}{2}\,x = c.$

Mediante a mudança $\xi = y - x\;$ e $\eta = y - \dfrac{3}{2}\,x$, obtém-se a forma canônica

$$-\frac{9}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial u}{\partial\xi} = 3.$$

Se $v = \dfrac{\partial u}{\partial\xi}$, obtém-se

$$\frac{\partial v}{\partial\eta} - \frac{2}{9}\,v + \frac{2}{3} = 0$$

que tem por soluções

$$v(\xi,\eta) = F(\xi)e^{(2/9)\eta} + g(3).$$

Tem-se então

$$u(\xi,\eta) = 3\xi + f(\xi)e^{(2/9)\eta} + g(\eta)$$

Finalmente, a solução é:

$$u(x,y) = 3(y-x) + f(y-x)e^{\frac{2}{9}(y-\frac{3}{2}\,x)} + g\big(y - \frac{3}{2}\,x\big). \qquad \square$$

9. Reduzir a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\,\frac{\partial u}{\partial x} - 2\,\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

à forma $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = cv$, onde c é constante, introduzindo a nova variável $v = u\,e^{-(a\xi+b\eta)}$, onde a e b são coeficientes a determinar.

SOLUÇÃO:

As curvas características são dadas por $x+y=c$ e $x-y=c$. Mediante a mudança $\xi = x-y$ e $\eta = x+y$, obtém-se a forma canônica:

$$4\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + 5\,\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta} + u = 0.$$

Se $v = u\,e^{-(a\xi+b\eta)}$, obtém-se

$$4\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + (4b+5)\,\frac{\partial v}{\partial\xi} + (4a+1)\,\frac{\partial v}{\partial\eta} + (4ab+5a+b+1)v = 0.$$

Considerando: $b = -\dfrac{5}{4}$ e $a = -\dfrac{1}{4}$, obtém-se a forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{16}\,v. \qquad \square$$

10. Resolver a equação

$$x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4x\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2u = 0, \;\; x \neq 0.$$

SOLUÇÃO:

Faz-se a mudança $v = x^2 u$, obtém-se a forma $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, cuja solução é $v(x,y) = f(x-y) + g(x+y)$. Portanto

$$u(x,y) = \frac{1}{x^2}\,f(x-y) + \frac{1}{x^2}\,g(x+y). \qquad \square$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Classifique os seguintes operadores e encontre as características que passam pelo ponto (2,3), caso existam

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{(iv)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 7\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

2. Encontre as características, as coordenadas características e a forma canônica das seguintes equações:

(i) $u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x + 5u_y + u = e^x.$

(ii) $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = 0.$

(iii) $3u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x = x.$

(iv) $u_{xx} + u_{yy} + 2u_x + 8u_y + u = 0.$

(v) $u_{xy} + 2u_{yy} + 9u_x + u_y = 2.$

Respostas:

(i) $\nexists$ características, $\xi = y - x$; $\eta = \sqrt{2}x$; $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -\dfrac{1}{2}\,u_\xi - 2\sqrt{2}\,u_\eta - \dfrac{1}{2}\,u + \dfrac{e^{\frac{B}{\sqrt{2}}}}{2}$.

(ii) $y + x = c$; $\xi = y + x$; $\eta = y$; $u_{\eta\eta} = -\dfrac{3}{2}\,u.$

(iii) $\nexists$ características, $\xi = y$; $\eta = x$; a equação está na forma canônica.

(v) $x = c$; $x - \dfrac{y}{2} = c$; $\xi = x$; $\eta = x - \dfrac{y}{2}$; $u_{\xi\eta} = 18\,u_\xi + 17\,u_\eta - 4.$

3. Determine a região na qual as equações seguintes são hiperbólicas, parabólicas ou elíticas e transforme a equação na respectiva região à forma canônica.

a) $$x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2$$

b) $$x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (y^2-1)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

c) $$x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x$$

d) $$e^{2x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{3y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + u$$

e) $$\operatorname{sen}^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{sen} 2x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \cos^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x$$

f) $$(x^2-4)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (y^2-1)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = e^x + 1$$

g) $$(1-x^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - (1+y^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\,\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Respostas:

a) Se $x<0$, é hiperbólica e $\displaystyle\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\xi-\eta}{4}\right)^4 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} = \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$

Se $x=0$, é parabólica e a equação já está na forma canônica.

Se $x<0$, é elítica e $\displaystyle\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \frac{\eta^4}{16} + \frac{1}{\eta}\,\frac{\partial u}{\partial\eta}$

c) É parabólica sempre e $\displaystyle\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \frac{2\xi}{\eta^2}\,\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{1}{\eta^2}\,e^{\frac{\xi}{\eta}}$

e) É parabólica sempre e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \dfrac{1}{1 - e^{2(\eta - \xi)}} \left(\operatorname{sen}^{-1} \, e^{\eta - \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \right).$

4. Encontre a solução geral das seguintes equações:

(i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 7 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (ii) $3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (iv) $3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(v) $4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (vi) $3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Respostas:

(i) $u(x,y) = f(y - 7x) + g(y - x)$ (ii) $u(x,y) = f(y - 6x) + g(y + 2x)$

(iii) $u(x,y) = y f(y - 3x) + g(y - 3x)$ (iv) $u(x,y) = f(x) + g\left(x - \dfrac{3y}{4}\right)$

(v) $u(x,y) = f(x + 2i) + g(x - 2i)$

5. Resolver as seguintes equações:

a) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 8$$

b) $$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

c) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Sugestão: Ver o exercício resolvido 8.

Resposta:

b) $u(x,y) = \dfrac{8}{3}\left(y - \dfrac{x}{4}\right) + \dfrac{1}{3}\, g\left(y - \dfrac{x}{4}\right)^{e^{\frac{1}{3}(y-x)}} + f(y-x).$

6. Determine a solução das seguintes equações:

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

$$\text{(iii)} \quad 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Respostas:

(i) $u(x,y) = f(y - x + 2ix) + g(y - x - 2ix)$

(ii) $u(x,y) = (x - iy) f_1(x + iy) + f_2(x + iy) + (x + iy) f_3(x - iy) + f_4(x - iy)$

Sugestão: Escrever a equação na forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0$$

e resolver duas equações elíticas respectivamente.

7. Encontre a solução geral das equações seguintes:

(i) $x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

(ii) $y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha^2 y\,\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\alpha^2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \alpha = \text{constante}.$

Sugestão: Fazer $v = yu$.

Respostas:

(i) $u(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right) + g\left(\dfrac{y}{x}\right) e^{-y}$

(ii) $\quad u(y,x) = \dfrac{1}{y}\, f(y+\alpha x) + \dfrac{1}{y}\, g(y-\alpha x).$

8. Transformar as seguintes equações para a forma:

$$v_{\xi\eta} = \alpha v \qquad \alpha = \text{ constante},$$

mediante a mudança $v = u\, e^{-(a\xi+b\eta)}$, onde a e b são constantes a determinar.

(i) $$2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\,\frac{\partial u}{\partial y} + 6\,\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$$

(ii) $$3\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

(iii) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$$

Resposta:

(ii) $\quad v_{\xi\eta} = \dfrac{84}{625}\, v.$

2. EQUAÇÕES HIPERBÓLICAS

Na presente seção estudar-se-á alguns problemas significantes e métodos para as equações de tipo hiperbólico. Recorde-se que o modelo analisado anteriormente foi da forma $Lu = F$. Sendo o caso hiperbólico o de interesse, na presente seção, o operador reduz-se a

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot$$

A função F será considerada da forma:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - c(x,y)u + f(x,y).$$

Portanto, a equação hiperbólica a ser analisada é a seguinte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial u} + b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{1}$$

que é linear. Suas curvas características são

$$x = c, \qquad y = c, \tag{2}$$

isto é, as duas famílias de retas paralelas dos eixos coordenados. O operador no primeiro membro de (1) será representado por Lu, tendo-se:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u.$$

Nesta seção, serão formulados os problemas de Cauchy e Goursat para a equação $Lu = f$. A seguir analisa-se o método de Riemann dando uma fórmula explícita para a solução do problema de Cauchy, em função dos dados. O método de Riemann será aplicado ao estudo da equação do telégrafo e à equação de vibrações transversais de uma corda elástica reencontra-se a fórmula de d'Alembert. Finaliza-se a seção com um breve estudo sobre as soluções analíticas de uma equação diferencial parcial, pelo método dos limites de Cauchy.

PROBLEMA DE CAUCHY

Seja Γ um arco de curva regular no plano $\mathbb{R}^2$, com sistema de coordenadas xOy, ortogonal. Supõe-se que Γ não intercepte cada característica de $Lu = f$, em mais de um ponto. Para ser mais explícito, suponha Γ dada por $y = g(x)$ ou $x = h(y)$ e situada no quadrante $x > 0$, $y > 0$ do plano $\mathbb{R}^2$. As funções g e h são supostas continuamente diferenciáveis; consulte a figura

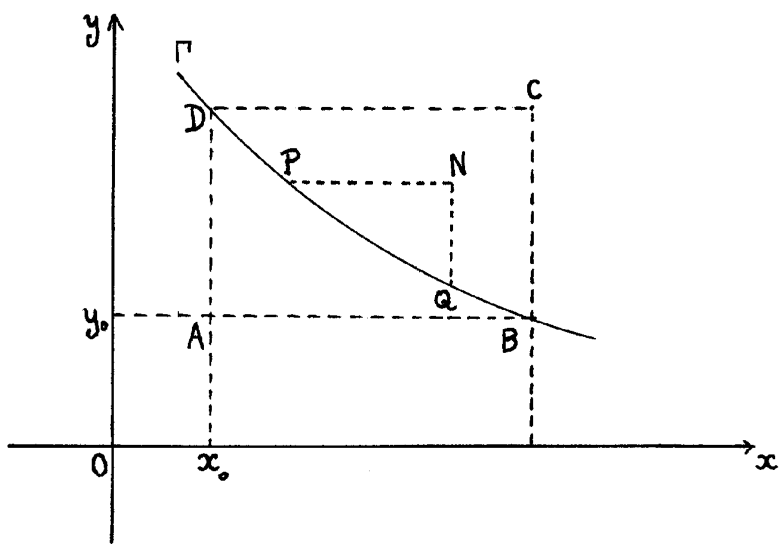


Fig. 1

O problema de Cauchy consiste em determinar uma solução $u(x,y)$ da equação (1) em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$, contendo Γ no seu interior, conhecidos os valores de u e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ sobre Γ. Toma-se Ω o retângulo $ABCD$ e a curva Γ como acima mencionada, contida no retângulo da figura 1. Suponha conhecidas as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sobre Γ, as quais são e continuamente diferenciáveis.

O problema de Cauchy para Lu consiste em determinar $u(x,y)$ definida em Ω satisfazendo às condições:

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{l} Lu = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ \\ u\big|_{\Gamma} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\big|_{\Gamma} = \psi(x) \end{array} \right.$$

Observação 1: Com os dados de (3) calcula-se, facilmente, o valor de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ sobre Γ. De fato, tem-se $u(x,y) = \varphi(x)$, quando $y = g(x)$. Derivando-se em relação a x, obtém-se:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma} = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma} g'(x) + \varphi'(x)$$

ou

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma} = \varphi'(x) - \psi(x)g'(x) = \zeta(x)$$

O problema de Cauchy (3) para Lu, com coeficientes $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ e membro da direita $f(x,y)$ regulares em Ω, possui uma única solução. A demonstração é feita pelo método de aproximações sucessivas de Picard. A metodologia, como de hábito, consiste em transformar (3) em um sistema de equações diferenciais parciais e este em um sistema de equações integrais, equivalente, ao qual aplica-se o método de Picard. Será feita a transformação para um sistema a seguir.

Considere-se a mudança de variáveis:

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad w = \frac{\partial u}{\partial y}$$

em $Lu = f$, transformando-o no sistema:

$$(4) \qquad \left|\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial y} = f(x,y) - av - bw - cu \\ &\frac{\partial w}{\partial x} = f(x,y) - av - bw - cu \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = w \end{aligned}\right.$$

As condições sobre Γ são:

$$(5) \qquad u\big|_{\Gamma} = \varphi(x), \quad w\big|_{\Gamma} = \psi(x), \quad v\big|\Gamma = \zeta(x).$$

Para obter o sistema de equações integrais, considere a figura e $N = (x,y)$ um ponto no interior do retângulo $ABCD$ que contém Γ e contido no aberto Ω. Trace por N as características encontrando Γ em P e Q, sendo NP e NQ segmentos característicos. Integrando-se a primeira e terceira equação (4) ao longo de QN e a segunda equação (4) ao longo de PN, resulta:

$$(6) \qquad \left|\begin{aligned} &v(x,y) = \zeta(x) + \int_{g(x)}^{y} [f(x,y) - av - bw - cu]\, dy \\ &w(x,y) = \psi(x) + \int_{h(y)}^{x} [f(x,y) - av - bw - cu]\, dx \\ &u(x,y) = \varphi(x) + \int_{g(x)}^{y} w\, dy \end{aligned}\right.$$

Demonstra-se que (4) e (5) são equivalentes a (6). Aplica-se ao (6) o método de Picard obtendo-se a solução. Prova-se a unicidade.

Não será feita a demonstração de existência de (6) para o problema de Cauchy. Preferiu-se formular o problema de Goursat e resolvê-lo pelo mesmo processo mencionado de aproximações sucessivas. O leitor pode repetir, sem dificuldade, o método para o sistema (6).

PROBLEMA DE GOURSAT

Este consiste em determinar uma solução da equação $Lu = f$ em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$, quando os dados são conhecidos sobre curvas características. Relembre-se que a curva Γ do problema de Cauchy foi escolhida totalmente diferente. Considere a figura a seguir:

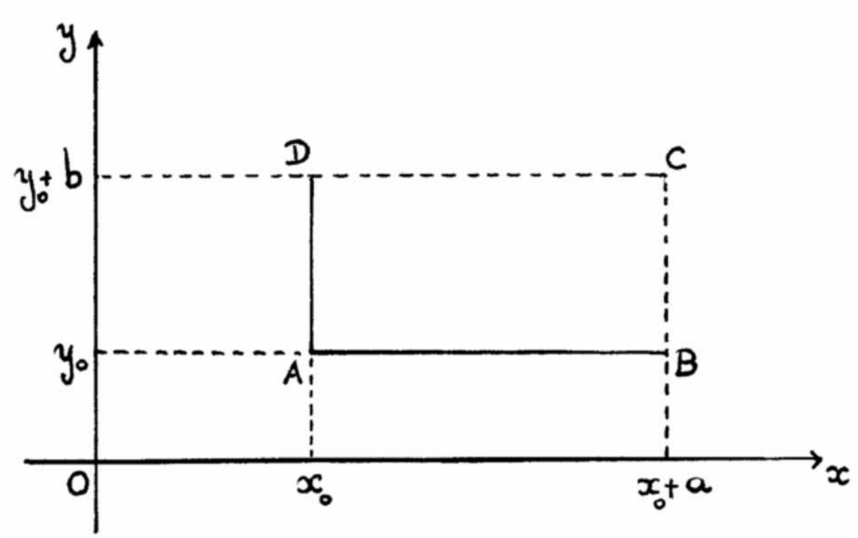


Fig. 2

Considere-se $\varphi(y)$ e $\psi(x)$ continuamente diferenciáveis, respectivamente, em $y_0 \leq y \leq y_0 + b$ e $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, a e b positivos. Formula-se o problema de Goursat como se segue.

$$
(7) \qquad \left| \begin{array}{l} Lu = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u(x_0, y) = \varphi(y) \quad \text{em} \quad y_0 \leq y \leq y_0 + b \\ u(x, y_0) = \psi(x) \quad \text{em} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a \end{array} \right.
$$

Note-se que os dados são conhecidos sobre os segmentos característicos $y_0 \leq y \leq y_0 + b$ e $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Será demonstrado que o problema de Goursat (7) possui uma única solução, pelo método de aproximações sucessivas. A metodologia é semelhante à descrita anteriormente, para o problema de Cauchy.

Considera-se a mudança de variáveis

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad w = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot$$

As novas variáveis serão u, v, w, obtendo-se o sistema (4) que será reescrito:

$$\text{(4) bis} \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial y} = f(x,y) - av - bw - cu \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x} = f(x,y) - av - bw - cu \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = w \end{array} \right.$$

As condições iniciais serão:

$$\text{(8)} \qquad u(x, y_0) = \psi(x), \quad v(x, y_0) = \psi'(x), \quad w(x_0, y) = \varphi'(y).$$

A forma integral de (4)bis e (8) será:

$$\text{(9)} \qquad \left| \begin{array}{l} v(x,y) = \psi'(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} (f - av - bw - cu)\, dy \\[2ex] w(x,y) = \varphi'(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} (f - av - bw - cu)\, dx \\[2ex] u(x,y) = \psi(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} w\, dy \end{array} \right.$$

Para entender o processo tome-se Ω igual ao retângulo $ABCD$ da Fig. 2. Assim, no sistema (9) tem-se x, y é um ponto de Ω.

Existência de Solução de (9) - Será demonstrada pelo método de aproximações sucessivas. De fato, considera-se como aproximações de ordem zero:

$$\text{(10)} \qquad v_0 = \psi'(x), \quad w_0 = \varphi'(y), \quad u_0 = \psi(x).$$

O sistema de aproximações sucessivas é definido, indutivamente, por:

$$
(11) \qquad \left| \begin{array}{l}
v_n(x,y) = v_0(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} (f - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1})\,dy \\[2ex]
w_n(x,y) = w_0(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} (f - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1})\,dx \\[2ex]
u_n(x,y) = u_0(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} w_{n-1}\,dy
\end{array} \right.
$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

A próxima etapa consiste em provar que a sucessão (v_n, w_n, u_n) converge, absoluta e uniformemente, no retângulo Ω

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x_0 \leq x \leq x_0 + a,\ y_0 \leq y \leq y_0 + b\}.$$

De (11) obtém-se o sistema de diferenças:

$$
(12) \qquad \left| \begin{array}{l}
v_{n+1} - v_n = -\displaystyle\int_{y_0}^{y} [a(v_n - v_{n-1}) + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]\,dy \\[2ex]
w_{n+1} - w_n = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} [a(v_n - v_{n-1}) + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]\,dx \\[2ex]
u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_{y_0}^{y} (w_n - w_{n-1})\,dy
\end{array} \right.
$$

Daí, resulta:

$$|v_1 - v_0| \leq \int_{y_0}^{y} [\,|f(x,y)| + \big(|a| + |b| + |c|\big)\big(|v_0| + |w_0| + |u_0|\big)]\,dy.$$

Representando-se por $M = \max\big(|a|, |b|, |c|\big)$ no retângulo e $K = \max(1, 3M)$, obtém-se:

$$|v_1 - v_0| \leq K \int_{y_0}^{y} \big(|f| + |v_0| + |w_0| + |u_0|\big)\,dy \leq K\,N(y - y_0)\,,$$

onde $N = 4\max\{|f|, |\varphi'|, |\psi|, |\psi'|\}$ e daí

$$|v_1 - v_0| \leq K\,N\,b \leq K\,A.$$

Analogamente,

$$|w_1 - w_0| \leq K\,A \quad \text{e} \quad |u_1 - u_0| < K\,A.$$

A próxima diferença será:

$$|v_2 - v_1| \leq \int_{y_0}^{y} |a||v_1 - v_0| + |b||w_1 - w_0| + |c||u_1 - u_0|\,dy.$$

Pela estimativa já calculada, obtém-se:

$$|v_2 - v_1| \leq AK \int_{y_0}^{y} \big(|a| + |b| + |c|\big)\,dy \leq A\,K^2(x - x_0 + y - y_0).$$

Daí calcula-se:

$$|v_3 - v_2| \leq A\,K^3 \int_{y_0}^{y} (x - x_0 + y - y_0)\,dy = A\,K^3 \left[\frac{(x - x_0 + y - y_0)^2}{2} - \frac{(x - x_0)^2}{2}\right].$$

Portanto, resulta:

$$|v_3 - v_2| \leq A\,K^3 \frac{(x - x_0 + y - y_0)^2}{2!}\,.$$

Procedendo-se indutivamente encontra-se:

$$|v_n - v_{n-1}| \leq A\,K^n \frac{(x - x_0 + y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Demonstra-se, por indução finita, que esta desigualdade vale para todo n. As mesmas desigualdades são válidas para w_n e u_n , obtendo-se:

$$\text{(13)} \qquad \left|\begin{array}{l} |v_n - v_{n-1}| \leq A\,K^n \dfrac{(x - x_0 + y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\[2ex] |w_n - w_{n-1}| \leq A\,K^n \dfrac{(x - x_0 + y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\[2ex] |u_n - u_{n-1}| \leq A\,K^n \dfrac{(x - x_0 + y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \end{array}\right.$$

para $n = 1, 2, \dots$.

Considere-se as séries de funções:

$$
(14) \qquad \left|
\begin{array}{l}
v_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n-1}) \\[2ex]
w_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (w_n - w_{n-1}) \\[2ex]
u_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1})
\end{array}
\right.
$$

Examinar-se-á a convergência da primeira (14) sendo análoga à análise das outras. De fato, resulta de $(13)_1$ que a série $(14)_1$ é majorada pela série

$$
(15) \qquad A + AK \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \frac{(x - x_0 + y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \, .
$$

Sendo $(x - x_0 + y - y_0)^{n-1} \leq (a + b)^{n-1}$, conclui-se que a série $(14)_1$ é dominada, em valor absoluto, pela série numérica convergente:

$$
A + AK \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \frac{(a+b)^{n-1}}{(n-1)!} \, .
$$

Note que esta série converge para o número

$$
A\big(1 + K \, e^{K(a+b)}\big).
$$

Portanto, a série $(14)_1$ converge absoluta e uniformemente no retângulo

$$
\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \; x_0 \leq x \leq x_0 + a, \; y_0 \leq y \leq y_0 + b\}
$$

para uma função contínua $v(x, y)$. Sendo as somas parciais da série $(14)_1$ iguais ao termo v_n , para todo n, conclui-se que a sucessão (v_n) de aproximações sucessivas converge absoluta e uniformemente no retângulo Ω para a função contínua $v(x, y)$.

Mutatis mutantis prova-se que as sucessões (w_n) e (u_n) convergem absoluta e uniformemente, no retângulo Ω, para as funções contínuas $w(x,y)$ e $u(x,y)$.

A convergência uniforme das sucessões (v_n), (w_n) e (u_n) autoriza tomar o limite em (11) quando $n \to \infty$. Assim, obtém-se v, w, u solução de (9). $\square$

Unicidade - Suponha-se que existam duas soluções (v, w, u) e $(\hat{v}, \hat{w}, \hat{u})$ do sistema (9). Considerando-se $U = u - \hat{u}$, $V = v - \hat{v}$ e $W - w - \hat{w}$, são soluções

$$(15) \qquad \left| \begin{aligned} &V(x,y) = -\int_{y_0}^{y} (aV + bW + cU)\, dy \\ &W(x,y) = -\int_{x_0}^{x} (aV + bW + cU)\, dx \\ &U(x,y) = -\int_{y_0}^{y} W(x,y)\, dy \end{aligned} \right.$$

As funções V, W, U são contínuas no retângulo fechado, logo aí limitadas. Conseqüentemente existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$(16) \qquad |U(x,y)| < \alpha, \qquad |V(x,y)| < \alpha, \qquad |W(x,y)| < \alpha$$

para todo (x, y) no retângulo.

Portanto, (15) e (16) obtém-se:

$$|V(x,y)| \leq \int_{y_0}^{y} \big(|a| + |b| + |c|\big)\alpha\, dy$$

ou

$$(17) \qquad |V(x,y)| \leq K\,\alpha(y - y_0) \leq K\,\alpha \frac{(x - x_0 + y - y_0)}{1!}\,.$$

De modo análogo obtém-se:

$$(18) \qquad |W(x,y)| \leq K\,\alpha \frac{(x - x_0 + y - y_0)}{1!}\,.$$

$$(19) \qquad |U(x,y)| \leq \frac{(x - x_0 + y - y_0)}{1!}\,.$$

Retornando à equação $(15)_1$, tomando o valor absoluto e empregando a estimativa (17) obtém-se:

$$|V(x,y)| \leq \alpha\, K^2 \frac{(x-x_0+y-y_0)^2}{2!}. \tag{20}$$

Por um processo análogo, empregando (18) e (19) obtém-se:

$$|W(x,y)| \leq \alpha\, K^2 \frac{(x-x_0+y-y_0)^2}{2!} \tag{21}$$

$$|U(x,y)| \leq \alpha\, K^2 \frac{(x-x_0+y-y_0)^2}{2!} \tag{22}$$

De modo indutivo, encontra-se:

$$\left|\begin{array}{l} |V(x,y)| \leq \alpha\, K^n \dfrac{(x-x_0+y-y_0)^n}{n!} \\[2ex] |W(x,y)| \leq \alpha\, K^n \dfrac{(x-x_0+y-y_0)^n}{n!} \\[2ex] |U(x,y)| \leq \alpha\, K^n \dfrac{(x-x_0+y-y_0)^n}{n!} \end{array}\right. \tag{23}$$

para $n = 1, 2, \dots$.

Observando-se as estimativas (23), conclui-se que V, W e U são dominadas, em valor absoluto, pelo termo geral da série (15), que é convergente em valor absoluto e uniformemente no retângulo. Logo seu termo geral converge para zero, o que implica:

$$V(x,y) = 0, \qquad W(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad U(x,y) = 0$$

no retângulo, provando a unicidade. $\square$

MÉTODO DE RIEMANN

O método de Riemann permite calcular explicitamente a solução do problema de Cauchy para o operador Lu, em função dos dados de Cauchy sobre uma curva γ. Sendo

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

com coeficientes regulares. Segue-se, como foi visto, que Lu é do tipo hiperbólico com as duas famílias de características dadas por

$$x = c \quad \text{e} \quad y = c.$$

Como foi visto anteriormente, considerando a curva γ regular e não interceptando cada característica em mais de um ponto, então o problema de Cauchy

$$(24) \qquad \left| \begin{array}{l} Lu = f \quad \text{em} \quad \Omega \\[2ex] u\Big|_\gamma = \varphi, \ \ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_\gamma = \psi \end{array} \right.$$

possui uma única solução. As hipóteses sobre φ, ψ, a, b, c são as fixadas. O método de demonstração é o de aproximações sucessivas de Picard, como foi feito para o problema de Goursat. No presente parágrafo será exposto o método de Riemann permitindo calcular explicitamente a solução u de (24) em função dos dados e da função de Riemann do referido problema. Posteriormente serão feitas aplicações à equação do telégrafo e à equação de vibrações transversais de uma corda elástica.

A primeira etapa do método consiste em representar o produto

$$(25) \qquad v\,Lu,$$

sendo $v(x,y)$ uma função real $C^1(\Omega)$, sob a forma de uma divergência para, a seguir, aplicar o lema de Gauss ou a fórmula de Riemann-Green. De modo preciso, determina-se duas funções M e N, de classe $C^1(\Omega)$, lineares em u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ tais que

$$(26) \qquad v\,Lu = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Isto equivale a dizer que $v\,Lu$ é a divergência do campo de vetores (M, N).

De fato, suponha-se que

$$M = \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u \quad \text{e} \quad N = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u,$$

com α, β, γ, δ determinadas de modo que se verifique a (26).

Obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u\right) =$$

$$(27) \qquad = (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\gamma + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\delta + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y}\right)u.$$

Portanto de (26) e (27), resulta:

$$(29) \qquad \alpha + \beta = v, \quad \gamma + \frac{\partial \alpha}{\partial y} = av, \quad \delta + \frac{\partial \beta}{\partial x} = bv$$

$$(30) \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = cv$$

Considerando-se, em particular

$$(31) \qquad \alpha = \beta = \frac{v}{2}$$

conclui-se de (29):

$$(32) \qquad \gamma = av - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \delta = bv - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot$$

Para que γ e δ dados por (32) satisfaçam à condição (30), deve-se ter:

$$(33) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(av - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(bu - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = cv$$

ou, v é solução da equação:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)v = 0, \tag{34}$$

denominada equação adjunta de $Lu = 0$.

O operador L^*v, definido pelo membro da direita de (34), denomina-se adjunto de Lu.

Considere-se uma solução particular v da equação $L^*v = 0$ e com esta função v defina M e N do modo seguinte:

$$M = \frac{v}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(av - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)u = u\left(av - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(uv)$$

$$N = \frac{v}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \left(bv - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)u = u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(uv)$$

Para calcular a solução do problema de Cauchy (24), guiar-nos-emos pela Fig. 3. Considere-se uma porção de curva γ representada pelo arco BC da Fig. 3. Será calculado o valor da solução $u(x, y)$ em A de coordenadas (x_0, y_0), como na Fig. 3. Supõe-se γ decrescente em $x > 0$, $y > 0$, tem-se C interseção de $x = x_0$ com γ e B de $y = y_0$ com γ. O problema de Cauchy será a determinação de $u(x, y)$ satisfazendo as condições:

$$\left|\begin{array}{l} Lu = f \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\[2ex] u = \varphi, \;\; \dfrac{\partial u}{\partial x} = \psi \quad \text{sobre o arco } BC \end{array}\right. \tag{35}$$

Supõe-se φ, ψ, a, b, c continuamente diferenciável e f contínua em $\mathbb{R}^2$.

Representa-se por Γ a fronteira de Ω, como na Fig. 3, orientada no sentido anti-horário. Suponha $f = 0$ para facilitar.

Considere-se a solução particular da equação adjunta $L^*v = 0$, sem condição inicial no momento. Como já foi verificado, define-se M e N por meio de v, obtendo-se a (28), isto é,

$$v\,Lu = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\cdot$$

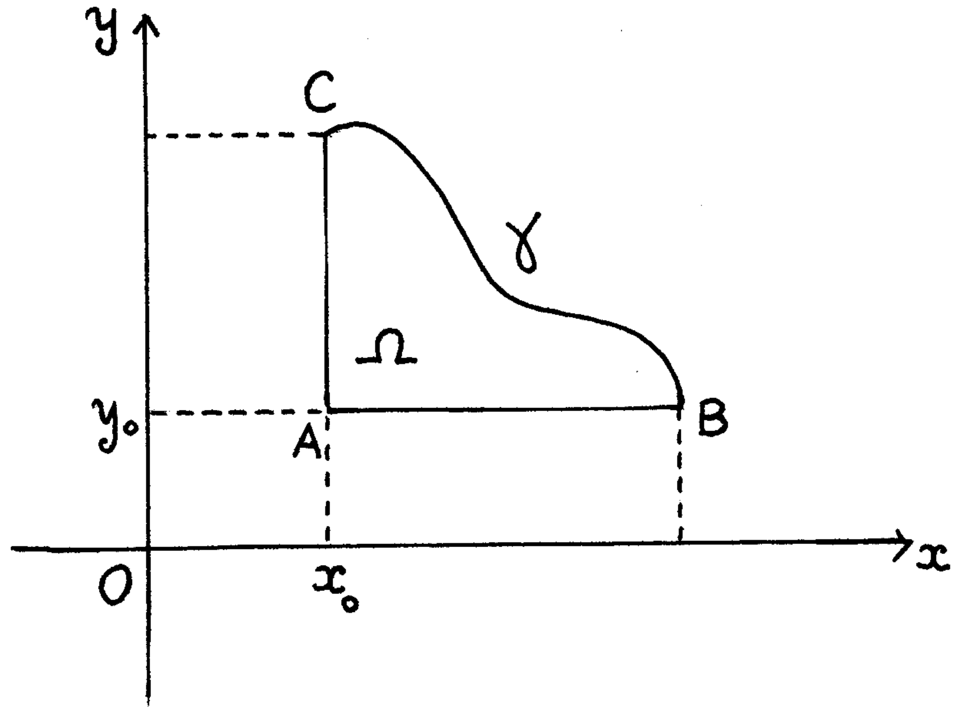


FIG. 3

Se u for a solução do problema de Cauchy (35), com $f = 0$, integrando-se sobre Ω obtém-se:

(36) $$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Observação 2: Se f não for zero, a (36) será igual a $\int_{\Omega} vf\,dxdy$.

Representa-se por $\int_{\Omega}$ a integral dupla sobre Ω. Aplicando-se em (36) a fórmula de Riemann-Green, obtém-se:

(37) $$\int_{\Gamma} M\,\nu_x\,d\Gamma + \int_{\Gamma} N\,\nu_y\,d\Gamma = 0,$$

sendo $\nu_x = \cos(\nu, x)$ e $\nu_y = \cos(\nu, y)$, sendo ν a normal externa a Γ fora dos pontos angulosos, veja Fig. 3.

Reescrevendo (37) obtém-se:

$$\begin{aligned}(38)\qquad &\int_{BC} M\nu_x\, d\Gamma + \int_{BC} N\nu_y\, d\Gamma + \int_{AB} M\nu_x\, d\Gamma + \\ &+ \int_{AB} N\nu_y\, d\Gamma + \int_{CA} M\nu_x\, d\Gamma + \int_{CA} N\nu_y\, d\Gamma = 0.\end{aligned}$$

Note-se que em (38) todas as integrais são curvilíneas.

Examinando-se ν_x , ν_y sobre as várias componentes de Γ, obtém-se:

Sobre BC: $\quad \nu_x\, d\Gamma = dy; \qquad \nu_y\, d\Gamma = -dx$

Sobre AB: $\quad \nu_x = 0; \qquad \nu_y\, d\Gamma = -dx$

Sobre CA: $\quad \nu_x\, d\Gamma = dy; \qquad \nu_y = 0.$

Observe que tem-se sobre Γ: $\cos(\nu, x)d\Gamma = dy$ e $\cos(\nu, y)d\Gamma = dx$. Em face dos cálculos sobre BC, CA e AB, reduz-se a (38) à forma:

$$(39)\qquad \int_{BC} M\, dy - \int_{BC} N\, dx - \int_{AB} N\, dx + \int_{CA} M\, dy = 0.$$

Substituindo-se M e N conhecidas em função da solução v de $L^*v = 0$, obtém-se:

$$(40)\qquad \int_{CA} M\, dy = \frac{1}{2}\big[uv\big]_C^A + \int_{CA} u\Big(av - \frac{dv}{dy}\Big)dy$$

$$(41)\qquad \int_{AB} N\, dx = \frac{1}{2}\big[uv\big]_A^B + \int_{AB} u\Big(bv - \frac{\partial v}{\partial x}\Big)dx$$

Sobre o arco CB são conhecidas u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ obtidas pelos dados de Cauchy φ e ψ. Assim, a (39) será simplificada se a solução particular v da equação adjunta $L^*v = 0$ anular as integrais nos membros da direita de (40) e (41), respectivamente. Para que tal aconteça, é suficiente que sobre o segmento AB da equação $y = y_0$ se tenha:

$$(42)\qquad b(x, y_0)v(x, y_0) - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_0) = 0$$

ou

$$v(x,y_0)=\exp\biggl(\int_{x_0}^{x} b(s,y_0)\,ds\biggr).$$

Sobre o segmento AC de equação $x = x_0$ deve-se ter:

$$a(x_0,y)v(x_0,y)-\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y)=0 \tag{43}$$

ou

$$v(x_0,y)=\exp\biggl(\int_{y_0}^{y} a(x_0,s)\,ds\biggr).$$

Portanto, a solução v do problema adjunto $L^*v = 0$ não será mais arbitrária, pois deverá satisfazer às condições (42) sobre AB e (43) sobre CA.

Aqui chega-se ao ponto mais significativo do método de Riemann. Represente-se por $R(x, y, x_0, y_0)$ a solução do problema adjunto $L^*v = 0$, satisfazendo à condição (42) sobre AB e (43) sobre CA. Se assim for, $R(x, y, x_0, y_0) = 1$ em A. Esta solução $R(x, y, x_0, y_0)$ do problema adjunto $L^*v = 0$, denomina-se FUNÇÃO DE RIEMANN do problema de Cauchy (24) para Lu.

É oportuno observar que AB e CA são segmentos característicos de Lu. Portanto, a função de Riemann é solução de um problema de Goursat para o adjunto de Lu, cujas condições iniciais sobre os segmentos característicos AB e CA são dadas em função dos coeficientes $b(x, y)$ e $a(x, y)$ de Lu, veja (42) e (43). A solução é igual a um em A.

De modo simbólico, a função de Riemann seria a função v solução do problema de Goursat:

$$\left|\begin{array}{l} L^*v=0 \quad \text{em} \quad \Omega \\[2ex] v=\exp\biggl(\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(s,y_0)\,ds\biggr) \quad \text{em} \quad AB \\[2ex] v=\exp\biggl(\displaystyle\int_{y_0}^{y} a(x_0,s)\,ds\biggr) \quad \text{em} \quad CA \\[2ex] v=1 \quad \text{em} \quad A \end{array}\right. \tag{44}$$

Portanto se R for a função de Riemann do problema obtém-se:

$$\int_{CA} M\,dx = \frac{1}{2}\big[Ru\big]_C^A \tag{45}$$

$$\int_{AB} N\,dy = \frac{1}{2}\big[Ru\big]_A^B \tag{46}$$

Substituindo-se (45) e (46) em (39), obtém-se:

$$\frac{1}{2}\big[Ru\big]_C^A - \frac{1}{2}\big[Ru\big]_A^B + \int_{BC} M\,dy - \int_{BC} N\,dx = 0. \tag{47}$$

Sendo $R = 1$ em A, obtém-se de (47) a forma explícita da solução do problema de Cauchy (24), dada por:

$$u_A = \frac{1}{2}\big[(Ru)_B + (Ru)_C\big] - \int_{BC} M\,dy + \int_{BC} N\,dx. \tag{48}$$

Analisando (48) observa-se que u é conhecida em B e C. As funções M e N são conhecidas sobre CB porque u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ o são. Assim, (48) dá explicitamente a solução do problema de Cauchy (24) para qualquer ponto A do domínio de existência, fora de γ, onde são conhecidos os dados de Cauchy. $\square$

Denonima-se (48) FÓRMULA DE RIEMANN para o problema de Cauchy (24).

A seguir serão feitas aplicações do método de Riemann para o estudo da Equação do Telégrafo e da Equação de Vibrações Transversais de uma Corda Elástica.

EQUAÇÃO DO TELÉGRAFO

Nas equações diferenciais parciais da Física Matemática representa-se a variável y por t que representa o parâmetro tempo. Assim, com uma conveniente mudança de escala, a equação que modela o fluxo de eletricidade em um fio metálico é dada por

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\frac{\partial V}{\partial t}\,, \quad -\infty < x < +\infty,\;\; t > 0,$$

sendo $V(x,t)$ o potencial elétrico. Trata-se de uma equação hiperbólica. Tem-se

$$LV = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad F = -2\frac{\partial V}{\partial t}$$

é uma equação linear. Em geral, nos problemas de Física Matemática, procura-se a solução do problema de Cauchy fixando-se um dado instante quando inicia-se a observar o fenômeno. Escolhe-se $t = 0$. Portanto, fixa-se V e $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ quando $t = 0$. Então a curva γ do problema de Cauchy é

$$\gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ \,;\; t = 0\}.$$

Note-se que $\mathbb{R}^2_+$ é o semiplano (x,t) com $t \geq 0$.

Estuda-se nesta seção o problema de Cauchy:

$$(49) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{em} \quad t > 0, \;\; -\infty < x < +\infty \\[2ex] V(x,0) = \chi(x) \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial V}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \quad \text{em} \quad -\infty < x < +\infty \end{array} \right.$$

sendo χ e ψ continuamente diferenciáveis.

Procura-se a solução sob a forma

$$(50) \qquad V(x,t) = e^{-t}\, U(x,t).$$

Substituindo-se em $(49)_1$, encontra-se:

$$(51) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U.$$

As condições iniciais $(49)_2$ mudam para

$$(52) \qquad U(x,0) = \chi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \chi(x) + \psi(x).$$

Para aplicar o método de Riemann, considere-se a transformação de coordenadas $\tau\colon (x,t) \to (X,Y)$ definida por:

$$2X = x + t, \qquad 2Y = x - t. \tag{53}$$

Fazendo-se o cálculo em (51) e representando por $u(X,Y)$ a nova incógnita obtém-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + u = 0 \tag{54.}$$

Para saber como mudam os dados iniciais, observe-se que a reta $t = 0$ do plano (x,t) é transformada, por (53), na bissetriz $Y = X$ do plano X, Y. Portanto, o problema de Cauchy para (54) tem seus dados sobre a curva γ que é a bissetriz $Y = X$. Tem-se:

$$u(X,X) = \chi(2X), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial X}(X,X) - \frac{\partial u}{\partial Y}(X,X)\right) = \psi(2X) + \chi(2X). \tag{55}$$

Tem-se a imagem geométrica dada pela Fig. 4.

Deve-se calcular, com a fórmula de Riemann (48) a solução de (54) com dados (55) sobre a diagonal $Y = X$. Para tal necessário se torna calcular a função de Riemann do problema.

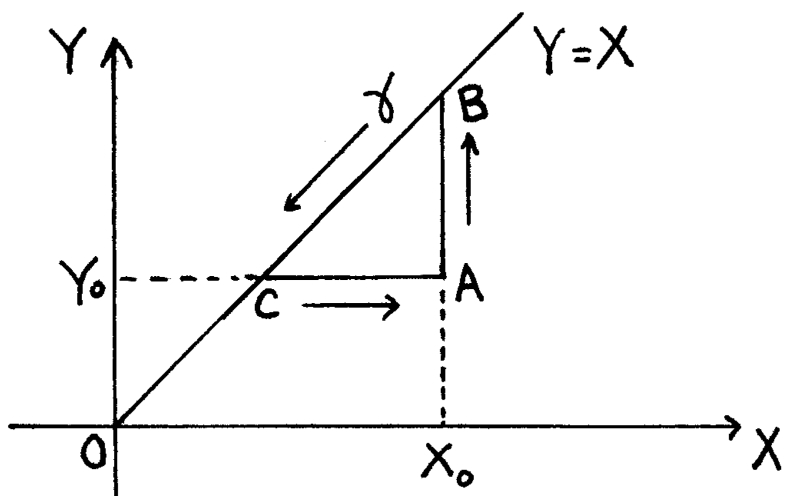


Fig. 4

Note-se que em Lu dado por (54) tem-se $a = b = 0$, veja (24). Portanto o operador adjunto $L^*v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y} + v$. A equação adjunta será:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y} + v = 0. \tag{56}$$

A função de Riemann será tal que v é solução de (56) com $v = 1$ em A, veja Fig. 4. Note que A é a interseção das características $X = X_0$ e $Y = Y_0$. O problema de Goursat para (56) tem dados $v = 1$ em AB e $v = 1$ em CA, veja (44) para o cálculo da função de Riemann. Considere-se o produto

$$\lambda = (X - X_0)(Y - Y_0), \tag{57}$$

procurando-se a solução de (56) tal que

$$R(X, Y, X_0, Y_0) = \varphi(\lambda) \tag{58}$$

sendo $\varphi(0) = 1$. Fazendo-se a mudança de variáveis (57) na equação (56), obtém-se:

$$\lambda \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{d\varphi}{d\lambda} + \varphi(\lambda) = 0, \tag{59}$$

com a condição inicial

$$\varphi(0) = 1. \tag{60}$$

Trata-se de uma equação de Bessel. O ponto $\lambda = 0$ é um ponto singular. Calcula-se, a seguir, uma solução analítica de (59), (60). Considere-se a série de potências

$$\varphi(\lambda) = 1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n + \dots \tag{61}$$

cujos coeficientes são determinados de modo que (61) seja solução de (59). Substituindo-se em (59), obtém-se a relação de recorrência:

$$n(n-1)a_n + na_n + a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

ou

$$n^2\, a_n + a_{n-1} = 0.$$

Logo a função de Riemann é:

$$\varphi(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(1.2)^2} - \frac{\lambda^3}{(1.2.3)^2} + \cdots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{(n!)^2} + \ldots$$

De modo explícito, tem-se:

$$R(X, Y, X_0, Y_0) = 1 - \frac{(X - X_0)(Y - Y_0)}{1^2} + \frac{[(X - X_0)(Y - Y_0)]^2}{(1.2)^2} + \ldots$$

A solução da equação dada pela fórmula de Riemann é:

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{1}{2}\Big[(uR)_B + (uR)_C\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\int_{BC} R\left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right) dX - \frac{1}{2}\int_{BC} u\left(\frac{\partial R}{\partial X} - \frac{\partial R}{\partial Y}\right) dX \end{aligned} \tag{62}$$

porque $a = b = 0$ e $dX = dY$ em BC.

Tem-se

$$R = \varphi(\lambda), \quad \frac{\partial R}{\partial X} = \frac{d\varphi}{d\lambda}(Y - Y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial R}{\partial Y} = \frac{d\varphi}{d\lambda}(X - X_0), \tag{63}$$

$R = 1$ em B e C.

Logo, encontra-se de (62):

$$u_A = \frac{1}{2}(u_B + u_C) + \frac{1}{2}\int_{BC} \varphi(\lambda)\left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right) dX + \frac{Y_0 - X_0}{2}\int_{BC} \chi(X)\varphi'(\lambda)\, dX$$

porque $Y = X$ sobre CB e $u(X, X) = \chi(X)$. De (55), obtém-se:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}(u_B + u_C) + \int_{BC} \varphi(\lambda)\left(\psi(2X) + \chi(2X)\right) dX - \frac{t_0}{2}\int_{BC} \chi(2X)\varphi'(\lambda) dX.$$

A solução da equação do telégrafo é:

$$V(x_0, t_0) = e^{-t_0}\, u(x_0, t_0)$$

que converge para zero se $t_0 \to \infty$. $\square$

CORDAS VIBRANTES

Com a convenção feita sobre as variáveis y e t, obtém-se a equação diferencial parcial de vibrações transversais de uma corda elástica, dada do modo seguinte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Representa-se por $u(x,t)$ a deformação da corda no instante t. Tem-se o seguinte problema de Cauchy:

$$(64) \qquad \left| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{em} & -\infty < x < +\infty \text{ e } t > 0 \\[2ex] u(x,0) = \varphi(x), \ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \text{em} & -\infty < x < +\infty \end{array} \right.$$

Note-se que os dados de Cauchy são sobre a curva

$$\gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ \,;\ t = 0\}$$

isto é, o eixo dos x.

A equação $(64)_1$ foi a primeira equação diferencial parcial estudada do ponto de vista matemático. Salienta-se a contribuição de Jean d'Alembert que, pela primeira vez, exibiu uma forma explícita para a solução do problema (64), conhecida por Fórmula de d'Alembert. Usando o método de Riemann reencontra-se a fórmula d'Alembert.

Inicia-se fazendo uma mudança de coordenadas

$$\tau \colon (x,t) \to (X,Y)$$

sendo

$$X = x + kt \quad \text{e} \quad Y = x - kt. \tag{65}$$

O k que aparece em $(64)_1$ é uma constante positiva. Por meio de (65) a equação $(64)_1$ transforma-se em

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0 \tag{66}$$

que é uma equação hiperbólica, cujas características são as retas $X = c$, $Y = c$.

A reta $t = 0$ transforma-se, por (65), na bissetriz $Y = X$ do primeiro quadrante do plano $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (X, Y). Veja Fig. 5.

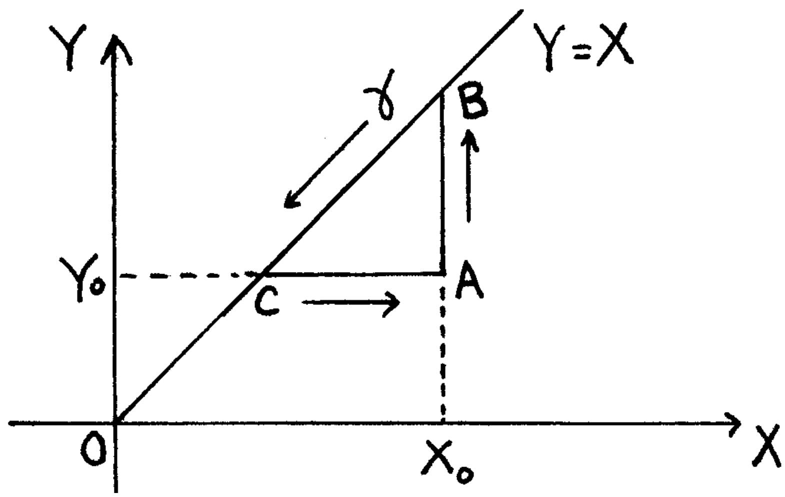


Fig. 5

Os dados de Cauchy serão:

$$u(X, X) = \varphi(X) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = k\frac{\partial u}{\partial X}(X, X) - k\frac{\partial u}{\partial Y}(X, X) = \psi(X). \tag{67}$$

Desta forma o problema de Cauchy (64) transforma-se no seguinte:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0 \\[2ex] u(X, X) = \varphi(X) \quad \text{e} \quad k\dfrac{\partial u}{\partial X}(X, X) - k\dfrac{\partial u}{\partial Y}(X, X) = \psi(X) \end{array} \right. \tag{68}$$

Supõe-se que φ e ψ continuamente diferenciáveis em $-\infty < x < +\infty$.

Resolve-se o problema de Cauchy (68) pelo método de Riemann. De fato, tem-se

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\,, \tag{69}$$

logo $a = c = b = 0$, veja (24), o que traz ótimas simplificações. O adjunto de L é o operador

$$L^* v = \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y}\,\cdot \tag{70}$$

A fórmula de Riemann (48) é dada por:

$$u_A = \frac{1}{2}\left[(uR)_B + (uR)_C\right] + \int_{BC} (N - M)\, dX \tag{71}$$

porque sobre BC tem-se $Y = X$.

Sendo $a = b = 0$, obtém-se:

$$N - M = -\frac{v}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial Y} - \frac{\partial v}{\partial X}\right). \tag{72}$$

Resta conhecer a função de Riemann que vai caracterizar a solução v da equação adjunta, logo ficam conhecidas M e N sobre BC.

Para calcular a função de Riemann do problema de Cauchy (68), observe que no presente caso $a = b = 0$, logo a solução R do problema de Goursat (44) é $R(x, y, x_0, y_0) = 1$ em todo ponto, isto é, a função de Riemann é a identidade. Logo, (72) reduz-se a

$$N - M = +\frac{1}{2k}\,\psi(X). \tag{73}$$

Portanto, de (35), sendo $R \equiv 1$, a (71) toma a forma:

$$u_A = \frac{1}{2}(u_B + u_C) + \frac{1}{k}\int_{BC} \psi(\lambda)\, d\lambda. \tag{74}$$

Tem-se B é o ponto (X, X) e C é o ponto (Y, Y). Logo $u_B = u(X, X) = \varphi(X)$ e $u_C = u(Y, Y) = \varphi(Y)$. Tem-se A é o ponto (X, Y) e portanto, a solução é:

$$u(X, Y) = \frac{1}{2}\left[\varphi(X) + \varphi(Y)\right] + \frac{1}{2k}\int_X^Y \psi(\lambda)\, d\lambda.$$

Sendo $X = x + kt,\ Y = x - kt$, obtém-se, pelo método de Riemann, a solução explícita do problema de Cauchy (64):

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x + kt) + \varphi(x - kt)\right] + \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} \psi(\lambda)\, d\lambda \tag{75}$$

que é a conhecida fórmula d'Alembert ou solução de d'Alembert. $\square$

A seguir será feita uma interpretação da solução de d'Alembert. No instante em que observa-se a deformação de uma corda perturbada, observa-se o gráfico $\varphi(x) = u(x, 0)$ que denomina-se configuração inicial. Para interpretar as sucessivas configurações supõe-se que $\psi = 0$. Assim a solução de

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em} \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\[2ex] u(x, 0) = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \end{array}\right. \tag{76}$$

será, por intermédio da solução de d'Alembert, dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x + kt) + \varphi(x - kt)\right]. \tag{77}$$

Note-se que $\varphi(x - kt)$ obtida de $\varphi(x)$ por meio de uma translação kt na direção positiva do eixo dos x. Analogamente, $\varphi(x + kt)$ é obtida de $\varphi(x)$ após uma translação $-kt$ na direção negativa do eixo dos x. Portanto $\varphi(x - kt)$ é onda de configuração inicial $\varphi(x)$ que se propaga na direção positiva do eixo x, com velocidade de propagação k. Ela denomina-se onda progressiva. Semelhantemente, $\varphi(x+kt)$ é a onda $\varphi(n)$ se propagando na direção negativa do eixo x, com velocidade k. Esta denomina-se onda regressiva. A solução de d'Alembert, quando $\psi = 0$, é a média aritmética das duas ondas.

Note-se que (77), como solução de $(76)_1$, deve ser duas vezes continuamente diferenciável em $-\infty < x < +\infty$. Será escolhida no presente exemplo uma função C^∞ em $\mathbb{R}$, nula fora de um intervalo fechado. Escolheu-se esta função pois aparece em outras situações significantes.

Considere-se a função

$$\rho(x) = \left| \begin{array}{lll} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se} & |x| < 1 \\ 0 & \text{se} & |x| \geq 1 \end{array} \right.$$

cujo gráfico é:

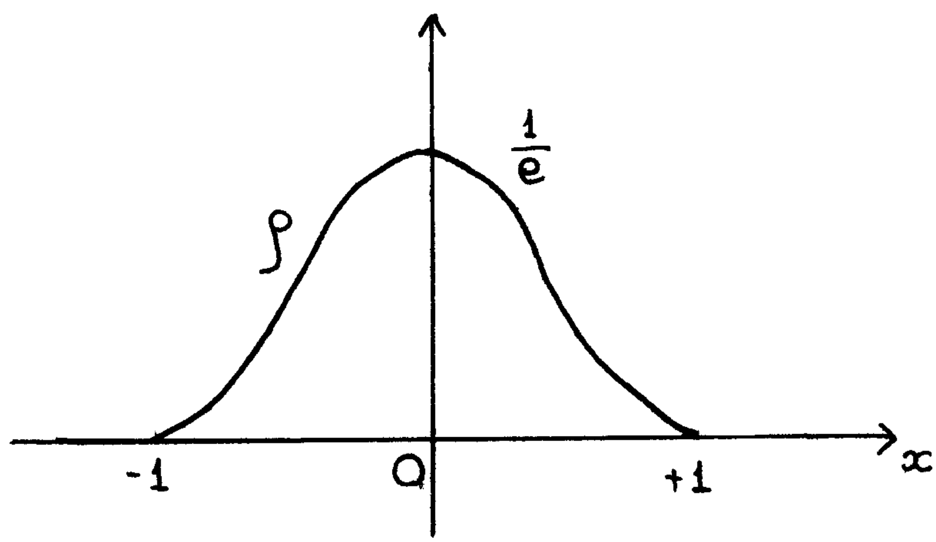


Fig. 6

Esta função é $C^\infty(\mathbb{R})$ e se anula no exterior do intervalo fechado $-1 \leq x \leq +1$. Ela pode ser considerada como configuração inicial $\varphi(x)$. A solução de d'Alembert seria:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\rho(x+kt) + \rho(x-kt)].$$

Ter-se-ia:

$$\rho(x+kt) = \begin{vmatrix} \exp\left(-\dfrac{1}{1-(x+kt)^2}\right) & \text{se} \quad -1 < x+kt < +1 \\ 0 & \text{se} \quad |x+kt| \geq 1 \end{vmatrix}$$

$$\rho(x-kt) = \begin{vmatrix} \exp\left(-\dfrac{1}{1-(x-kt)^2}\right) & \text{se} \quad -1 < x-kt < +1 \\ 0 & \text{se} \quad |x-kt| \geq 1 \end{vmatrix}$$

Será analisado para os instantes de tempo $t_n = \dfrac{n}{2k}$, $\quad n = 0, 1, 2, 3.$

- Se $n = 0$, $t = 0$ e a solução

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\rho(x) + \rho(x)\right] = \rho(x)$$

e a configuração inicial é a da função $\rho(x)$ cujo gráfico é o da Fig. 6.

- Se $n = 1$, $t_1 = \dfrac{1}{2a}$ e $x \pm kt = x \pm \dfrac{1}{2}$.

Tem-se:

$$\rho\Big(x+\frac{1}{2}\Big) = \begin{vmatrix} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right) & \text{se} \quad -\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{se} \quad |x+\dfrac{1}{2}| \geq 1 \end{vmatrix}$$

$$\rho\Big(x-\frac{1}{2}\Big) = \begin{vmatrix} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\right) & \text{se} \quad -\dfrac{1}{2} < x < +\dfrac{3}{2} \\ 0 & \text{se} \quad |x-\dfrac{1}{2}| \geq 1 \end{vmatrix}$$

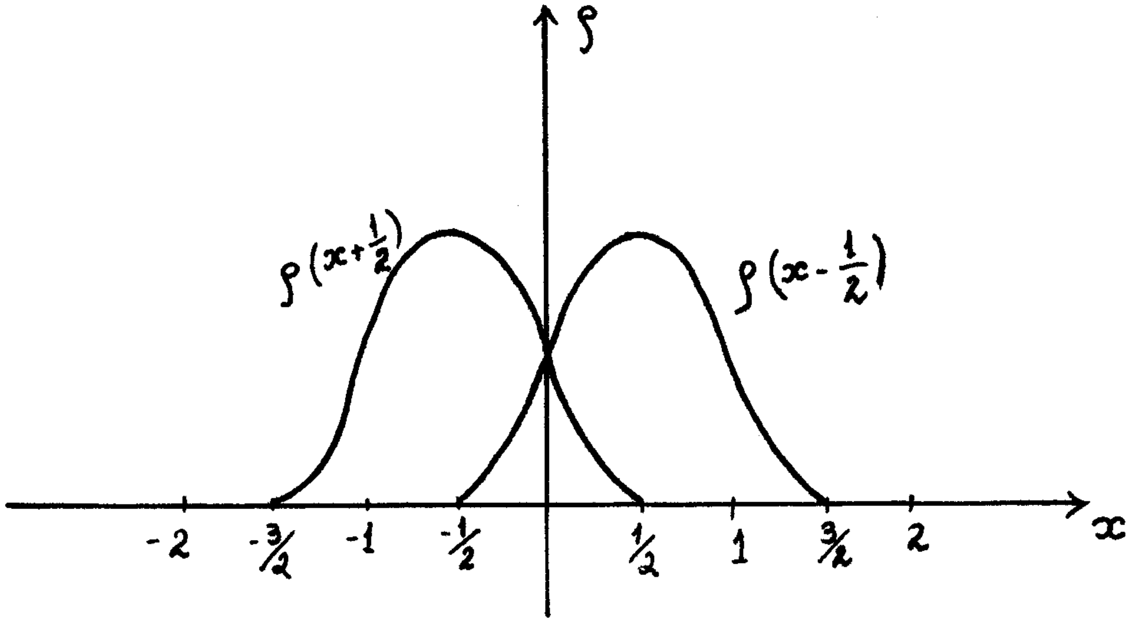


FIG. 7

- $n = 2$, $t_2 = \dfrac{1}{k}$ e $x \pm kt = x \pm 1$

Obtém-se:

$$\rho(x+1) = \left|\begin{array}{lll} \exp\left(-\dfrac{1}{1-(x+1)^2}\right) & \text{se} & -2 < x < 0 \\ 0 & \text{se} & |x+1| \geq 1 \end{array}\right.$$

$$\rho(x-1) = \left|\begin{array}{lll} \exp\left(\dfrac{1}{1-(x-1)^2}\right) & \text{se} & 0 < x < +2 \\ 0 & \text{se} & |x-1| \geq 1 \end{array}\right.$$

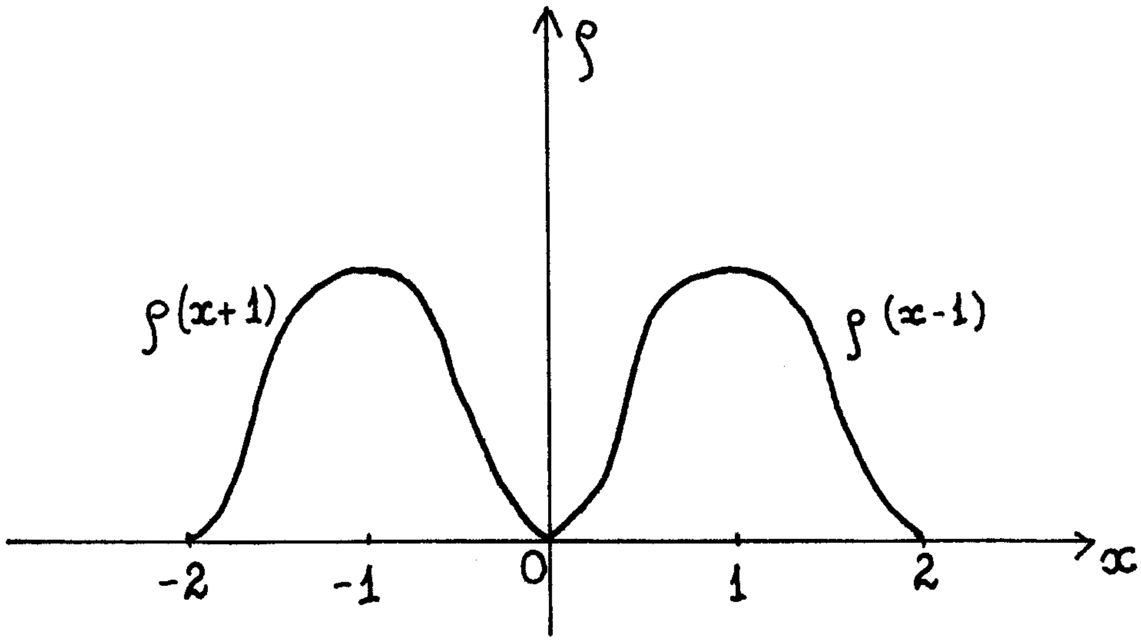


FIG. 8

- $n = 3$, $t_3 = \dfrac{3}{2a}$ e $x \pm kt = x \pm \frac{3}{2}$

Resulta:

$$\rho\Big(x + \frac{3}{2}\Big) = \left| \begin{array}{ll} \exp\left(- \dfrac{1}{1 - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2} \right) & \text{se} \quad -\dfrac{5}{2} < x < +\dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{se} \quad |x + \dfrac{3}{2}| \geq 1 \end{array} \right.$$

$$\rho\Big(x - \frac{3}{2}\Big) = \left| \begin{array}{ll} \exp\left(- \dfrac{1}{1 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \right) & \text{se} \quad +\dfrac{1}{2} < x < +\dfrac{5}{2} \\ 0 & \text{se} \quad |x - \dfrac{3}{2}| \geq 1 \end{array} \right.$$

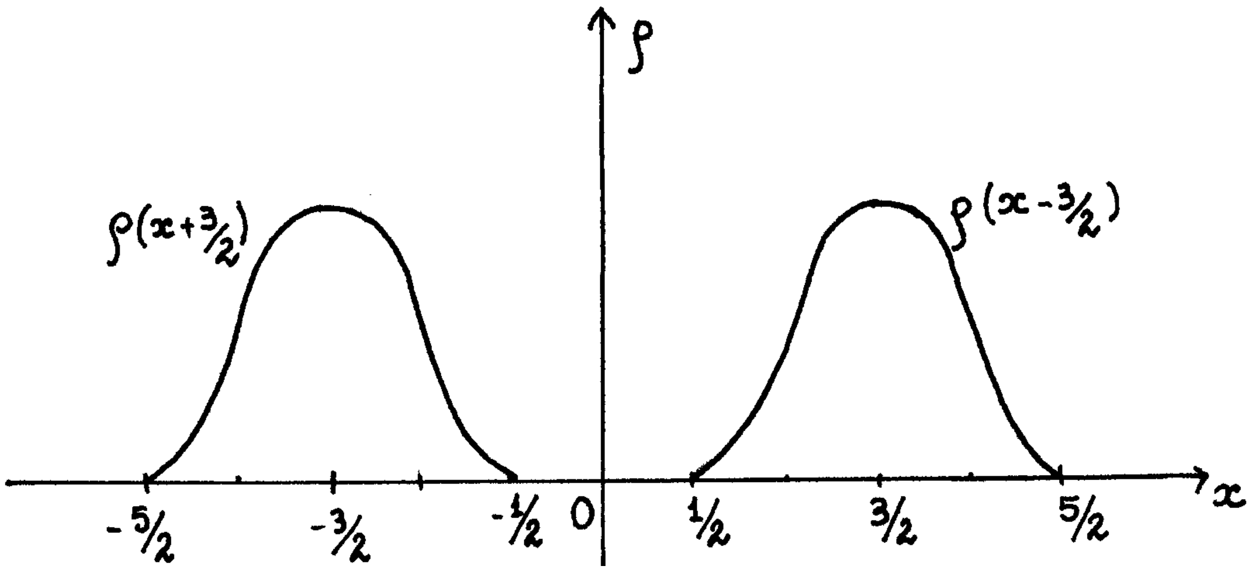


FIG. 9

PRINCÍPIO DE DUHAMEL

Será examinado o caso do operador linear

$$Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\cdot$$

Considera-se o problema de Cauchy

$$(78)\qquad \left|\begin{array}{l} Lu(x,t) = h(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = 0 \text{ e } \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad -\infty < x < +\infty. \end{array}\right.$$

Note-se que sendo L um operador linear, sem perda de generalidade, considera-se com condições iniciais nulas.

O problema de Cauchy (*) será resolvido por meio do princípio de Duhamel, o qual é análogo ao método de Lagrange de variação dos parâmetros empregado no estudo de equações diferenciais ordinárias lineares dotadas de segundo membro. Ele será empregado, também, no Capítulo 4 para resolver o problema (78) quando $Lu(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

De fato, o método consiste em determinar a solução do problema (78) sob a forma:

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t,s)\,ds, \tag{79}$$

sendo $w(x,t,s)$, para cada $s \geq 0$ fixo, solução do problema de Cauchy:

$$\left| \begin{array}{l} Lw(x,t,s) = 0 \quad \text{para} \quad t \geq s \\[2ex] w(x,s,s) = 0, \quad w_t(x,s,s) = h(x,s) \end{array} \right. \tag{80}$$

Note-se que $s \geq 0$ é um parâmetro e (80) é um problema de Cauchy em $t = s$. Suponha-se $h(x,t)$ duas vezes continuamente diferenciável e limitada em $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$. É simples verificar que se $w(x,t,s)$ for solução de (80), então $u(x,t)$ definida por (79) é solução de (78).

Então, considerando a função

$$v(x,t,s) = w(x,t+s,s)$$

conclui-se que $v(x,t,s)$ é solução do problema de Cauchy:

$$\left| \begin{array}{l} Lv(x,t,s) = 0 \quad \text{para} \quad t \geq 0 \\[2ex] v(x,0,s) = 0, \quad v_t(x,0,s) = h(x,s) \end{array} \right. \tag{81}$$

A solução deste problema é dada pela fórmula de D'Alembert (75), com $\varphi = 0$, $\psi = h$, isto é,

$$v(x,t,s) = \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} h(\xi,s)\,d\xi.$$

Substituindo $v(x,t-s,s) = w(x,t,s)$ em (79) obtém-se a solução de (78) dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2k} \int_0^t \int_{x-k(t-s)}^{x+k(t-s)} h(\xi,s)\,d\xi\,ds. \qquad \square$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

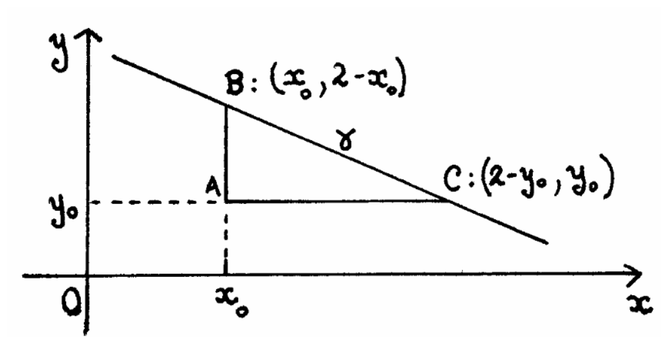
1. Usando o método de Riemann, resolver o seguinte problema de Cauchy

$$(*) \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ u(t, 2-t) = 3t \qquad 0 \leq t \leq 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 2-t) = t + 2 \end{array}\right.$$

SOLUÇÃO:

Identificando o problema (*) na forma dada em (24), observa-se que $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$ e que a curva γ é dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2$$



Então, a função de Riemann v solução do problema adjunto dado pela fórmula (44)

$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 & \text{em} & \mathbb{R}^2, \\ v = 1 & \text{em} & AC \\ v = 1 & \text{em} & AB \\ v = 1 & \text{em} & A \end{array}\right. \qquad \text{obtém-se que } v(x, y) = 1$$

Pela fórmula (48) obtém-se:

$$\text{(i)} \qquad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\big(u(x_0, 2-x_0) + u(2-y_0, y_0)\big) + \int_{BC} M\,dy - N\,dx.$$

De (34.1), obtém-se que em BC

$$M = \frac{t-1}{2}, \quad N = \frac{t+2}{2}\cdot$$

Logo,

$$\text{(ii)} \qquad \begin{aligned} \int_{BC} M\,dy - N\,dx &= \int_{x_0}^{2-y_0} \left[\frac{1}{2}(t-1)(-1) - \frac{1}{2}(t+2)\cdot 1\right] dt \\ &= \left(\frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{(2-y_0)^2}{2} + \frac{2-y_0}{2}\right) \end{aligned}$$

e como B e C são pontos de γ, tem-se

$$\text{(iii)} \qquad u(x_0, 2-x_0) = 3x_0 \qquad \text{e} \qquad u(2-y_0, y_0) = 3(2-y_0).$$

De (ii) e (iii) em (i), tem-se que

$$u(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} - \frac{(2-y_0)^2}{2} + 2x_0 - y_0 + 2 \quad \text{é a solução.}$$

Como (x_0, y_0) é arbitrário, vem que

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{(2-y)^2}{2} + 2x - y + 2. \qquad \square$$

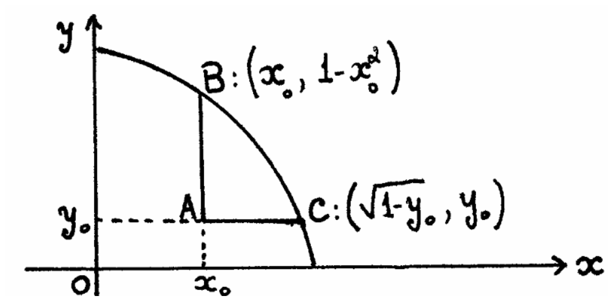
2. Usando o método de Riemann, resolver:

$$(*) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \text{no primeiro quadrante} \\[2ex] u(t, 1-t^2) = 2t^2 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}\,(t, 1-t^2) = t \qquad 0 \le t \le 1 \end{array} \right.$$

SOLUÇÃO:

Considerando (*) na forma dada em (24), observa-se que os coeficientes do operador L, são $a = b = c = 0$ e que a curva γ é dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$



Como no exercício 1, observa-se que a função de Riemann v é dada por $v(x, y) = 1$. Pela fórmula (48), obtém-se que a solução (*) no ponto A é dada por:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(u(x_0, 1 - x_0^2) + u(\sqrt{1 - y_0}, y_0)\right) + \int_{BC} M\,dy - N\,dx.$$

De (34.1), observa-se que em BC, curva contida em γ, tem-se $M = -\dfrac{3}{4}$ e $N = \dfrac{t}{2}\cdot$

Então:

$$\int_{BC} M\,dy - N\,dx = \int_{x_0}^{\sqrt{1-y_0}} \left(\frac{3t}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = \frac{1 - y_0}{2} - \frac{x_0^2}{2}\cdot$$

Como B e C são pontos de γ, vem:

$$u(x_0, 1 - x_0^2) = 2x_0^2 \qquad \text{e} \qquad u(\sqrt{1 - y_0}, y_0) = 2(1 - y_0).$$

Logo, a solução de (*) é dada por:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(2x_0^2 + 2(1 - y_0)\right) + \frac{1 - y_0}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} - \frac{3}{2}\,y_0 + \frac{3}{2}\cdot$$

Como (x_0, y_0) é arbitrário, a solução é:

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y}{2} + \frac{2}{3}\cdot \qquad \square$$

3. Determine a solução do seguinte problema de Cauchy:

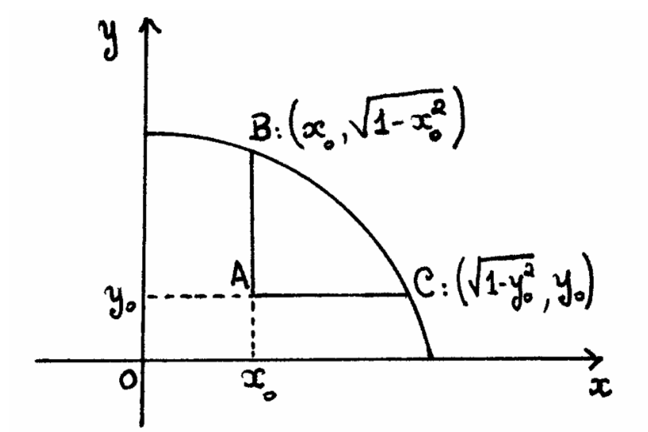
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\[2ex] u/\gamma = \varphi \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}/\gamma = \psi \end{array}\right.$$

onde

$$\gamma : \begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}\,, \qquad \begin{array}{l} \varphi(t) = \cos t \\ \psi(t) = 2 \operatorname{sen} t \end{array}$$

SOLUÇÃO:

Usando o método de Riemann, observa-se que a função de Riemann v é dada por $v(x, y) = 1$



De (34.1), tem-se que em BC contido em γ, vem:

$$M = \frac{1}{2} + \cos t, \qquad N = \operatorname{sen} t.$$

Também, como B e C são pontos de γ,

$$u\big(x, \sqrt{1 - x_0^2}\big) = \sqrt{1 - x_0^2}\,, \qquad u\big(\sqrt{1 - y_0^2}, y_0\big) = y_0\,.$$

Pela fórmula (48):

$$\text{(i)} \qquad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - x_0^2} + y_0\right) + \int_{BC} M\,dy - N\,dx$$

e

$$\text{(ii)} \qquad \int_{BC} M\,dy - N\,dx = \int_{\text{arc sen } x_0}^{\text{arc sen } \sqrt{1-y_0^2}} -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t - 2\,\text{sen}\,t\cos t\,dt =$$

$$= x_0^2 + y_0^2 - 1 + \frac{y_0}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x_0^2}\,.$$

De (i) e (ii), a solução é:

$$u(x,y) = x^2 + y^2 + y - 1. \qquad \square$$

4. Calcule a solução do seguinte problema de Cauchy:

$$(*) \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ u(t, 3-t) = t+1 \qquad 0 \le t \le 3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\,(t, 3-t) = 2t+3 \end{array}\right.$$

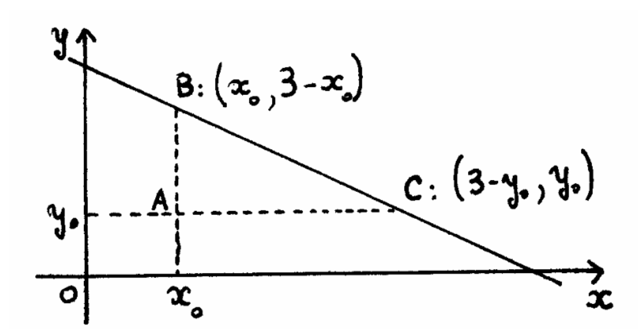
SOLUÇÃO:

Considerando (*) na forma dada em (24) observa-se que os coeficientes do operador L são: $a = 2$, $b = c = 0$ e que a curva γ é dada por:

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3-t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 3.$$

Logo, a função de Riemann v é solução do problema

$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 & & \\ v = e^{\int_{y_0}^{y} 2dS} & \text{em} & AB \\ v = 1 & \text{em} & AC \\ v = 1 & \text{em} & A \end{array}\right.$$



Então:

$$v(x,y) = e^{2(y-y_0)}.$$

De (34.1) tem-se que em BC,

$$M = 2(t+1)e^{2(3-t-y_0)} \quad \text{e} \quad N = \frac{2t+3}{2}\, e^{2(3-t-y_0)}$$

$$\int_{BC} M\, dy - N\, dx = \frac{5}{2} + \frac{3(3-y_0)}{2} - \frac{5}{2}\, e^{2(3-x_0-y_0)} - \frac{3x_0}{2}\, e^{2(3-x_0-y_0)}.$$

Pela fórmula (48), a solução é dada por:

$$\begin{aligned} u(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}\big((uv)_B + (uv)_C\big) + \int_{BC} M\, dy - N\, dx \; = \\ &= \frac{1}{2}\left[(x_0+1)e^{2(3-x_0-y_0)} + 4 - y_0\right] + \\ &+ \frac{5}{2} + \frac{3(3-y_0)}{2} - \frac{5}{2}\, e^{2(3-x_0-y_0)} - \frac{3x_0}{2}\, e^{2(3-x_0-y_0)} \; = \\ &= -x_0\, e^{2(3-x_0-y_0)} - 2\, e^{2(3-x_0-y_0)} - 2y_0 + 9. \qquad \square \end{aligned}$$

5. Usando o método de Riemann, ache a solução do seguinte problema de Cauchy:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\[2mm] u(t, 4-2t) = t \qquad 0 \le t \le 2 \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}\,(t, 4-2t) = 2t+1 \end{array}\right.$$

SOLUÇÃO:

Fazendo a mudança: $\xi = x - y$ e $\eta = x + y$, o problema transforma-se em:

$$(*) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \\ u(3t-4, 4-t) = t \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \xi}(3t-4, 4-t) + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(3t-4, 4-t) = 2t+1 \end{array} \right.$$

Observa-se que mediante a mudança, a curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \quad 0 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

é transformada em

$$\Gamma : \begin{cases} \xi = 3t - 4 \\ \eta = 4 - t \qquad 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

e que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \cdot$

Logo, a função de Riemann v associada a (*) como nos problemas 1, 2, e 3, é dada por $v(\xi, \eta) = 1$

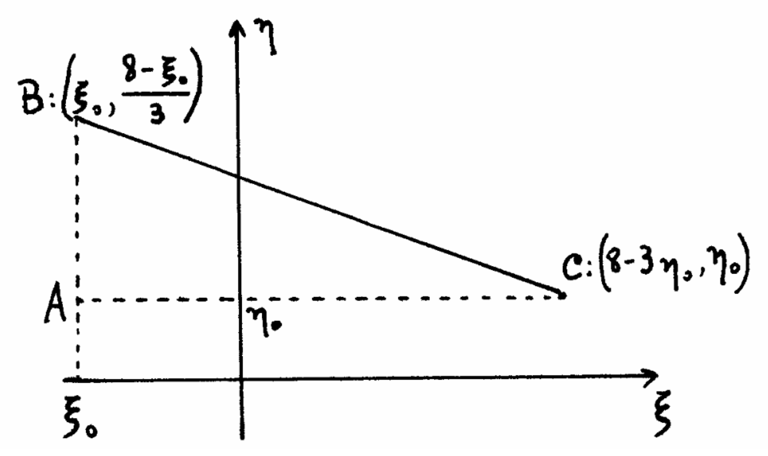
E :

$u_B = -\left(\dfrac{8-\xi_0}{3}\right) + 4$

$u_C = -\eta_0 + 4$

$M = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$

$N = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$



Então:

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2}\,(u_B + u_C) + \int_{BC} M\,d\eta - N\,d\xi.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_{BC} M\,d\eta - N\,d\xi &= \int_{\xi_0}^{8-3\eta_0} -(3t+2) - \frac{3}{2}\,(t+1)\,dt \\ &= -\frac{9}{4}\,(8-3\eta_0)^2 + \frac{9}{4}\,\xi_0^2 - \frac{7}{2}\,(8-3\eta_0) + \frac{7}{2}\,\xi_0\,.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}u(\xi_0,\eta_0) &= \frac{1}{2}\bigg(-\Big(\frac{8-\xi_0}{3}\Big) + 4 - \eta_0 + 4\bigg) - \frac{9}{4}(8-3\eta_0)^2 + \frac{9}{4}\,\xi_0^2 - \frac{7}{2}(8-3\eta_0) + \frac{7}{2}\,\xi_0 \;= \\ &= \frac{9}{4}\,(8-3\eta_0)^2 + \frac{9}{4}\xi_0^2 + 10\eta_0 + \frac{11\xi_0}{3} - \frac{76}{3}\,\cdot\end{aligned}$$

Então:

$$u(x,y) = -\frac{9}{4}\,\big(8-3(x+y)\big)^2 + \frac{9}{4}\,(x-y)^2 + 10(x+y) + \frac{11}{3}\,(x-y) - \frac{76}{3}\;\cdot \qquad \square$$

6. Sem fazer uso do método de Riemann, deduzir a fórmula de D'Alembert para resolver o problema:

$$\left|\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{em} & -\infty < x < +\infty,\;\; t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{em} & -\infty < x < +\infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = \varphi(x) & & \end{array}\right.$$

SOLUÇÃO:

Fazendo a mudança $\xi = x + Kt \;\; \eta = x - Kt$ transforma-se o problema à forma canônica $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ o qual tem solução geral

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

ou seja

(i) $$u(x,t) = f(x + Kt) + g(x - Kt)$$

Como $u(x, 0) = \varphi(x)$, vem

(ii) $$f(x) + g(x) = \varphi(x)$$

Como $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$, vem

(iii) $$Kf'(x) - Kg'(x) = \psi(x).$$

Então, de (ii) e (iii),

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\varphi(x) + \frac{1}{2K}\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,ds$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2K}\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,ds.$$

E de (i), tem-se

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x + Kt) + \varphi(x - Kt)\right) + \frac{1}{2K}\int_{x-Kt}^{x+Kt} g(s)\,ds. \qquad \square$$

7. Encontre a solução do seguinte problema de Goursat:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y) \\ u(0,y) = \varphi(y) \\ u(x,0) = \psi(x) \end{array}\right.$$

onde φ e ψ são de classe C^1 e $\varphi_0 = \psi_0$.

SOLUÇÃO:

Integrando na equação, tem-se:

(i) $$u(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(r,s)\,dsdr + g(x) + h(y).$$

Como $u(x,0) = \psi(x)$, vem:

(ii) $$g(x) + h(0) = \psi(x)$$

e como $u(0,y) = \varphi(y)$, vem:

(iii) $$g(0) + h(y) = \varphi(y).$$

Logo, de (ii) e (iii),

$$g(x) + h(y) = \psi(x) + \varphi(y) - g(0) - h(0).$$

Mas, de (ii), $g(0) + h(0) = \psi(0)$. Logo:

(iv) $$g(x) + h(y) = \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0).$$

De (iv) e (i), vem

$$u(x,y) = \psi(x) + \varphi(y) - \psi(0) + \int_0^x \int_0^y f(r,s)\,dsdr. \qquad \square$$

8. Usando o problema 7, resolver os seguintes problemas de Goursat:

$$\text{(i)} \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x \\[2ex] u(x,0) = x^2 \\[2ex] u(0,y) = y^2 \end{array} \right. \qquad \text{(ii)} \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y + 1 \\[2ex] u(x,0) = 2x + 1 \\[2ex] u(0,y) = y - 1 \end{array} \right.$$

SOLUÇÃO:

(i)
$$u(x,y) = x^2 + y^2 + \int_0^x \int_0^y r\, dsdr \ = $$
$$= x^2 + y^2 + \frac{x^2}{2} \cdot y$$

$$u(x,y) = (2x+1) + (y-1) - 1 + \int_0^x \int_0^y +1\, dsdr \ =$$
$$= 2x + y - 1 + \frac{xy^2}{2} + xy. \qquad \square$$

9. Determine a solução do seguinte problema de Goursat:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial y} = f(x,y) \qquad \alpha = \text{ constante} \\ u(x,0) = \psi(x) \\ u(0,y) = \varphi(y) \end{array}\right.$$

onde ψ e φ são de classe C^1 com $\psi(0) = \varphi(0)$.

SOLUÇÃO:

Pode-se escrever a equação na forma:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right) = f(x,y).$$

Integrando em y

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u = \int_0^y f(x,s)\, ds + \tilde{g}(x).$$

Multiplicando por $e^{\alpha x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(u\,e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}\int_0^y f(x,s)\,ds + e^{\alpha x}\tilde{g}(x).$$

Integrando em x:

$$u\,e^{\alpha x} = \int_0^x\int_0^y e^{\alpha r} f(r,s)\,dsdr + \int_0^x e^{\alpha r}\tilde{g}(r)dr + h(y).$$

Logo,

(i) $$u(x,y) = e^{-\alpha x}\int_0^x\int_0^y e^{\alpha r}\,f(r,s)\,dsdr + g(x) + e^{-\alpha x}\,h(y).$$

Como $u(x,0)=\psi(x)$, tem-se

(ii) $$\psi(x) = g(x) + e^{-\alpha x}\,h(0).$$

Como $u(0,y)=\varphi(y)$, tem-se

(iii) $$\varphi(y) = g(0) + h(y).$$

De (ii) e (iii),

(iv) $$g(x) + e^{-\alpha x}\,h(y) = \psi(x) + e^{-\alpha x}\,\varphi(y) - e^{-\alpha x}\,h(0) - e^{-\alpha x}\,g(0).$$

Mas de (iii):

$$e^{-\alpha x}\,h(0) + e^{-\alpha x}\,g(0) = e^{-\alpha x}\,\varphi(0).$$

Então,

(v) $$g(x) + e^{-\alpha x}\,h(y) = \psi(x) + e^{-\alpha x}\big(\varphi(y) - \varphi(0)\big).$$

De (v) e (i), tem-se

$$u(x,y) = e^{-\alpha x}, \int_0^x \int_0^y e^{\alpha r}\, f(r,s)\, ds dr + \psi(x) + e^{-\alpha x}\big(\varphi(y) - \varphi(0)\big). \qquad \square$$

10. Determine a solução do problema de Goursat

$$\left| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & & \\ u(x,t) = \varphi(x) & \text{quando} & x + Kt = 0 \\ u(x,t) = \psi(x) & \text{quando} & x - Kt = 0 \end{array} \right.$$

onde φ e ψ são de classe C^1 com $\varphi(0) = \psi(0)$.

SOLUÇÃO:

Observa-se que a solução geral da equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

é dada por

(i) $$u(x,t) = f(x + Kt) + g(x - Kt).$$

Como $u(x,t) = \varphi(x)$ quando $x + Kt = 0$, vem:

(ii) $$\varphi(x) = f(0) + g(2x).$$

Como $u(x,t) = \psi(x)$ quando $x - Kt = 0$, vem:

(iii) $$\psi(x) = f(2x) + g(0).$$

De (ii), vem:

$$g(x-Kt)=\varphi\left(\frac{x-Kt}{2}\right)-f(0).$$

De (iii), substituindo x por $\dfrac{x+Kt}{2}$, vem:

$$f(x+Kt)=\psi\left(\frac{x+Kt}{2}\right)-g(0).$$

Como por (ii), $\quad g(0)+f(0)=\varphi(0)$,

$$f(x+Kt)+g(x-Kt)=\varphi\left(\frac{x-Kt}{2}\right)+\psi\left(\frac{x+Kt}{2}\right)-\varphi(0).$$

De (i), vem:

$$u(x,t)=\varphi\left(\frac{x-Kt}{2}\right)+\psi\left(\frac{x+Kt}{2}\right)-\varphi(0). \qquad \square$$

11. Determine a solução do problema de Goursat:

$$\left|\begin{array}{lll} x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad x\neq 0 & & \\ u(x,y)=\varphi(y) & \text{em} \quad y-\dfrac{x^2}{2}=0 & 0\le y\le 2 \\ u(x,y)=\psi(y) & \text{em} \quad y+\dfrac{x^2}{2}=4 & 2\le y\le 4 \end{array}\right.$$

onde $\varphi(2)=\psi(2)$.

SOLUÇÃO:

Observa-se que a mudança de coordenadas

$$\xi = y - \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad \eta = y + \frac{x^2}{2}$$

reduz a equação à sua forma canônica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

de onde deduz-se que a solução geral é dada por:

(i) $$u(x,y) = f\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + g\left(y + \frac{x^2}{2}\right).$$

Das condições dadas, vem:

$$\varphi(y) = f(0) + g\left(y + \frac{x^2}{2}\right).$$

Mas $y + \dfrac{x^2}{2} = 2y$. Então:

(ii) $$\varphi(y) = f(0) + g(2y).$$

Analogamente:

(iii) $$\psi(y) = f(2y-4) + g(4).$$

Logo, substituindo $2y$ por $y + \dfrac{x^2}{2}$ e $2y - 4$ por $y - \dfrac{x^2}{2}$, tem-se:

(iv) $$f\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + g\left(y + \frac{x^2}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\left(y + \frac{x^2}{2}\right)\right) - f(0) + \left(\frac{1}{2}\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + 4\right) - g(4).$$

Como de (ii), $\varphi(2) = f(0) + g(4)$, tem-se de (iv) e (i):

$$u(x,y) = \varphi\left(\frac{1}{2}\left(y + \frac{x^2}{2}\right)\right) + \psi\left(\frac{1}{2}\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + 4\right) - \varphi(2). \qquad \square$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Usando o método de Riemann, resolver os seguintes problemas de Cauchy:

$$\text{(i)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ \\ u(t, 1-t) = t + 2 \quad 0 \le t \le 1 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 1-t) = 3t + 5 \end{array}\right. \qquad \text{(ii)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ \\ u(t, 4-t^2) = t^2 \quad 0 \le t \le 2 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 4-t^2) = 4t \end{array}\right.$$

Resposta: (ii) $u(x, y) = 2x^2 + y - 4$.

2. Determine a solução dos seguintes problemas de Cauchy:

$$\text{(i)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ \\ u(t, 2-t) = 2t + 1 \quad 0 \le t \le 2 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 2-t) = 3t - 1 \end{array}\right. \qquad \text{(ii)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ \\ u(t, 5-t) = 2t \quad 0 \le t \le 5 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 5-t) = t - 1 \end{array}\right.$$

Resposta: (ii) $u(x, y) = (y-1)e^{5-y-x} + 3x - 4$.

3. Usando o método de Riemann, encontre a solução dos seguintes problemas:

$$\text{(i)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \\ u(t, 1-t) = 2t \quad 0 \le t \le 1 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 1-t) = 3t + 1 \end{array}\right. \qquad \text{(ii)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \\ u(t, 2-t) = 3t \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 2-t) = 2t + 1 \end{array}\right.$$

Resposta: (ii)

$$u(x,y) = -\frac{79}{4} + \frac{85}{12}\,(y+3x) + \frac{67}{24}\,(y-3x) + \frac{4}{3}\,\big(6-2(y+3x)\big)^2 - \frac{4}{3}\,(y-3x)^2.$$

4. Determine a solução dos seguintes problemas:

$$\text{(i)}\;\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] u(x,0) = \cos x \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = \operatorname{sen} 4x \end{array}\right. \qquad \text{(ii)}\;\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] u(x,0) = e^x \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = e^{2x} + x \end{array}\right.$$

$$\text{(iii)}\;\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] u(x,0) = x^2 + 1 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = 2x + 3 \end{array}\right. \qquad \text{(iv)}\;\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] u(x,0) = 3x \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = 2\operatorname{sen} x \end{array}\right.$$

Respostas:

(i) $u(x,t) = \cos x \cos t + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 4t$

(ii) $u(x,t) = 3x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2t$

5. Fazendo uso do problema 7, resolver os seguintes problemas de Goursat:

$$\text{(i)}\;\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy \\[2ex] u(0,y) = \operatorname{sen} y \\[2ex] u(x,0) = \operatorname{sen} x \end{array}\right. \qquad \text{(ii)}\;\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2(1-y^2) \\[2ex] u(0,y) = y^2 + y \\[2ex] u(x,0) = x^2 + 2x \end{array}\right.$$

$$\text{(iii)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x + 3y \\[2ex] u(0,y) = 2\,e^y \\[2ex] u(x,0) = 3\,e^x - 1 \end{array}\right. \qquad \text{(iv)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^3 y \\[2ex] u(0,y) = \operatorname{sen} 2y \\[2ex] u(x,0) = x^2 + x \end{array}\right.$$

Respostas:

(iii) $u(x,y) = 3e^x + 2e^y + x^2 y + \dfrac{3xy^2}{2} - 3$

(iv) $u(x,y) = x^2 + x + \operatorname{sen} 2y + \dfrac{x^4 y^2}{8}$

6. Determine a solução do problema de Goursat:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y) \qquad \beta = \text{ constante} \\[2ex] u(x,0) = \psi(x) \\[2ex] u(0,y) = \varphi(y) \end{array}\right.$$

onde $\psi(0) = \varphi(0)$.

Resposta:

$$u(x,y) = e^{-\beta y} \int_0^y \int_0^x e^{\beta r}\, f(r,s)\, ds dr + \varphi(y) + e^{-\beta y}(\psi(x) - \psi(0)).$$

7. Encontre a solução dos problemas:

$$\text{(i)}\ \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] u(x,t) = 3x + 1 \quad \text{quando} \quad x + t = 0 \\[2ex] u(x,t) = 2x + 1 \quad \text{quando} \quad x - t = 0 \end{array}\right.$$

$$
\text{(ii)} \left|
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & & \\
u(x,t) = \ \operatorname{sen}^2 x & \text{quando} & x + 2t = 0 \\
u(x,t) = e^x - 1 & \text{quando} & x - 2t = 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{(iii)} \left|
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & & \\
u(x,t) = \cos^2 x & \text{quando} & x + 3t = 0 \\
u(x,t) = e^{x^2} & \text{quando} & x - 3t = 0
\end{array}
\right.
$$

Resposta: (iii)

$$
u(x,t) = \cos^2\left(\frac{x-3t}{2}\right) + e^{\left(\frac{x+3t}{2}\right)^2} - 1.
$$

8. Encontre a solução do problema de Goursat

$$
\left|
\begin{array}{lll}
y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad y \neq 0 & & \\
u(x,y) = \varphi(x) & \text{sobre} & x + \dfrac{y^2}{2} = 4 \quad 2 \leq x \leq 4 \\
u(x,y) = \psi(x) & \text{sobre} & x - \dfrac{y^2}{2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 2
\end{array}
\right.
$$

Resposta:

$$
u(x,y) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{y^2}{4} + 2\right) + g\left(\frac{x}{2} + \frac{y^2}{4}\right) = f(2).
$$

3. EQUAÇÕES ELÍTICAS

Conforme visto anteriormente, as equações diferenciais parciais elíticas de segunda ordem, lineares, no plano $\mathbb{R}^2$, possuem a forma canônica

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Elas guardam íntima relação com as funções de variáveis complexas, razão porque será feita uma breve revisão sobre as funções holomorfas.

O plano $\mathbb{R}^2$ possui uma estrutura de espaço vetorial obtida por meio das operações:

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Igualdade} \; - \; (x, y) = (x', y') \;\; \text{se} \;\; x = x' \;\; \text{e} \;\; y = y' \\[2ex] \text{Adição} \; - \; (x, y) + (x', y') = (x + x',\, y + y') \\[2ex] \text{Multiplicação por Escalar} \; - \; \lambda(x, y) = (\lambda x,\, \lambda y), \;\; \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Esta estrutura algébrica é enriquecida definindo-se, de modo apropriado, uma multiplicação no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, como vem a seguir.

$$(2) \qquad \text{Multiplicação} \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Munido desta multiplicação o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é transformado em um corpo, denominado corpo dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$.

Em busca de uma notação apropriada para os objetos de $\mathbb{C}$, note-se que para todo par $(x, y) \in \mathbb{C}$, tem-se:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

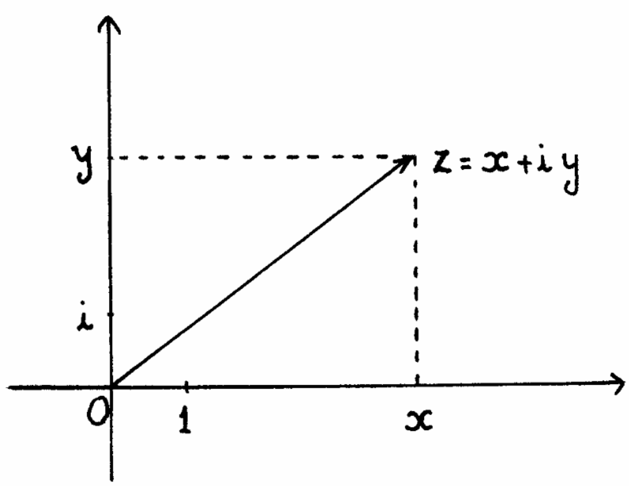
Represente-se por i o par $(0,1)$ e identifique-se $(1,0)$ ao número real 1. Logo, todo objeto de $\mathbb{C}$ escreve-se sob a forma:

$$(x,y) = x + iy. \tag{3}$$

Note-se que $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$ e identificando-se $(-1,0)$ ao número real -1, obtém-se $i^2 = -1$. O número complexo i denomina-se unidade imaginária. Portanto, todo objeto do corpo $\mathbb{C}$ tem a representação:

$$\left| \begin{array}{l} (x,y) = x + iy \\ i^2 = -1 \end{array} \right. \tag{4}$$

Note-se que a interpretação geométrica de $\mathbb{C}$ é dada pela imagem geométrica do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ que lhe é subjacente. Os objetos de $\mathbb{C}$ serão representados por z, isto é, $z = x + iy$ que geometricamente representa-se no $\mathbb{R}^2$ pelo vetor (x,y), isto é, uma flecha com origem em $(0,0)$ e extremidade em (x,y), como na figura abaixo.



Diz-se, também, plano complexo $\mathbb{C}$ que é o plano $\mathbb{R}^2$ enriquecido da multiplicação (2).

Define-se o módulo do número complexo $z = x + iy$ como sendo o módulo do vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$|z|^2 = x^2 + y^2, \quad \text{é o módulo de } z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Considerando-se coordenadas polares, com eixo polar coincidindo com o semi-eixo $x \geq 0$ dos reais positivos, a cada ponto (x, y) do plano $\mathbb{R}^2$ associa-se o ângulo θ do vetor (x, y) com o eixo polar e o seu comprimento ρ. Logo, obtém-se:

$$x = \rho \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Resulta, daí, a representação em coordenadas polares para os objetos de $\mathbb{C}$:

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \quad \text{sendo} \quad \rho = |z|. \tag{6}$$

Demonstra-se que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

obtendo-se a representação polar de z dada por

$$z = \rho\, e^{i\theta}\,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho < \infty. \tag{7}$$

Será examinada, a seguir, a relação entre as soluções $u(x, y)$ da equação elítica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \Omega\text{, aberto do } \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

e as funções $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que possuem derivadas contínuas em $\Omega \subset \mathbb{C}$.

De fato, uma função f que a cada número complexo $z \in \mathbb{C}$ associa um número complexo $f(z) \in \mathbb{C}$ denomina-se uma função complexa de uma variável complexa z. Representa-se por $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ou simplesmente por $w = f(z)$. Sendo $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com u e v funções reais definidas no $\mathbb{R}^2$. Portanto, escreve-se:

$$\left|\begin{array}{l} w = f(z) \\ \quad \text{ou} \\ w = u(x, y) + iv(x, y) \end{array}\right. \tag{9}$$

Sendo $z = x + iy$, x denomina-se a parte real de z e y a parte imaginária de z. Do mesmo modo, sendo $w = u(x, y) + iv(x, y)$, a função u é parte real de w e v sua parte imaginária.

A noção de limite de uma função $w = f(z)$ em um ponto z_0 define-se ipsis literis como no caso de funções reais. A noção de derivada é análoga. Assim, diz-se que $w = f(z)$ é derivável em z_0, quando existe o limite:

$$\text{(10)} \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Este número complexo denomina-se derivada da f em z_0 e representa-se por $f'(z_0)$. Diz-se que f é derivável em $\Omega \subset \mathbb{C}$, quando o for em cada $z_0 \in \Omega$.

Para interpretar o limite (10) considere-se $z = x + iy$ e $f(z) = u + iv$. Tem-se:

$$\text{(11)} \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)]}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

Supõe-se u, v continuamente diferenciáveis e considera-se (11) segundo as retas $y = y_0$ e $x = x_0$. Obtém-se:

$$\text{(12)} \qquad f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{no ponto } (x_0, y_0)$$

e

$$\text{(13)} \qquad f'(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{no ponto } (x_0, y_0).$$

A existência do limite (11) implica a igualdade de (12) e (13). Obtém-se:

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

como uma condição necessária para a existência do limite (11). As equações (14) são denominadas equações de Cauchy-Riemann para $w = f(z)$. Se $w = f(z)$ for continuamente derivável em Ω vem que u e v são soluções das equações (14).

Uma condição suficiente para que $w = f(z)$ seja derivável em Ω é que u e v sejam continuamente diferenciáveis e satisfaçam às equações de Cauchy-Riemann (14) em Ω. Quando uma função $w = f(z)$ é continuamente derivável em Ω ela é denominada holomorfa em Ω. Do estudo das funções holomorfas, pode-se derivar (14) mais uma vez, obtendo-se de (14):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ em } \Omega \tag{15}$$

isto é, u e v são soluções da equação (8).

Uma função u solução da equação (8) denomina-se harmônica. Logo, ficou provado que as partes real e imaginária de uma função holomorfa $w = f(z)$ em $\Omega \subset \mathbb{C}$ são harmônicas em Ω.

Examina-se, a seguir, a obtenção de uma função holomorfa por meio das harmônicas, como fez Riemann em sua teoria das funções complexas.

Seja Ω um aberto conexo do $\mathbb{R}^2$ e $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função harmônica. Considera-se dois pontos (x_0, y_0) e (x, y) de Ω e γ um arco de curva regular com extremos nestes pontos, cujo primeiro (x_0, y_0) supõe-se fixo. Considere-se as funções $P(x, y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ e $Q(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Sendo u harmônica, obtém-se $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, provando que a forma diferencial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ é exata em Ω, isto é, existe $w\colon \Omega \to \mathbb{R}$, continuamente diferenciável tal que $dw = Pdx + Qdy$. Consequentemente a integral

$$\int_\gamma \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \right\}$$

não depende de γ e apenas de (x, y) pois (x_0, y_0) é suposto fixo. Logo, fica bem definida a função:

$$v(x,y)=\int_\gamma\left\{-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right\} \tag{16}$$

Considere-se γ a poligonal de vértices em (x_0,y_0), (x,y_0), (x,y). Logo, como a integral não depende do caminho γ e Ω é conexo, resulta:

$$v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(\xi,y_0)\,d\xi+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta)\,d\eta.$$

Obtém-se:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\quad\text{e}\quad\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot \tag{17}$$

Sendo u e v continuamente diferenciáveis em Ω e soluções das equações de Cauchy-Riemann (17), conclui-se que $f(z)=u+iv$ é holomorfa em $\Omega\subset\mathbb{C}$. A função v denomina-se harmônica conjugada de u. Conclui-se, deste modo, a estreita relação entre as funções harmônicas e as funções holomorfas.

O operador de segunda ordem $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, denomina-se operador de Laplace ou Laplaciano. Dizer que u é harmônica em Ω é equivalente a dizer que u é solução da equação de Laplace $\Delta u=0$.

FÓRMULAS DE GREEN

Considere-se um par de funções reais u e v pertencentes a $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. Um cálculo simples conduz à identidade:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v \tag{18}$$

sendo $\nabla\varphi$, gradiente de φ, o vetor $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$. Se Γ for a fronteira regular de Ω e ν o vetor unitário da normal externa a Γ, a derivada de v na direção da normal ν é dada por:

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial x}\,\nu_x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\nu_y\,, \tag{19}$$

sendo (ν_x, ν_y) as componentes do vetor unitário ν. Integrando-se (18) sobre Ω e empregando o Lema de Gauss, obtém-se:

$$\int_\Gamma \left(u\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\nu_x + u\,\frac{\partial v}{\partial y}\,\nu_y\right) d\Gamma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dxdy + \int_\Omega u\Delta v\, dxdy. \tag{20}$$

Por meio da definição (19), modifica-se (20) obtendo-se:

$$-\int_\Omega u\Delta v\, dxdy = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dxdy - \int_\Gamma u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\Gamma \tag{21}$$

denominada primeira fórmula de Green.

Permutando-se u e v em (21), obtém-se:

$$-\int_\Omega v\Delta u\, dxdy = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dxdy - \int_\Gamma v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma. \tag{22}$$

Multiplicando-se (21) por -1 e adicionando-se à (22), obtém-se:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dxdy = \int_\Gamma \left(u\,\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\Gamma \tag{23}$$

denominada segunda fórmula de Green.

Proposição 1. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω. Então

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0.$$

Demonstração: Sendo $\Delta u = 0$ em Ω, tomando-se $v = 1$ na primeira fórmula de Green (22), obtém-se a demonstração da Proposição 1. $\square$

Proposição 2 (Propriedade da Média). Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω e $|z - z_0| < R$ um círculo de raio R contido em Ω. Então o valor de u no centro do círculo é igual à média dos valores de u sobre a circunferência $|z - z_0| = R$.

Demonstração: Sem perda de generalidade suponha Ω contendo a origem e o círculo com centro na origem, isto é, $z_0 = (0, 0)$. Sendo u harmônico, e γ a circunferência $|z| = r$, $r \in (0, R)$, resulta da Proposição 1 que:

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \big(x(s), y(s)\big)\, ds = 0. \tag{24}$$

Tem-se $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $ds = r\,d\theta$, $0 < \theta \leq 2\pi$. A normal ν à circunferência tem a direção do raio. Logo, de (24) obtém-se:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{dr}\, u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = 0, \quad 0 < r < R.$$

Integrando em r, obtém-se:

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr}\, u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = 0.$$

Permutando as integrais, obtém-se:

$$\int_0^{2\pi} u(R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = u(0,0)2\pi.$$

Multiplicando por R ambos os membros, obtém-se:

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi R}\int_\gamma u(x(s), y(s))\, ds. \qquad \square$$

Considere-se uma função real de variável real $\varphi = \varphi(x)$ e Ω o intervalo $]a, b[$ da reta. Suponha φ harmônica em $]a, b[$, isto é, $\varphi''(x) = 0$ em $]a, b[$. Obtém-se φ explicitamente dada por $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, sendo α e β números reais. Note que o máximo ou mínimo de φ são assumidos na fronteira do intervalo $]a, b[$. Esta propriedade vale em geral para as funções harmônicas do plano $\mathbb{R}^2$ (ou do $\mathbb{R}^n$!). De fato, suponha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω e assumindo o seu valor mínimo em um ponto (x_0, y_0) interior ao aberto Ω. Seja C_ε um círculo de raio ε centro em (x_0, y_0) contido em Ω. Tem-se da propriedade da média que $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ sobre toda circunferência de centro (x_0, y_0) contido em $\overline{\Omega}$, pois

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_\gamma u(x(s), y(s))ds \geq \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_\gamma u(x_0, y_0)ds = u(x_0, y_0)\,.$$

Então $u \equiv u(x_0, y_0)$ em um disco que toca a fronteira. Logo o mínimo de u em $\partial\Omega$ coincide com o mínimo de u em Ω, isto é, o mínimo de u é assumido na fronteira de Ω. Vemos, também, que se o mínimo é assumido no interior então o conjunto dos pontos em Ω em que u assume este valor é aberto. Como u é contínua, este conjunto também é fechado. Daí, como Ω é conexo, conclui-se que u é constante em $\overline{\Omega}$.Análogo para o máximo.

Tem-se $u(x, y) > u(x_0, y_0)$ para todo (x, y) em $\Omega - \{(x_0, y_0)\}$. Logo, $u(x, y) > u(x_0, y_0)$ sobre a circunferência γ do círculo C_ε , isto é,

$$\int_\gamma u(x(s), y(s))\, ds > 2\pi\varepsilon\, u(x_0, y_0).$$

Dividindo-se por $2\pi\varepsilon$ e empregando a Proposição 2, obtém-se uma contradição. Logo o mínimo de u não é assumido no interior de Ω. Análogo para o máximo. $\square$

A seguir será estudado o problema da determinação de uma função harmônica no interior de um aberto Ω do plano sendo conhecidos seus valores sobre a fronteira Γ de Ω. Antes serão feitas algumas considerações físicas que servirão de motivação.

De fato considere-se um fluido em um canal situado no $\mathbb{R}^3$, fluindo com velocidade v. Note-se que v é um vetor que no instante t possui as componentes v_1 , v_2 , v_3 , segundo um sistema de coordenadas ortogonais do $\mathbb{R}^3$. O movimento será suposto irrotacional, isto é, a velocidade angular $w = \frac{1}{2}$ rot v é nula em cada ponto. Quando o movimento do fluido é irrotacional existe uma função real φ tal que o vetor velocidade é o gradiente de φ em cada ponto do fluido, isto é,

$$v = \text{grad } \varphi.$$

Serão estudados movimentos cujo vetor velocidade é sempre paralelo a um plano fixo. Assim, limita-se o estudo ao movimento em um plano, que escolhe-se para plano de coordenadas (x, y). O vetor velocidade possui duas componentes v_1 na direção x e v_2 na direção y. Assim,

$$v = \text{grad } \varphi \quad \text{ou} \quad v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot$$

Suponha que o fluido seja incompressível, isto é, $\operatorname{div} v = 0$ em cada ponto do fluido. Representando o fluido por um aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, y), tem-se $\operatorname{div} v = 0$ é a equação:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Sendo $v = \operatorname{grad} \varphi$, deduz-se que se $\operatorname{div} v = 0$ em Ω, então

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

mostrando que φ é harmônica em Ω. O problema que se deseja resolver é o de determinar $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$, sendo $\Delta \varphi = 0$ em Ω e φ conhecida sobre Γ.

Problema de Dirichlet - Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^2$ com fronteira regular Γ e $g \in C^0(\overline{\Omega})$. O problema de Dirichlet consiste em determinar $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que:

$$(25) \qquad \left| \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \varphi = g \quad \text{e} \quad \Gamma \end{array} \right.$$

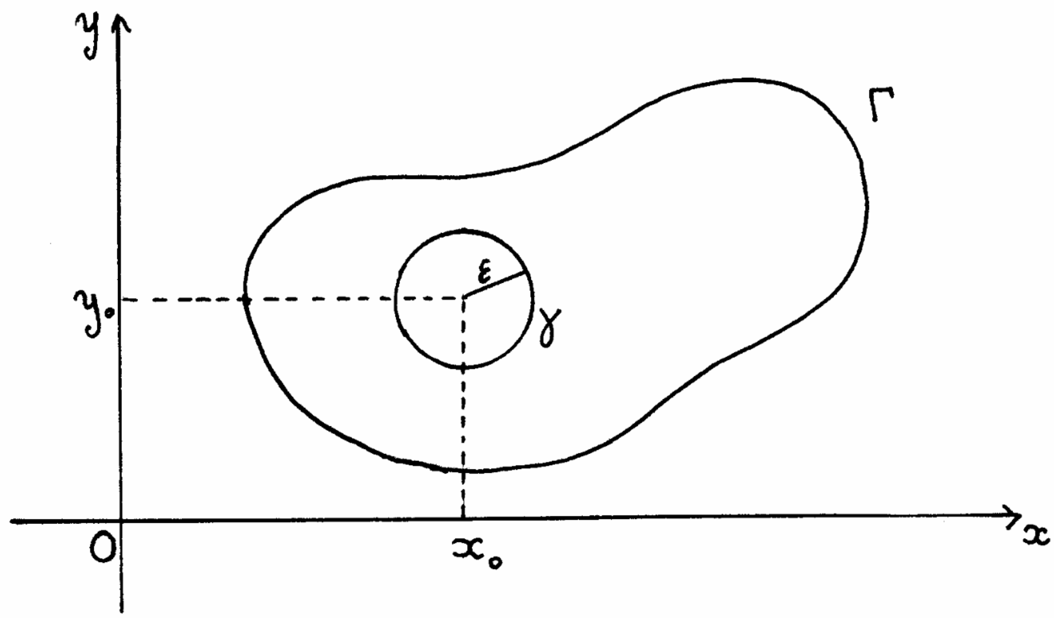
O problema de Dirichlet será aqui estudado pelo método de Green. Ele consiste em determinar uma função associada a Ω, denominada Função de Green do domínio Ω, de modo que se obtém a solução explicitamente no interior de Ω por meio de uma integral curvilínea ao longo da fronteira Γ de Ω, do produto de g pela derivada na direção da normal a Γ da função de Green de Ω.

Foi visto que se $w = f(z)$ for holomorfa em Ω então sua parte real é harmônica em Ω. Tem-se que $\log(z - z_0)$ é holomorfa em Ω, sendo

$$\log(z - z_0) = \log|z - z_0| + i\arg(z - z_0).$$

Do mesmo modo $-\log(z - z_0)$. Representando por $r = |z - z_0|$, resulta que $-\log r$ ou $\log\dfrac{1}{r}$ é a parte real da função $-\log(z - z_0)$ holomorfa em $\Omega - \{z_0\}$, logo $\Delta \log\dfrac{1}{r} = 0$ em $\Omega - \{z_0\}$.

Considere um ponto (x_0, y_0) no interior de Ω e seja C_ε um círculo de raio ε centro em (x_0, y_0) contido em Ω, como na figura.]



Seja γ a circunferência de C_ε e $\Omega' = \Omega - C_\varepsilon$. Em Ω' a função $\log \dfrac{1}{r}$ é harmônica. A fronteira de Ω' é $\Gamma + \gamma$. Da segunda fórmula de Green (23) com $u = \varphi$ solução de (25) e $v = \log \dfrac{1}{r}$, obtém-se:

$$\int_{\Gamma+\gamma} \left(\varphi \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\Gamma = 0$$

ou

$$-\int_\gamma \left(\varphi \, \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\Gamma = \int_\Gamma \left(\varphi \, \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\Gamma. \tag{26}$$

Cálculo da Integral no Membro da Direita de (26).

Sobre a circunferência γ tem-se:

$$\left. \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right|_\gamma = \frac{d \log \frac{1}{\varepsilon}}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \,.$$

Sendo $ds = \varepsilon\, d\theta$, obtém-se:

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}\int_\gamma \varphi\, ds - \log\frac{1}{\varepsilon}\int_\gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, ds \; =$$
$$= -\int_0^{2\pi} \varphi(x_0 + \varepsilon\cos\theta,\, y_0 + \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta + \varepsilon\log\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, d\theta.$$

Sendo $\varphi \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\log\varepsilon = 0$, obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = -\int_0^{2\pi} \varphi(x_0, y_0)\, d\theta = -2\pi\, \varphi(x_0, y_0). \tag{27}$$

Logo, quando $\varepsilon \to 0$ em (26) obtém-se:

$$\varphi(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial\nu}\,\varphi - \log\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) d\Gamma. \tag{28}$$

Note que de (23) sabe-se que $\varphi = g$ em Γ mas se desconhece $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ sobre Γ. Aqui tem-se uma situação semelhante a encontrada quando se analisou a função de Riemann no método de Riemann na seção 2. De fato, seja $h \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω. Tomando-se h e φ obtém-se da segunda identidade de Green:

$$0 = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(\varphi\frac{\partial h}{\partial\nu} - h\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) d\Gamma. \tag{29}$$

Adicionando-se (28) com (29), resulta:

$$\varphi(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left[\left(\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial\nu} + \frac{\partial h}{\partial\nu}\right)\varphi - \left(\log\frac{1}{r} + h\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right] d\Gamma. \tag{30}$$

Em (30) procede-se como no caso da função de Riemann acima lembrado. Para libertar (28) da derivada normal $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$, é suficiente determinar a função harmônica h tal que

$$h + \log\frac{1}{r} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma.$$

A função harmônica $h(x,y) + \log \frac{1}{r}$ denomina-se função de Green no domínio Ω.

Conhecida a função de Green em Ω, a solução do problema de Dirichlet (25) é obtida, explicitamente, em cada ponto (x_0, y_0), interior à Ω, pela fórmula:

$$\varphi(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma g \frac{\partial G}{\partial \nu} \, d\Gamma. \tag{31}$$

Seja Ω um aberto conexo com fronteira regular Γ e $P = (x_0, y_0)$ um ponto de Ω. Define-se como função de Green em Ω a uma função real G_P satisfazendo às equações:

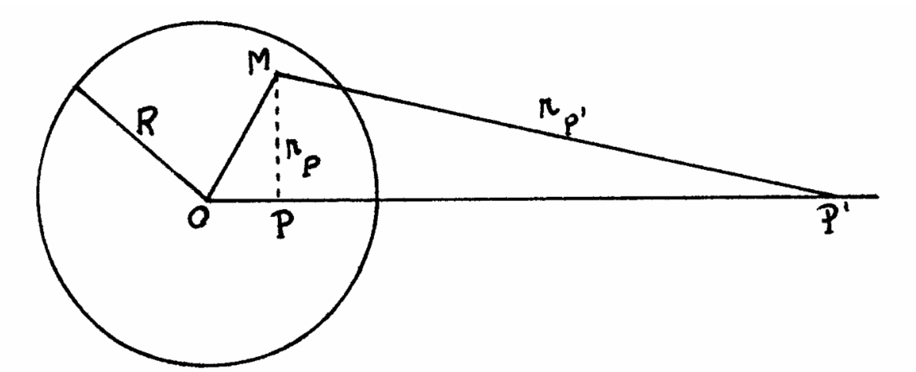
i) $G_P(x,y) = \log \frac{1}{r} + h(x,y)$ em $\Omega - \{P\}$

ii) $G_P(x,y) = 0$ em Γ

iii) G_P é duas vezes continuamente diferenciável em $\Omega - \{P\}$, contínua em $\overline{\Omega} - \{P\}$ e harmônica em $\Omega - \{P\}$.

A seguir usando-se o método de Green, resolve-se o problema de Dirichlet (25) quando Ω é um círculo, encontrando-se a fórmula de Poisson.

FUNÇÃO DE GREEN NO CÍRCULO



Considere-se um círculo Ω de raio R e centro na origem O. Seja P um ponto interior ao círculo e P' o seu inverso, isto é,

$$OP \times OP' = R^2.$$

Deseja-se calcular o valor da solução φ do problema de Dirichlet em P. Represente por Ω o círculo e por γ sua circunferência. Seja M um ponto qualquer do círculo Ω. Considere-se as medidas:

$$r_P = MP, \quad r_{P'} = MP', \quad r = OP, \quad r' = OP'.$$

Verifica-se, a seguir, que a função de Green para o círculo Ω é dada por:

$$G_P(M) = \log \frac{1}{r_P} - \log \left(\frac{R}{r} \frac{1}{r_{P'}} \right), \tag{32}$$

sendo O o centro do círculo, isto é, $(0,0)$ e M um ponto de coordenadas (x,y) no círculo.

Tem-se $h(x,y) = -\log \dfrac{R}{r} - \log \dfrac{1}{r_{P'}}$ é definida em $\Omega - \{P\}$ o mesmo acontecendo com $\log \dfrac{1}{r_P} \cdot$ Portanto G_P definida por (32) satisfaz à condição (i) da definição de função de Green.

Antes de verificar a condição (ii) obtém-se que G_P dada por (32) satisfaz a (iii).

Para verificar a (iii), suponha M sobre a circunferência γ de Ω e considere-se os triângulos OMP e OMP'. Sendo P' o inverso de P em relação a γ tem-se $OP \times OP' = R^2$. Logo, os triângulos possuem um ângulo igual em O compreendido entre lados proporcionais, sendo, por este motivo, semelhantes. Daí obtém-se:

$$\frac{r_P}{r_{P'}} = \frac{r}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r_P} = \frac{R}{r} \frac{1}{r_{P'}} \cdot$$

Daí resulta que $G_P = 0$ sobre γ, verificando a condição (iii). Assim G_P é uma função de Green no círculo Ω.

A seguir calcula-se (31) no caso do círculo Ω sendo a função de Green dada por

$$G_P(M) = \log \frac{1}{r_P} - \log \frac{R}{r} \frac{1}{r_{P'}} \cdot$$

Deve-se calcular $\varphi(P)$. Para tal, considere-se um sistema de coordenadas polares com pólo no centro O de Ω, com eixo polar o suporte de OP. Sejam (ρ, α) as coordenadas polares de M neste sistema. Do triângulo OMP obtém-se:

$$r_P^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\alpha$$

e do triângulo OMP' resulta

$$r_{P'}^2 = \rho^2 + r'^2 - 2\rho r' \cos\alpha.$$

Sendo $OP \times OP' = R^2$ ou $rr' = R^2$, obtém-se:

$$r_{P'}^2 = \rho^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2\rho\,\frac{R^2}{r}\,\cos\alpha.$$

A direção da normal a γ coincide com a do raio. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\log r_P = \frac{1}{r_P}\,\frac{dr_P}{d\rho} = \frac{\rho - r\cos\alpha}{r_P^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\log r_{P'} = \frac{\rho - \frac{R^2}{r}\cos\alpha}{r_{P'}^2}\,.$$

Daí, obtém-se para $\dfrac{\partial G_P}{\partial\nu}$, em γ:

$$\left.\frac{\partial G_P}{\partial\nu}\right|_\gamma = -\frac{R - r\cos\alpha}{r_P^2} + \frac{r^2}{R^2}\,\frac{R - \frac{R^2}{r}\cos\alpha}{r_P^2}$$

ou, substituindo-se r_P^2 encontra-se:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\nu}\right|_\gamma = \frac{-R^2 + r^2}{R}\,\frac{1}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}\,.$$

Encontra-se para solução do problema de Dirichlet no círculo de raio R, a solução explícita:

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(Rcos\alpha, Rsen\alpha)d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}, \tag{33}$$

sendo (x_0, y_0) as coordenadas de P no interior de Ω, r a distância de P ao centro e α o ângulo polar de OM, para $M \in \gamma$.

A expressão (33) denomina-se fórmula de Poisson para o problema de Dirichlet no círculo Ω. $\square$

Retornando-se ao Problema de Dirichlet (25), provar-se-á que a solução é única. De fato, suponha-se que existam duas soluções φ_1 e φ_2 do problema (25). Resulta que a função $\widehat{\varphi} = \varphi_1 - \varphi_2$ é solução de $\Delta\widehat{\varphi} = 0$ em Ω e $\widehat{\varphi} = 0$ em Γ. Daí resulta, da primeira fórmula de Green, que $\widehat{\varphi}$ é a função nula em Ω ou $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

PROBLEMA DE NEUMANN NO CÍRCULO

Como anteriormente, Ω representa um círculo de raio R centro na origem e circunferência fronteira γ. O problema de Neumann consiste em determinar uma função harmônica φ em Ω quando é conhecida a derivada normal $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ em γ. Simbolicamente tem-se:

$$\left| \begin{array}{lll} \Delta\varphi = 0 & \text{em} & \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = h & \text{em} & \gamma \end{array} \right. \tag{34}$$

Considere-se coordenadas polares (r, θ) e obtém-se para expressão do Laplaciano:

$$\Delta\varphi(r,\theta) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\,.$$

Considere-se $v(r,\theta)$ harmônica em Ω e nula para $r=0$, isto é,

$$(35)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \\ v(0,\theta)=0 \end{array}\right.$$

De posse desta função, defina-se uma nova por:

$$\varphi(r,\theta)=\int_0^r \frac{v(\rho,\theta)}{\rho}\,d\rho.$$

Lema 1. $\varphi(r,\theta)$ é harmônica em Ω.

Demonstração: De fato, tem-se:

$$(36)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{v(r,\theta)}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=-\frac{v(r,\theta)}{r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}\,; \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=\int_0^r \frac{\partial^2 v(\rho,\theta)}{\partial\theta^2}\,d\rho.$$

Daí resulta que

$$\Delta\varphi(r,\theta)=\frac{1}{r^2}\int_0^r \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right]d\rho,$$

sendo zero porque v harmônica.

Em (34) sendo φ harmônica em Ω, sua derivada normal possui a integral sobre γ igual a zero, cf. Proposição 1. Logo, o dado na fronteira $h\in C^0(\overline{\Omega})$ deve ser tal que

$$(37)\qquad \int_0^{2\pi} h(\alpha)\,d\alpha=0.$$

Para resolver o problema de Neumann (34), considera-se o seguinte problema de Dirichlet:

$$(38)\qquad \left|\begin{array}{l} \Delta\psi=0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \\ \psi=Rh(\alpha) \quad \text{em} \quad \gamma \end{array}\right.$$

Obtém-se a solução de (38) por meio da fórmula de Poisson (33), isto é:

$$\psi(r,\theta) = \frac{R(R^2 - r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\alpha) d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}\,. \tag{39}$$

Daí, conclui-se que $\psi(r,\theta)$ assim obtida é harmônica em Ω e

$$\psi(0,\theta) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\alpha)\, d\alpha = 0$$

por (37). Logo, a função

$$\varphi(r,\theta) = \int_0^r \frac{\psi(\rho,\theta)}{\rho}\, d\rho + c \tag{40}$$

é solução do problema de Neumann (34).

De fato, foi visto que $\Delta\varphi = 0$ em Ω. Resta apenas examinar a derivada normal de φ, dada por (40), ao longo de γ. Tem-se:

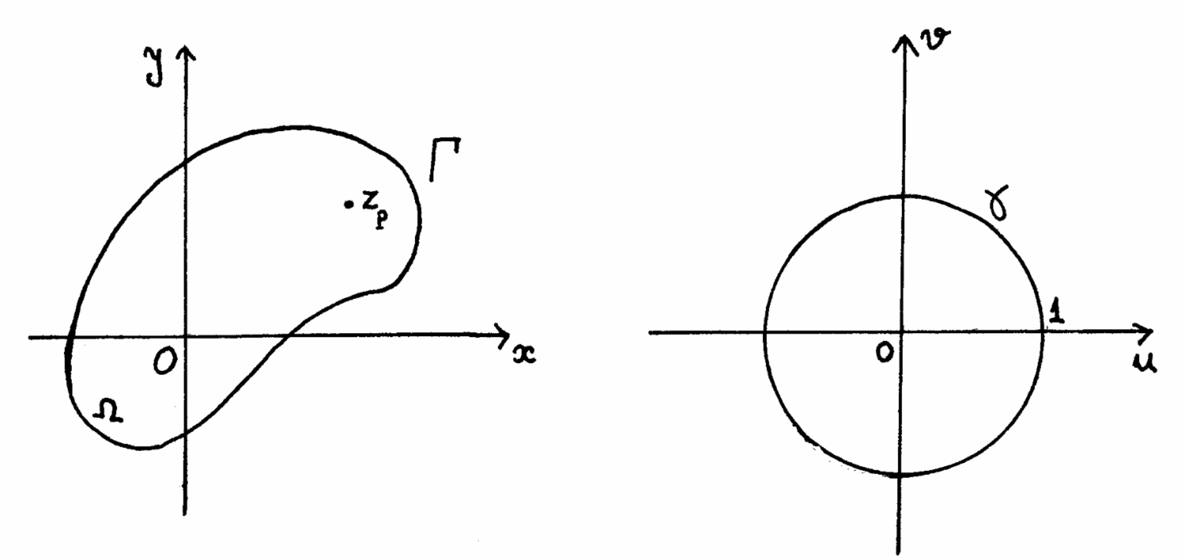
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_\gamma = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{v(r,\theta)}{r}\right|_{r=R} = \frac{v(r,\theta)}{R} = \frac{Rh(\alpha)}{R} = h(\alpha).$$

De (40) e (39) obtém-se a fórmula de Poisson para o problema de Neumann (34). $\square$

OBSERVAÇÕES SOBRE A FUNÇÃO DE GREEN

Para salientar uma vez mais a relação entre as funções harmônicas no plano $\mathbb{R}^2$ e as funções holomorfas em $\mathbb{C}$, dar-se-á mais um método geral para o cálculo da função de Green, no caso de um aberto limitado conexo Ω do $\mathbb{R}^2$. Representa-se por Γ sua fronteira regular. Foi visto anteriormente que resolver o problema de Dirichlet (25) em Ω consiste em conhecer uma função de Green em Ω. Pensa-se em Ω como um aberto de plano complexo $\mathbb{C}$. Demonstra-se que existe uma função holomorfa $w = f(z)$ transformando, de modo biunívoco e conforme, Ω em uma círculo unitário C_1 com centro na origem, de modo que um ponto z_P de Ω se transforma no centro de C_1 e Γ na circunferência γ de C_1. [Consulte-se L.A. Medeiros, Funções Complexas, McGraw Hill do Brasil, 1972].

Interpreta-se geometricamente $w = f(z)$ como uma transformação de um plano cuja variável é $z = x + iy$ em outro cuja variável é $w = u(x, y) + iv(x, y)$, como vem salientado



Suponha z_P o ponto de Ω tal que $f(z_P) = 0$. Logo

$$f(z) = (z - z_P)F(z),$$

sendo $F(z)$ holomorfa em Ω. Sendo $f'(z_P) \neq 0$, pois f é invertível, obtém-se:

$$f'(z) = F(z) + (z - z_P)F'(z)$$

implicando em $F(z_P) \neq 0$.

A função

$$G_P(x, y) = -\log |f(z)|$$

é uma função de Green em Ω.

De fato, tem-se:

i) $G_P(x,y) = -\log|z - z_P| - h(x,y)$, sendo $h(x,y) = \log|F(z)|$, que é harmônica, por ser a parte real da função holomorfa $\log F(z)$.

ii) $G_P(x,y) = 0$ para $(x,y) \in \Gamma$. Isto porque se $z \in \Gamma$ tem-se $f(z) \in \gamma$ isto é, $|f(z)| = 1$ e o $\log|f(z)| = 0$.

iii) G_P é duas vezes continuamente derivável em $\Omega - \{z_P\}$, contínua em $\overline{\Omega} - \{z_P\}$ e harmônica em $\Omega - \{z_P\}$. □

Reciprocamente, suponha conhecida a função de Green de Ω, isto é,

$$G_P(x,y) = \log \frac{1}{|z - z_P|} + h(x,y).$$

Demonstrar-se-á que existe uma $w = f(z)$ holomorfa em Ω, transformando Ω em C_1 de modo biunívoco tal que $f(z_P) = 0$, $z_P \in \Omega$ e $f(\Gamma) = \gamma$. De fato, seja $\widehat{G}_P(x,y)$ a função harmônica conjugada de $G_P(x,y)$. Resulta que

$$f(z) = e^{-(G_P + i\widehat{G}_P)}$$

é holomorfa em $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mostrar-se-á que f satisfaz as condições requeridas.

Se $z = x + iy \in \Gamma$, sendo $G_P(x,y) = 0$, pois G_P é função de Green para Ω, tem-se

$$f(z) = e^{-i\widehat{G}_P(x,y)} \quad \text{logo} \quad |f(z)| = 1.$$

Cálculo de $f(z_P)$. Tem-se

$$f(z) = e^{-(h(x,y) + i\widehat{G}_P(x,y)} \cdot e^{-\log \frac{1}{|z - z_P|}}.$$

Sendo a primeira parcela limitada, vem

$$f(z_P) = \lim_{z \to z_P} f(z) = 0,$$

provando que z_P tem como imagem por f o centro do círculo. □

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Denomina-se exponencial complexa a função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfa, solução da equação diferencial

$$\frac{df}{dz} = f \quad \text{em} \quad \mathbb{C} \tag{1}$$

e

$$f(z) = e^x, \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Determine a solução f do problema acima.

SOLUÇÃO:

De fato, seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, holomorfa em $\mathbb{C}$. Tem-se $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot$ Logo sendo solução de (1), resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = u + iv.$$

Obtém-se, daí,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v \quad \text{para } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Da primeira equação obtém-se

$$u(x,y) = e^x\, h(y) \tag{3}$$

sendo h duas vezes continuamente derivável. Substituindo na equação de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

notando-se que $\dfrac{\partial v}{\partial x} = v$, obtém-se

(4) $$v = e^x \, \frac{dh(y)}{dy} \cdot$$

Substituindo-se (3) e (4) na equação de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \,,$$

obtém-se a equação diferencial ordinária:

$$h''(y) + h(y) = 0,$$

cuja solução geral é:

$$h(y) = a \, \cos y + b \, \operatorname{sen} y,$$

a e b constantes.

Portanto escreve-se:

(5) $$\left| \begin{array}{l} u(x,y) = e^x \, h(y) = e^x(a \, \cos y + b \, \operatorname{sen} y) \\ v(x,y) = e^x \, h'(y) = e^x(a \, \operatorname{sen} y - b \, \cos y) \end{array} \right.$$

Pela condição (2) tem-se $f(x) = e^x$ quando $y = 0$, isto é,

(6) $$u(x,0) = e^x, \qquad v(x,0) = 0.$$

De (5) e (6) conclui-se que $a = 1$ e $b = 0$. Logo obtém-se:

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Conseguintemente, a solução de (1) e (2) holomorfa em $\mathbb{C}$ é:

(7) $$f(z) = e^x(\cos y + i \, \operatorname{sen} y)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Verifica-se que f dada por (7) é solução da equação funcional $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ para par $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Representa-se a função exponencial dada por (7) por $f(z)e^z$, $z = x + iy$. portanto,

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

e quando $x = 0$, obtém-se:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

denominada fórmula de Euler. $\square$

2. Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ onde $a_i \in \mathbb{C}$; $i = 1, \ldots, n$. Provar que Re f e Im f respectivamente parte real de f e parte imaginária de f são funções harmônicas em $\mathbb{R}^2$.

SOLUÇÃO:

Bastaria provar que f é holomorfa em todo $\mathbb{C}$, para isso será suficiente provar que $g(z) = z^n$ é holomorfa pois a combinação linear de funções holomorfas é holomorfa. Como

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \\ &= \lim_{z \to z_0} z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1} = \\ &= n\, z_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Logo $\forall\, z_0 \in \mathbb{C} \quad \exists\, g'(z_0)$ e $g'(z_0) = n\, z_0^{n-1}$. Então, g é holomorfo e f também. $\square$

3. Determine duas funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ que sejam polinômios de grau 4 e harmônicas em $\mathbb{R}^2$.

SOLUÇÃO:

Pelo exercício 2, $f(z) = z^4$ tem parte real e imaginária harmônicas. Tem-se:

$$f(z) = u + iv = (x + iy)^4 \text{ onde } z = x + iy$$

$$u + iv = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + i(4x^3y - 4xy^3)$$

Pode-se considerar

$$u(x, y) = x^4 + y^2 - 6x^2y^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3.$$

4. Determine as funções harmônicas em $\mathbb{R}^2$ dada pela parte real e imaginária das seguintes funções holomorfas:

$$\text{(i)} \quad f(z) = e^z; \qquad \text{(ii)} \quad f(z) = z^3 + 2z; \qquad \text{(iii)} \quad f(z) = z\,e^{-z}.$$

SOLUÇÃO:

(i)
$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= e^{x+iy} \text{ onde } z = x + iy \\ &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Logo,

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

(ii)
$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= (x + iy)^3 + 2(x + iy) \\ &= (x^3 - 3xy^3 + 2x) + i(3x^2y - y^3 + 2y) \end{aligned}$$

Logo,

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^3 + 2x \quad \text{e} \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2y$$

são as funções harmônicas procuradas.

(iii)
$$
\begin{aligned}
f(z) = u + iv &= (x+iy)e^{-(x+iy)} \\
&= e^{-x}(x\cos y + y \operatorname{sen} y) + ie^{-x}(y\cos y - x\operatorname{sen} y).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$u(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\operatorname{sen} y) \quad \text{e} \quad v(x,y) = e^{-x}(y\cos y - x\operatorname{sen} y). \qquad \square$$

5. Seja $u(x,y) = x^2 - y^2 + 4x$ uma função harmônica em $\mathbb{R}^2$. Determine v tal que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja holomorfa em $\mathbb{C}$.

SOLUÇÃO:

Como as equações de Cauchy-Riemann devem verificar, tem-se

(i)
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

(ii)
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 4$$

De (i), integrando em x, tem-se $v(x,y) = 2xy + F(y)$. Derivando em relação a y e igualando a (ii), tem-se:

$$2x + F'(y) = 2x + 4.$$

Então $F(y) = 4y + C$ e $v(x,y) = 2xy + 4y + C$, sendo C uma constante real qualquer. $\square$

6. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω. Provar que:

$$2\int_{\Omega} u|\nabla u|^2\, dxdy = \int_{\Gamma} u^2 \frac{\partial u}{\partial \gamma}\, d\Gamma.$$

SOLUÇÃO:

Considere u e v como u^2 e u respectivamente na primeira fórmula de Green (21). $\square$

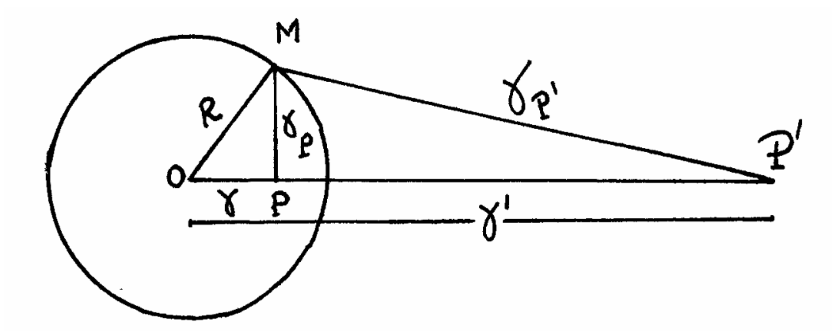
7. Seja $u, v \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$. Provar que:

$$\int_\Gamma \Delta u \, \frac{\partial \Delta v}{\partial \gamma} \, d\Gamma = \int_\Gamma \Delta v \, \frac{\partial \Delta u}{\partial \gamma} \, d\Gamma.$$

SOLUÇÃO:

Considere u e v como Δu e Δv respectivamente na segunda fórmula de Green (23). $\square$

8. No gráfico abaixo, tem-se $\gamma\gamma' = R^2$. Usando vetores, provar que $\dfrac{\gamma_P}{\gamma_{P'}} = \dfrac{\gamma}{R} \cdot$



SOLUÇÃO:

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os vetores unitários

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \frac{\overrightarrow{OP}}{||\overrightarrow{OP}||} \cdot$$

Então:

$$\vec{\gamma}_P = R\,\vec{u} - \gamma\vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{\gamma}_{P'} = R\vec{u} - \gamma'\vec{v}.$$

Logo:

$$|\vec{\gamma}_P^2| = \gamma_P^2 = R^2 - 2R\gamma\vec{u}\cdot\vec{v} + \gamma^2$$
$$|\vec{\gamma}_{P'}|^2 = \gamma_{P'}^2 = R^2 - 2R\gamma'\vec{u}\cdot\vec{v} + (\gamma')^2$$

Donde

$$\gamma_P^2 - \frac{\gamma}{\gamma'}\,\gamma_{P'}^2 = R^2 + \gamma^2 - \frac{\gamma R^2}{\gamma'} - \gamma\gamma' = 0 \text{ pois } \gamma - \gamma' = R^2$$

ou seja:

$$\frac{\gamma_P^2}{\gamma_{P'}^2} = \frac{\gamma}{\gamma'} \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\gamma^2}{R^2}\,.$$

Então: $\dfrac{\gamma_P}{\gamma_{P'}} = \dfrac{\gamma}{R}$ como queríamos provar. $\square$

9. Seja $u(x,y) = x^2 - y^2$.

(i) Verifique que u é solução do problema

$$\left| \begin{array}{lll} \Delta u(x,y) = 0 & \text{em} & \Omega \\ u(x,y) = 2x^2 - 1 & \text{em} & \partial\Omega \end{array} \right.$$

onde

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\big\}.$$

(ii) Usando a fórmula (33) e (i) deduzir que

$$\text{(a)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\alpha\, d\alpha}{3 - 2\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha} = 0. \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\alpha\, d\alpha}{5 - 4\cos\alpha} - \frac{2\pi}{3}$$

SOLUÇÃO:

(i) É trivial.

(ii) Como u é solução do problema de Dirichlet no círculo, pela fórmula (33) tem-se

$$x^2 - y^2 = \frac{1-(x^2+y^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\alpha \, d\alpha}{1 + x^2 + y^2 - 2x\cos\alpha - 2y \operatorname{sen}\alpha} \cdot$$

(a) Considerando $x = y = \dfrac{1}{2}$ na fórmula anterior, tem-se

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\alpha \, d\alpha}{3 - 2\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha} = 0.$$

(b) Considerando $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = 0$ na fórmula anterior, tem-se

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\alpha \, d\alpha}{5 - 4\cos\alpha} = \frac{2\pi}{3} \cdot \qquad \square$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine os polinômios de grau 3, 5, e 7 que sejam harmônicos em $\mathbb{R}^2$.

Resposta: De grau 3, considere $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ e $v(x,y) = 3x^2y - y^3$; de grau 5, considere $u(x,y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ e $v(x,y) = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$.

2. Determine as funções harmônicas conjugadas associadas às funções harmônicas seguintes:

(i) $u(x,y) = x\, e^{-x} \cos y + ye^{-x} \operatorname{sen} y$

(ii) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x$

(iii) $u(x,y) = e^x \cos y$

(iv) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(v) $u(x,y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$

Respostas:

(i) $v(x,y) = ye^{-x} \cos y - xe^{-x} \operatorname{sen} y$

(ii) $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 2y$

(vi) $v(x,y) = 5x^4y - 10x^3y^3 + y^5$

3. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmônica em Ω. Provar que

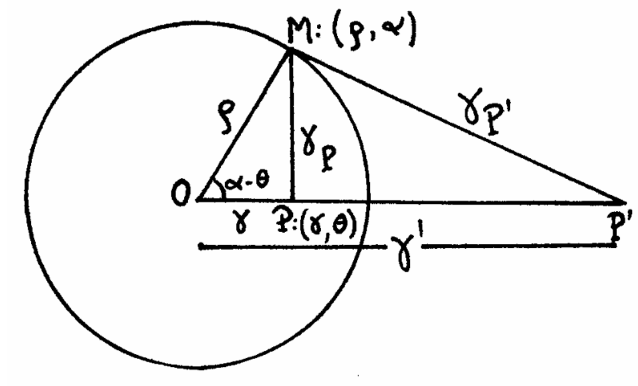
$$\int_\Omega n\, u^{n-1} |\nabla u|^2 \, dxdy = \int_\Gamma u^n \frac{\partial u}{\partial \gamma} \, d\Gamma.$$

Sugestão: Ver o exercício 6.

4. No gráfico abaixo tem-se (ρ, α) coordenadas polares de M e (γ, θ) coordenadas polares de P. Usando vetores, mostre que:

$$\gamma_P^2 = \rho^2 + \gamma^2 - 2\rho\gamma\,\cos(\alpha - \theta)$$

$$\gamma_{P'}^2 = \rho^2 - \gamma'2 - 2\rho\gamma'\cos(\alpha - \theta)$$



5. Sabendo que $u(x, y) = 2xy$ é harmônica, provar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\alpha\, d\alpha}{3 - 2\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha} = \pi.$$

Sugestão: Ver o exercício 9.

4. EQUAÇÕES PARABÓLICAS

Da classificação feita no Capítulo 1, tem-se que as equações diferenciais parciais do tipo parabólico, lineares, no plano $\mathbb{R}^2$ possuem a forma canônica:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, y). \tag{1}$$

Entre outras interpretações físicas, a equação (1) modela o fluxo de temperatura em um fio metálico.

O problema de Cauchy para (1) formula-se a seguir.

Fio de Comprimento Finito - Sejam $L > 0$ e $u_0(x)$ uma função real contínua e limitada em $0 < x < L$. T é um número real positivo. Encontrar $u(x, t)$, função real, definida em $0 < x < L$, $0 < t < T$, satisfazendo às condições:

$$\left| \begin{array}{ll} u_t = u_{xx}\,, & 0 < x < L,\ 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \tag{2}$$

Fio de Comprimento Não Finito - A função $u_0(x)$ é contínua e limitada em $-\infty < x < +\infty$. Encontrar $u(x, t)$ definida no semiplano $-\infty < x < +\infty$ e $0 < t < \infty$, satisfazendo às condições:

$$\left| \begin{array}{ll} u_t = x_{xx}\,, & -\infty < x < +\infty,\ 0 < t < +\infty \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < +\infty \end{array} \right. \tag{3}$$

No caso de fio de comprimento finito, para resolver o problema (2), emprega-se o argumento de séries de Fourier que surge naturalmente como uma imposição do método de separação de variáveis. De fato, suponha que se deseje encontrar uma solução $u(x,t)$ de (2) da forma $u(x,t) = X(x)Y(t)$ isto é, com as variáveis separadas. Substituindo-se na equação (2), obtém-se a condição para determinar $X(x)$, $Y(t)$, isto é,

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad \text{para todo} \quad x \text{ e } \ t.$$

Daí obtém-se:

$$Y'(t) + \lambda^2 Y(t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$Y(t) = c\, e^{-\lambda^2 t}\,.$$

Para obter X encontra-se a equação

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

com condições na fronteira dadas por

$$X(0) = X(L) = 0,$$

que resultam da condição de contorno em (2).

A solução geral desta equação diferencial ordinária é:

$$X(x) = A \cos \lambda\, x + B \operatorname{sen} \lambda\, x.$$

As constantes devem ser determinadas pelas condições $X(0) = X(L) = 0$. Encontra-se:

$$A = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Obtém-se uma sucessão de soluções particulares dadas por:

$$u_n(x,t) = B_n\, e^{-\lambda_n t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\,, \quad n = 1, \ldots .$$

Sendo linear o problema (2), conclui-se que as somas finitas também são soluções, isto é:

$$\sum_{\nu=1}^{n} B_n\, e^{-\lambda_n t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\,,$$

é uma solução.

A solução geral seria o limite quando $n \to \infty$. Para tal, supõe-se que $u_0(x)$ foi estendida de forma ímpar ao intervalo $]-L, L[$ e aí possui uma série de Fourier convergente. Com esta hipótese calcula-se por meio de $u_0(x)$ os coeficientes B_n, isto é,

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{4}$$

Conclui-se que a solução de (2) é obtida por meio da série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\lambda_n t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{5}$$

cujos coeficientes são dados por (4).

Para o caso de comprimento não finito, o método de separação de variáveis não funciona bem. Para constatar, é suficiente proceder como no caso finito para deduzir não ser possível a determinação de uma coleção enumerável de λ_n. (Consulte-se L.A. Medeiros - N.G. Andrade, Iniciação às Equações Diferenciais Parciais, LTC - Rio de Janeiro, RJ, 1978).

Por meio da tentativa de obter a solução no caso de comprimento não finito pelo caso finito, o método sugere o emprego da transformada de Fourier (no caso em que

$-\infty < x < +\infty$, ou seja, um fio infinito) ou da transformada de Laplace (no caso em que $0 < x < +\infty$, que se denomina fio semi-infinito, para distinguí-lo do caso anterior), ao invés da série de Fourier. Do ponto de vista filosófico, tudo resulta do fato que o espectro do operador derivada $\dfrac{d^2}{dx^2}$ não é mais enumerável no caso de comprimento não finito. Para uma compreensão deste ponto, necessário seria o estudo da teoria espectral dos operadores, o que será feito posteriormente.

Retornando ao caso de comprimento não finito, procede-se de modo puramente formal com a hipótese de que as operações de integração a serem feitas sejam permissíveis. Multiplica-se, então, ambos os membros da equação em (3) por $e^{-i\sigma x}$ e integra-se em $-\infty < x < +\infty$, obtendo-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\, u_t(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\, u_{xx}(x,t)\, dx. \tag{6}$$

Tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\, u_t(x,t)\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\, u(x,t)\, dx = v_t(\sigma,t), \tag{7}$$

representando-se por

$$v(\sigma,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\, u(x,t)\, dx, \tag{8}$$

denominada a Transformada de Fourier da função $u(x,t)$, denotada por $\mathcal{F}[u(x,t)]$. Demonstra-se que

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x,t)] = -\sigma^2\, \mathcal{F}[u(x,t)]. \tag{9}$$

De (7), (8), (9), a equação (6) reduz-se à equação ordinária:

$$v_t(\sigma,t) = -\sigma^2\, v(\sigma,t). \tag{10}$$

Encontra-se a condição inicial para (10), observando-se que, de (8) tem-se:

$$v(\sigma, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\, u(x, 0)\, dx = \mathcal{F}[u_0(x)].$$

Logo, fazendo-se

$$v_0(\sigma) = v(\sigma, 0) = \mathcal{F}[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\, u_0(x)\, dx \tag{11}$$

tem-se que a condição inicial de (10) é, de modo natural:

$$v(\sigma, 0) = v_0(\sigma). \tag{12}$$

A solução de (10) e (12) é:

$$v(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t}\, v_0(\sigma).$$

Sabe-se, do estudo da transformada de Fourrier, que:

$$e^{-\sigma^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

Logo,

$$v(\sigma, t) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] \cdot \mathcal{F}[u_0(\sigma)]. \tag{13}$$

Observação. Dadas as funções u e v, denomina-se convolução de u com v, a função $u * v$ definida por:

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) v(x - \xi)\, d\xi.$$

Prova-se que $\mathcal{F}[u * v] = \mathcal{F}(u) \cdot \mathcal{F}(v)$.

Aplicando a observação acima à igualdade (13), obtém-se:

$$v(\sigma,t) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right]. \tag{14}$$

Sendo, por (8), $v(\sigma,t) = \mathcal{F}[u(x,t)]$, obtém-se de (14)

$$\mathcal{F}[u(x,t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right].$$

Sendo $\mathcal{F}$ invertível e a operação de convolução comutativa, obtém-se a solução de (3), fio de comprimento infinito:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}}\, u_0(\xi)\, d\xi \tag{15}$$

denominada fórmula de Poisson, para solução do problema (3). $\square$

Observação. A convolução de duas funções $v(x)$ e $w(x)$ satisfaz a seguinte propriedade: se v é contínua e limitada e w é infinitamente derivável para $x \in \mathbb{R}$, então $v * w$ é infinitamente derivável para $x \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\,(v{*}w) = v{*}\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\cdot$ Tal fato decorre diretamente da definição e de resultados de convergência de integrais impróprias.

Aplicando o resultado acima às funções $v(x) = u_0(x)$ e $w(x,t) = \dfrac{e^{\frac{-x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ e observando que $w \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$, isto é, $w \in C^\infty(\mathbb{R}\times(\varepsilon,\infty))$, para todo $\varepsilon > 0$, obtém-se, de (15),

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty)) \quad \text{e} \quad u_t = u_{xx}\,.$$

Como, por hipótese, $|u_0(x)| \le M$ em $\mathbb{R}$, para algum $M > 0$, tem-se

$$|u(x,t)| \le M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-\xi^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, d\xi = M.$$

Esta limitação será usada para mostrar que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = u_0(x_0).$$

Com efeito, seja $\delta > 0$. Suponha $|(x,t)-(x_0,0)| < \delta$, com $t > 0$. Da continuidade de u_0, resulta que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|u_0(x) - u_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo} \quad |x - x_0| < \delta_1 . \tag{16}$$

Tem-se então que:

$$|u(x,t) - u_0(x_0)| \le |u(x,t) - u_0(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{17}$$

Por outro lado, como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-\xi^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, d\xi = 1, \tag{18}$$

tem-se

$$|u(x,t) - u_0(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} |u_0(x-y) - u_0(x)|\, dy. \tag{19}$$

Como $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$ tem-se u_0 uniformemente contínua em compactos de $\mathbb{R}$, logo, se $|x - x_0| \le \delta_1$, tem-se que existe $\eta > 0$ tal que, se $|y| < \eta$, então $|u_0(x-y) - u_0(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4} \cdot$ Assim (19) pode ser reescrita da forma

$$|u(x,t) - u_0(x)| \le \int_{|y|\ge\eta} \frac{e^{\frac{-y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} |u_0(x-y) - u_0(y)|\, dy + \frac{\varepsilon}{4} \int_{|y|<\eta} \frac{e^{\frac{-y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dy.$$

Utilizando-se novamente (18) e a limitação de u_0, encontra-se

$$|u(x,t) - u_0(x)| \le 2M \int_{|y|\ge\eta} \frac{e^{\frac{-y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dy + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \tag{20}$$

Efetuando mudança de variável conveniente e lembrando que a integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds$ converge, tem-se

$$\int_{|y|\geq\eta} \frac{e^{\frac{-y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dy = \int_{|s|\geq\frac{n}{2\sqrt{t}}} \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx \leq \frac{\varepsilon\sqrt{2}\pi}{8M}$$

desde que $t \leq \delta_2$, onde δ_2 depende apenas de η e de ε. Substituindo-se em (20), e, em seguida, substituindo-se (20) em (17), obtém-se finalmente que

$$|u(x,t) - u_0(x_0)| \leq \varepsilon,\ \text{para todo } (x,t) \text{ tal que } |(x,t) - x_0, 0)| \leq \delta,\ \ t > 0,$$

desde que $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Foi provado então o seguinte resultado de existência de soluções:

Teorema 1. Se $u_0 \in C^0(\mathbb{R}),\ u_0$ limitada, então a função

$$(21) \qquad u(x,t) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}}\, u_0(\xi)\, d\xi, \quad \text{se} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u_0(x), \quad \text{se} \quad x \in \mathbb{R},\ t = 0 \end{array} \right.$$

é solução de (3). Além disso, $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

Deve-se chamar a atenção para esta propriedade importante da solução: mesmo com dado inicial u_0 apenas contínuo e limitado, a solução se torna completamente regular para $t > 0$! Tal propriedade é conhecida como efeito regularizante.

EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA

Dada $u_0(x)$ contínua e limitada em $\mathbb{R}$ e $h(x,t)$ contínua e limitada em $\mathbb{R} \times [0,\infty)$, encontrar $u(x,t)$, definida no domínio $-\infty < x < +\infty,\ 0 \leq t < +\infty$, limitada, solução do problema:

$$
(22) \qquad \left|\begin{array}{l}
u_t = u_{xx} + h, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < +\infty \\
u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))
\end{array}\right.
$$

Observe que, como se trata de um problema linear, pondo $u = v + w$, onde v satisfaz (3) e w é solução de

$$
(23) \qquad \left|\begin{array}{l}
w_t = w_{xx} + h, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\
w(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \\
w \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))
\end{array}\right.
$$

resulta que u é solução de (22). Logo, basta considerar o problema (23).

Embora o problema (23) seja resolvido com auxílio da transformada de Fourier, será empregado um método semelhante ao de variação de parâmetros ou de Lagrange, para resolver equações diferenciais ordinárias lineares não homogêneas. Este método no caso de equações diferenciais parciais lineares denomina-se Princípio de Duhamel. Já foi aplicado no Capítulo 2 sobre Equações Hiperbólicas.

Princípio de Duhamel: Seja $h \in C(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$, h limitada. Se, para cada $s > 0$, $z(x,t,s)$ é solução do problema

$$
(24) \qquad \left|\begin{array}{l}
z_t = z_{xx}\,, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\
z(x,0,s) = h(x,s), \quad -\infty < x < +\infty \\
z \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))
\end{array}\right.
$$

então $w(x,t) = \int_0^t z(x,t-s,s)\,ds$ é solução de (23).

Demonstração: Tem-se $w(x,0) = 0$ da definição de w. Da regra de Derivação de

Leibniz, tem-se

$$w_t(x,t) = z(x,0,t) + \int_0^t \frac{dz}{\partial t}\,(x, t-s, s)\, ds.$$

Utilizando-se (24) encontra-se

$$w_t(x,t) = h(x,t) + \int_0^t z_{xx}(x, t-s, s)\, ds = h(x,t) + w_{xx}(x,t), \text{ em } \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

A regularidade de w decorre da regularidade de z. $\square$

Utilizando-se então o Princípio de Duhamel para resolver o problema (23) e, notando que a solução de (24) é a mesma do problema (3), dada pela fórmula de Poisson (15), encontra-se a solução procurada

$$\text{(25)} \qquad w(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{4\pi(t-x)}}\, h(\xi, s)\, d\xi\, ds. \qquad \square$$

Fio de Comprimento Semi-Infinito – A função $u_0(x)$ é contínua e limitada em $0 < x < \infty$ e a função $h(t)$ é contínua e limitada em $0 < t < \infty$. Encontrar $u(x,t)$, definida no domínio $0 < x < \infty$ e $0 < t < \infty$, $u(x,t)$ limitada, satisfazendo às condições abaixo:

$$\text{(26)} \qquad \left| \begin{array}{l} u_t = u_{xx}\,, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \geq 0 \\ u(0,t) = h(t), \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

No caso particular em que $h(t) = 0$, $\forall\, t > 0$, sendo $u_0(0) = 0$, estendendo u_0 de forma ímpar a toda reta pode-se utilizar a solução já obtida para o caso do fio infinito, para encontrar a solução de (26). Considere-se agora o caso particular em que $u_0(x) = 0$, para todo $x > 0$, isto é

$$(27) \qquad \left| \begin{array}{l} u_t = u_{xx}\,, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad x \geq 0 \\ u(0,t) = h(t), \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

Sendo $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, define-se a transformada de Laplace de f, denotada por $\mathcal{L}(f)$, por:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Retornando ao problema (27), define-se $\mathcal{L}(u(x,t)) = U(x,s)$, transformada de Laplace na variável t de $u(x,t)$ e $\mathcal{L}(h(t)) = H(s)$. Nesse caso, utilizando-se as propriedades da transformada da derivada de uma função e a linearidade, obtém-se de (27) e da condição de limitação de $u(x,t)$, o seguinte problema de valor inicial:

$$(28) \qquad \left| \begin{array}{l} U_{xx}(x,s) - sU(x,s) = 0 \\ U(0,s) = H(s) \\ |U(x,s)| \leq K(s), \quad \forall\, x \geq 0 \end{array} \right.$$

A solução geral da equação diferencial, nesse caso, é dada por

$$U(x,s) = c_1(s)e^{x\sqrt{s}} + c_2(s)e^{-x\sqrt{s}}.$$

Utilizando a condição de limitação conclui-se que $c_1(s) = 0$ e, em seguida, substituindo-se a condição inicial obtém-se

$$(29) \qquad U(x,s) = H(s)e^{-x\sqrt{s}}.$$

Verifica-se que

$$e^{-x\sqrt{s}} = \mathcal{L}\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi t^3}}\, e^{\frac{-x^2}{4t}} \right).$$

Por outro lado, sendo $(u * v)(t) = \int_0^t u(t-y)v(y)\,dy$, obtém-se $\mathcal{L}(u * v) = \mathcal{L}(u) \cdot \mathcal{L}(v)$. Utilizando estas observações em (29), obtém-se, finalmente

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{x}{\sqrt{(t-\xi)^3}}\, e^{\frac{-x^2}{4(t-\xi)}}\, h(\xi)\,d\xi.$$

Observe que, combinando as soluções dos dois problemas, um com $u_0(x) = 0$ e outro com $h(t) = 0$, pode-se resolver o problema mais geral (26).

PROPRIEDADES DAS SOLUÇÕES

Os problemas de valor inicial e/ou de contorno associados a equações diferenciais parciais são denominados *bem postos*, no sentido de Hadamard (1865-1963), quando têm solução, ela é única e depende continuamente dos dados, isto é, dois problemas com dados bem próximos têm soluções bem próximas. Esta propriedade mostra um comportamento estável do modelo. Para verificar a propriedade de unicidade, vai ser provado o resultado a seguir. É um resultado bastante geral, pois também pode ser aplicado à equação do calor em dimensão espacial n.

Teorema 2 (Princípio do Máximo para a Equação do Calor). Sejam a e b finitos, $a < b$ e $T > 0$ dados e α constante positiva. Suponha que $u \in C^2((a,b) \times (0,T]) \cap C^0([a,b] \times [0,T])$ é solução da equação $u_t = \alpha^2\, u_{xx}$, em $(a,b) \times (0,T]$. Então u atinge seu máximo e seu mínimo em $\{(a,t) \cup (b,t),\ t \in [0,T]\}$ ou em $\{(x,0),\ x \in (a,b)\}$.

Demonstração: Seja $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$, onde $\varepsilon > 0$ arbitrário. Então, $v \in C^2((a,b) \times (0,T]) \cap C^0([a,b] \times [0,T])$ e v satisfaz

$$v_t = \alpha^2\, v_{xx} - 2\varepsilon\alpha^2. \tag{30}$$

Da continuidade de v segue-se que existe $(x_0,t_0) \in [a,b] \times [0,T]$ onde v atinge seu máximo. Suponha, por contradição, que $(x_0,t_0) \in (a,b) \times (0,T)$. Como $v \in C^2((a,b) \times$

$(0,T])$, segue-se que

$$v_t(x_0,t_0)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,(x_0,t_0)\leq 0.$$

Comparando com (30) obtém-se $2\varepsilon\alpha^2 \leq 0$. Suponha agora que $(x_0,t_0)\in(a,b)\times\{T\}$. Novamente da regularidade de v segue-se que

$$v_t(x_0,t_0)\geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,(x_0,t_0)\leq 0,$$

de onde, comparando com (30), novamente se chega a $2\varepsilon\alpha^2\leq 0$, concluindo então que o máximo de v ocorre em $\Gamma=\{(a,t)\cup(b,t),\ t\in[0,T]\}\cup\{(x,0),\ x\in(a,b)\}$. Por outro lado, da definição de v,

$$\max_{[0,T]\times[a,b]} u(x,t)\leq \max_{[0,T]\times[a,b]} v(x,t)\leq \max_{\Gamma} u(x,t)+\varepsilon \max_{[a,b]} x^2.$$

Tomando limite quando ε tende a zero, obtém-se

$$\max_{[0,T]\times[a,b]} u(x,t)\leq \max_{\Gamma} u(x,t).$$

Como a desigualdade vale no outro sentido, tem-se a igualdade. No caso do mínimo, o argumento é similar, tomando $w=-u$. $\square$

Com o auxílio do princípio do máximo, fica simples provar a unicidade de soluções do problema (2), inclusive no caso não homogêneo (o resultado também pode ser usado para mostrar a unicidade em dimensão espacial maior que 1).

Teorema 3. Sejam $u_0\in C[0,L]$, $f,g\in C[0,\infty)$, com $u_0(0)=f(0)$ e $u_0(L)=g(0)$. Seja $g\in C^1((0,L)\times(0,\infty))$. Então existe no máximo uma solução para o problema

$$(31)\qquad \left|\begin{array}{l} u\in C^2((0,L)\times(0,\infty))\cap C([0,L]\times[0,\infty)) \\ u_t=\alpha^2\,u_{xx}+g, \quad 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), \quad x\in[0,L] \\ u(0,t)=f(t) \qquad u(L,t)=g(t), \quad t\geq 0 \end{array}\right.$$

Demonstração: Suponha que u e v sejam duas soluções de (31). Então $w = u - v$ é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} w_t = \alpha^2\, w_{xx}\,, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\[2mm] w(x,0) = 0, \quad x \in [0,L] \\[2mm] w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \end{array}\right.$$

Seja $T > 0$ arbitrário. Pelo Teorema 2, o máximo e o mínimo de w são atingidos no conjunto $\{(0,t)$ ou $(L,t),\ t \in [0,T]\} \cup \{(x,0),\ x \in (0,L)\}$, onde $w = 0$, logo $w = 0$ em $[0,L] \times [0,T]$. Como $T > 0$ é arbitrário, $w = 0$ em $[0,L] \times [0,\infty)$, isto é $u = v$. $\square$

Para mostrar a unicidade de soluções no caso do problema (3), tem-se o seguinte resultado:

Teorema 4. Sejam $g \in C(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ e $u_0 \in C(\mathbb{R})$ limitadas. Então existe no máximo uma solução $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, u limitada, do problema

$$\text{(32)} \qquad \left|\begin{array}{l} u_t = \alpha^2\, u_{xx} + g, \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty) \\[2mm] u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Demonstração: Sejam u_1 e u_2 soluções de (32). Então $w = u_1 - u_2$ satisfaz

$$\text{(33)} \qquad \left|\begin{array}{l} w_t = \alpha^2\, w_{xx}\,, \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty) \\[2mm] w(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{com } w \text{ limitada} \end{array}\right.$$

Seja $M > 0$ tal que $|w(x,t)| \leq M$ para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ e $T > 0$ e $\alpha > 0$, com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}, |x| < a\}$.
Defina $v\colon \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por:

$$v(x,t) = w(x,t) - \frac{M}{a^2}\, x^2 - \frac{2M\alpha^2 t}{a^2}\,.$$

Tem-se, então, $v \in C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$. De (33) segue-se que $v_t = \alpha^2\, v_{xx}$ em $\Omega \times (0,T]$, então, do Teorema 2, segue-se

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} v(x,t) = \max_{\Gamma} v(x,t)$$

onde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, com $\Gamma_1 = \partial\Omega \times [0,T]$ e $\Gamma_2 = \Omega \times \{0\}$. Mas, em Γ_1, tem-se

$$v(x,t) \leq M - \frac{Ma^2}{a^2} - \frac{2M\alpha^2 t}{a^2} = \frac{-2M\alpha^2 t}{a^2} \leq 0$$

e, em Γ_2,

$$v(x,0) = w(x,0) - \frac{Mx^2}{a^2} = \frac{-Mx^2}{a^2} \leq 0,$$

logo se conclui que $v \leq 0$ em $\overline{\Omega} \times [0,T]$. Assim, por definição de v, tem-se

$$w(x,t) \leq \frac{M}{a^2}\, x^2 + \frac{2M\alpha^2 t}{a^2}\,,$$

$\forall\,(x,t)$ tal que $|x| \leq a$ e $t \in [0,T]$. Fazendo a tender a $+\infty$ tem-se $w(x,t) \leq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$. Como $T > 0$ arbitrário tem-se

$$w(x,t) \leq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times [0,\infty).$$

Tomando agora

$$\tilde{v}(x,t) = -w(x,t) - \frac{M}{a^2}\, x^2 - \frac{2M\alpha^2 t}{a^2}$$

e utilizando raciocínio análogo, encontra-se

$$w \geq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times [0,\infty),$$

de onde se conclui, finalmente, que $w = 0$, logo $u_1 = u_2$. $\square$

OBSERVAÇÃO FINAL

A partir da expressão (21) para a solução do problema de Cauchy associado à equação do calor (3), pode-se notar a seguinte propriedade: o valor de $u(x,t)$ depende dos valores do dado inicial $u_0(\xi)$, para todo ξ, $-\infty < \xi < +\infty$. Reciprocamente, o valor de u_0 num ponto ξ_0 tem um efeito imediato em todos os pontos (para $t > 0$). Diz-se então que o fluxo de calor se propaga com uma velocidade infinita. Tal comportamento é bem diferente do que ocorre com a equação da onda (e todas as equações hiperbólicas).

Já foi observado também, logo após o Teorema 1, o denominado efeito regularizante, isto é, a solução é infinitamente continuamente diferenciável (para $t > 0$), mesmo quando o dado inicial não seja; isto significa que as singularidades são imediatamente absorvidas e a solução se torna regular assim que ocorre a propagação.

Assim como no caso do modelo homogêneo, observando a expressão da solução (25) do problema de Cauchy para a equação do calor não homogênea (23), nota-se que, mesmo que $h(\xi,s)$ seja nula exceto numa região $(-\varepsilon,\varepsilon) \times (0,s_0)$, com $s_0,\varepsilon > 0$ "pequenos", os valores da solução $u(x,t)$ em *todos* os pontos (x,t), onde $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, dependerão dos valoes de h nesta pequena região.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. A temperatura inicial nos pontos de abcissa $0 \leq x \leq L$ de uma barra com superfície lateral isolada, é igual a $u_0(x) = u_0$ constante e seus extremos se mantêm às temperaturas constantes $u(0,t) = u_1$ e $u(L,t) = u_2\,,\ 0 < t < \infty$.

(a) Determine a temperatura $u(x,t)$ em cada ponto x e em cada instante $t,\ \ t > 0$.

(b) Determine a temperatura estacionária $\bar{u}(x) = \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

SOLUÇÃO:

O problema que se deseja resolver é:

$$\left|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}\,, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \\ u(x,0) = u_0\,, \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u_1\,, \quad u(L,t) = u_2\,, \quad t > 0 \end{array}\right.$$

Procura-se solução da forma $u(x,t) = v(x,t) + \bar{u}(x)$, onde $\bar{u}(x)$ é a solução estacionária (de equilíbrio), a qual satisfaz a equação e as condições de fronteira, isto é,

$$\left|\begin{array}{l} \bar{u}''(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ \bar{u}(0) = u_1\,, \quad \bar{u}(L) = u_2 \end{array}\right.$$

Assim, $\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\,\frac{x}{L}$, logo a função $v(x,t)$ satisfaz as seguintes condições:

$$\left|\begin{array}{l} v_t = v_{xx}\,, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \\ v(x,0) = u_0 - \bar{u}(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t > 0 \end{array}\right.$$

Este problema já foi resolvido anteriormente, tendo como solução

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\frac{n\pi t}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{onde} \quad B_n=\frac{2}{L}\int_0^L [u_0-\bar{u}(x)] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Substituindo-se $\bar{u}(x)$ e integrando, encontra-se, finalmente

$$u(x,t)=u_1+(u_2-u_1)\,\frac{x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\big((-1)^n(u_2-u_0)-(u_1-u_0)\big)e^{-\frac{n\pi t}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

2. Determine uma solução do problema misto

$$\left|\begin{array}{l} u_t=u_{xx}\,, \quad 0<x<L, \quad 0<t<\infty \\ u(x,0)=1+\operatorname{sen}\big(\frac{\pi x}{L}\big), \quad 0\le x\le L \\ u(0,t)=u(L,t)=1, \quad t>0 \end{array}\right.$$

SOLUÇÃO:

Aplicando a transformada de Laplace com relação à variável t e denotando $U(x,s)=\mathcal{L}(u(x,t))$, encontra-se

$$\left|\begin{array}{l} U_{xx}(x,s)-s\,U(x,s)=-1-\operatorname{sen}\big(\frac{\pi x}{L}\big) \\ U(0,s)=U(L,s)+\frac{1}{s} \end{array}\right.$$

Resolvendo este problema obtém-se

$$U(x,s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\pi^2/L^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

e, utilizando-se uma tabela de transformadas de funções elementares, chega-se à solução procurada

$$u(x,t) = 1 + e^{-\frac{\pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

3. Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^2$, $a(x,t) > 0$ em Ω e $Lu(x,t) = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u_t$, com $Lu > 0$ em Ω, onde as funções a, b e c são regulares.

(a) Se $u \in C^2(\Omega)$, mostre que u não tem máximo local em Ω.

(b) Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, mostre que u atinge seu máximo em $\partial\Omega$ (a fronteira de Ω).

SOLUÇÃO:

(a) Suponha, por absurdo, que u atinge um máximo local em $(x_0, t_0) \in \Omega$. Então $\nabla u(x_0, t_0) = 0$. Além disso, como a função $x \to u(x, t_0)$ tem também um máximo local em (x_0, t_0), segue-se que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0$. Nesse caso,

$$Lu(x_0, t_0) = a(x_0, t_0)u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0,$$

o que é uma contradição com a hipótese. Logo tem-se o resultado.

(b) Como $u \in C(\overline{\Omega})$, u tem um máximo em $\overline{\Omega}$. De (a) tem-se que o máximo só pode ser atingido em $\partial\Omega$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considere o problema

$$\left|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}\,, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{array}\right.$$

(a) Use o método de separação de variáveis e série de Fourier para obter uma candidata a solução do problema.

(b) Dê condições sobre $u_0(x)$ para que a expressão encontrada no item (a) seja realmente solução do problema, $u \in C^2([0,L]\times(0,\infty)) \cap C^0([0,L]\times[0,\infty))$, e u satisfaz as condições inicial e de fronteira.

(c) Mostre que a solução obtida converge para uma solução de equilíbrio (independente de t), quando $t \to \infty$.

Resposta: $u(x,t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} \cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, onde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Use a transformada de Laplace para resolver o problema

$$\left|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}\,, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) \end{array}\right.$$

Resposta:

$$u(x,t) = 1 + e^{-\frac{4\pi^2 t}{L}} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

3. Sendo $u_0 \in C(\mathbb{R})$, limitada e $\alpha \in \mathbb{R}$ utilize a transformada de Fourier para resolver o problema

$$\left| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + \alpha u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Resposta:

$$u(x,t) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{e^{\alpha t}}{\sqrt{4\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t = 0 \end{array} \right.$$

4. Sejam α, h e β constantes reais não nulas. Use transformada de Laplace para resolver o problema

$$\left| \begin{array}{l} u_t = \alpha^2\, u_{xx} - h^2 u, \quad x, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad x \geq 0 \\ u(0,t) = \beta, \quad \displaystyle\lim_{x \to \infty} u(x,t) = 0, \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

Resposta:

$$u(x,t) = \frac{\beta x}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-h^2 r}}{\tau^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4\tau\alpha^2}}\, d\tau.$$

5. Utilize o princípio do máximo para provar a unicidade de soluções do problema (26). $\square$

5. SOLUÇÕES ANALÍTICAS

O objetivo da presente seção é fazer um estudo elementar das soluções analíticas das equações diferenciais parciais. As demonstrações da existência de soluções analíticas para equações ordinárias ou diferenciais parciais, são devidas a Cauchy, publicadas em C.R. Acad. de Sc. de Paris, vol. XIV, p. 1020 e vol. XV pp. 44, 85, 131 (1842). A demonstração de Cauchy baseia-se num método de comparação por ele denominado "Método dos Limites", hoje conhecido como método das funções majorantes. Posteriormente, este método foi desenvolvido por Sofia Kowalewsky em sua tese de doutorado orientada por Weierstass, em 1874, em Göttingen. Há contribuições significantes de Goursat e Darboux sobre este método. Na presente exposição, analisa-se um caso bem particular na tentativa de passar para o leitor a idéia genial de Cauchy. Consulte-se para outras informações Goursat [3] ou Hadamard [4].

Tendo em vista ser Sofia Kowalewsky uma representante, famosa, do belo sexo, que aparece no presente texto, considera-se educativo dizer algo sobre sua vida. Das fotografias conhecidas, deduz-se ter sido ela uma charmosa e linda mulher. Filha de um general de artilharia do exército russo, descendente do rei da Hungria. Contam seus biógrafos, que sua paixão pela matemática surgiu ao ler as notas de aula dos cursos de matemática que seu pai fez na escola de artilharia em Moscou. Casou-se com um estudante russo de sobrenome Kowalewsky e a seguir, ambos, foram completar seus estudos em Berlim. Ele em geologia e ela, evidentemente, em matemática, tendo como orientador de trabalho o jovem matemático Weierstrass. Sob esta orientação deu profundas contribuições às equações diferenciais parciais e às integrais Abelianas, cf. J. Hadamard op. cit.. Posteriormente viajou para Paris onde teve oportunidade de conhecer grandes mestres. Nesta ocasião, fez significativas contribuições à Física Matemática, tendo sido homenageada com prêmio da Academia de Ciências. Por intermédio de Weierstrass foi convidada por Mittag Lefler para ocupar uma posição permanente na Universidade de Estocolmo, onde trabalhou até sua morte. Dizem seus biógrafos que fez igualmente substanciais contribuições literárias, como acontecia às pessoas cultas da época.

Retornando ao estudo das soluções analíticas, inicia-se com a análise de uma única equação ordinária servindo de modelo para a compreensão do criativo método de Cauchy.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Considere-se a função $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, sendo Ω um aberto do plano $\mathbb{R}^2$ e o problema de Cauchy:

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

Com (x_0, y_0) denota-se um ponto do aberto Ω. A função real f é suposta analítica em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0), isto é, em uma vizinhança deste ponto a f representa-se pela série de potências aí convergente:

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i \, (y - y_0)^j$$

sendo $a_{ij} = \dfrac{1}{i!j!} \; \dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$, calculadas em (x_0, y_0).

Denomina-se solução analítica do problema de Cauchy (1) a uma função $y = y(x)$ analítica em uma vizinhança do ponto x_0 , satisfazendo a $(1)_1$ pontualmente e a condição

$(1)_2$. O resultado fundamental de Cauchy, diz que se f for analítica em uma vizinhança de (x_0, y_0) então o problema (1) possui uma solução analítica. Todo o trabalho deste parágrafo consiste em demonstrar este resultado.

Para simplificar os cálculos, supõe-se $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, isto é, a origem. O problema de Cauchy toma a forma:

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{em uma vizinhança de} \quad (0,0) \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

A solução $y = y(x)$ procurada escreve-se sob a forma

$$(3) \qquad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, x^k \, ,$$

em uma vizinhança do zero. Os coeficientes b_k são dados por

$$(4) \qquad b_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k y}{dx^k} \, , \text{ calculados em } x = 0.$$

Os coeficientes b_k, $k = 0, 1, 2 \ldots$ são calculados por meio da equação (2) e suas derivadas sucessivas calculadas no ponto $x = 0$. De fato, tem-se $\dfrac{dy}{dx}\big|_{x=0} = f(0,0)$ e

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{l} b_0 = y(0) \\ b_1 = y'(0) = f(0,0) \\ 2!\, b_2 = y''(0) = f_x(0,0) + f_y(0,0) b_1 \\ 3!\, b_3 = y'''(0) = f_{xx}(0,0) + 2b_1 f_{xy}(0,0) + f_{yy}(0,0) b_1^2 + 2b_2 f_y(0,0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Portanto os coeficientes do desenvolvimento (3) são conhecidos, devido às relações (5), por meio dos coeficientes do desenvolvimento de $f(x,y)$ em série de potências, em uma vizinhança da origem, isto é,

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\, x^i\, y^j \tag{6}$$

sendo

$$a_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}\bigg|_{\substack{x=0\\ y=0}} . \tag{7}$$

Portanto, fazendo-se $x = y = 0$ em (5) obtém-se $\dfrac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}, \dfrac{d^3y}{dx^3}\bigg|_{x=0}, \ldots$ que darão os coeficientes b_k do desenvolvimento (3) de $y(x)$, por meio dos coeficientes a_{ij} do desenvolvimento (6) de $f(x,y)$.

Portanto de (5) obtém-se os coeficientes b_k de (3) em função dos a_{ij} . De modo preciso os b_k são obtidos por meio de polinômios em a_{ij} com coeficientes inteiros não negativos. Dois são os problemas a resolver:

i) A convergência de (3) com os coeficientes b_k dados por (5).

ii) É esta série solução de (2) ?

Admitindo-se a (i) demonstra-se a (ii). De fato, substituindo-se $y = y(x)$ dada por (3) com coeficientes (4) calculados por (5) na equação obtém-se a função $\varphi(x) = y'(x) - f(x, y(x))$ definida em uma vizinhança de $x = 0$, nula com todas as derivadas em uma vizinhança do zero onde a série converge. Logo φ é a função nula nesta vizinhança provando o ii).

Resta demonstrar a convergência da série (3). Esta convergência será obtida por meio do método de funções majorantes que Cauchy denominou método dos limites. Considere-se uma função $F(x,u)$ analítica em $(0,0)$, isto é,

$$F(x,u) = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}\, x^i\, u^j \tag{8}$$

convergente em $|x| < r$, $|u| < \rho$, cujos coeficientes não negativos são tais que:

(9) $$|a_{ij}| \leq A_{ij}\,; \quad i,j = 0,1,\dots$$

Diz-se que a função analítica $F(x,u)$ é uma majorante da função analítica $f(x,y)$: formula-se com F o problema de Cauchy majorante

(10) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = F(x,u) \\ u(0) = 0 \end{array}\right.$$

Considere-se a solução analítica u de (10) dada por:

(11) $$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

convergente em $|x| < T$ sendo

(12) $$c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k u}{dx^k}\bigg|_{x=0}.$$

Por um processo análogo ao desenvolvido para obter (5), calcula-se os c_k em função dos coeficientes A_{ij} de (8). Tem-se que os c_k são obtidos como polinômios em A_{ik}, com coeficientes inteiros não negativos. Portanto $c_k = P(A_{ij})$ e $b_k = P(a_{ij})$. Tem-se por (9):

(13) $$|b_k| \leq |P(a_{ij})| \leq P(A_{ij}) = c_k$$

para todo $k = 0,1,2,\dots$

Logo, (13) afirma que se (10) possuir solução analítica convergente em uma vizinhança de zero, então ela é majorante da função $y(x)$ dada por (3). Logo, a série (3) é convergente em uma vizinhança da origem, como desejava-se provar. Resta, apenas provar que (10) possui solução analítica. O sucesso do método consiste em escolher de modo conveniente a função $F(x,u)$ majorante da $f(x,y)$ de modo a obter-se um problema de Cauchy de simples solução.

Suponha-se que a função f seja analítica em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq a, |y| \leq b\}$ e seja M o máximo de f neste domínio. Tem-se que

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\, a^i\, b^j$$

converge para $f(a,b)$. Logo, $|a_{ij}\, a^i\, b^j| < M$ ou

$$|a_{ij}| \leq \frac{M}{a^i\, b^j} \qquad i,j = 0,1,2,\ldots.$$

Logo,

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\, x^i\, y^j \leq M \sum_{i,j=1}^{\infty} ((\frac{x}{a}\Big)^i \Big(\frac{y}{b}\Big)^j.$$

A soma da série geométrica da direita é

$$F(x,y) = \frac{M}{\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)\Big(1 - \frac{y}{b}\Big)}$$

e a série da esquerda é a função $f(x,y)$ do problema (2). Logo, $F(x,y)$ é uma função analítica majorante de $f(x,y)$ na vizinhança da origem $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| < a, |y| < b\}$. Portanto natural é escolher $F(x,u)$, $|x| < a$, $|u| < b$ para compor o problema majorante auxiliar (10). Obtém-se o problema auxiliar majorante:

$$(14) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{M}{(1-\frac{x}{a})(1-u)} \quad \text{em} \quad |x| < a, |u| < b \\[2ex] u(0) = 0 \end{array} \right.$$

A equação

$$(15)\qquad \left(1-\frac{u}{b}\right)\frac{du}{dx}=\frac{M}{1-\frac{x}{a}}$$

é de fácil resolução. De fato, as variáveis se separam e sua solução é:

$$(16)\qquad u-\frac{u^2}{2b}=-aM\log\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

Daí obtém-se uma solução de (14) dada por:

$$(17)\qquad u=b-b\sqrt{1+2a\frac{M}{b}\log\left(1-\frac{x}{a}\right)}.$$

Toma-se $\log 1=0$, resultando que $u(0)=0$. Esta função u é analítica numa vizinhança da origem. Realmente, a função sob o radical é analítica no interior do intervalo $|x|<a$ e se anula para

$$(18)\qquad x=\rho=a\left(1-e^{-\frac{b}{2aM}}\right).$$

Quando pertence ao círculo C_ρ de raio ρ e centro na origem, o radical em (17) é uma função analítica. É conseqüência do módulo de $\dfrac{2aM}{b}\log\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$ ser inferior a um. Para verificação deste fato, note-se que sendo $|x|<a$ obtém-se:

$$\log\left(1-\frac{x}{a}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{n-1}}\frac{x^n}{n}$$

uniforme e absolutamente convergente em $|x|<\rho<a$. Tem-se:

$$\left|\frac{2aM}{b}\log\left(1-\frac{x}{a}\right)\right|\le\frac{2aM}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{n-1}}\frac{|x|^n}{n}\ \le$$

$$\le\left|\frac{2aM}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{n-1}}\frac{\rho^n}{n}\right|=\left|\frac{2aM}{b}\log\left(1-\frac{\rho}{a}\right)\right|=1.$$

Conclui-se que u dada por (17) possui uma representação em séries de potências convergente em C_ρ e majorante de (3). Logo (3) converge em C_ρ. $\square$

A unicidade segue-se supondo-se que existam duas soluções y, $\hat{y}$ para o problema de Cauchy (2). Fazendo-se $z = y - \hat{y}$, obtém-se

$$z'(x) = f(x, y(x)) - f(x, \hat{y}(x)), \quad z(0) = 0, \quad \text{pois} \quad y(0) = \hat{y}(0) = 0.$$

A solução dada por (3) com os coeficientes dados por (5) é a série com coeficientes nulos, logo z é a função nula em C_ρ ou $y = \hat{y}$. $\square$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

A extensão do método dos limites de Cauchy para equações diferenciais parciais é conhecida sob a denominação de teorema de Cauchy-Kowalewsky. Para facilitar a compreensão do processo limitar-se-á a um sistema de equações diferenciais parciais do tipo seguinte:

$$(18) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} G_{ij}(u_1, u_2) \frac{\partial u_j}{\partial y} \\ u_i(0, y) = \phi_i(y) \quad \text{para todo } y \\ i = 1, 2. \end{array} \right.$$

Note-se que $G_{ij}(\xi, \eta)$, $i, j = 1, 2$, é uma função real definida em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$, continuamente diferenciável. Com $u_i(x, y)$, $i = 1, 2$, representa-se uma função definida em um aberto do $\mathbb{R}^2$, continuamente diferenciável, tal que para todo par (x, y) tem-se $(u_1(x, y), u_2(x, y))$ pertence a Ω. A função $\phi_i(y)$, $i = 1, 2$, é o dado de Cauchy conhecido sobre a reta $x = 0$ do plano $\mathbb{R}^2$. Supõe-se continuamente derivável.

Supõe-se $\phi_i(0) = 0$, o que não é restritivo. É suficiente considerar a mudança de variáveis $u_i(x,y) - \phi_i(y) = v_i(x,y)$, $i = 1,2$. Logo na nova variável tem-se $v_i(0,y) = 0$ para todo y. Conseqüentemente, sendo $\phi_i(0) = 0$ tem-se $u_i(0,0) = 0$, pela condição de Cauchy. Portanto, $G_{ij}(u_1(x,y), u_2(x,y))$ em $x = 0$, $y = 0$ reduz-se a $G_{ij}(0,0)$. Portanto, a série de Taylor de $G_{ij}(u_1,u_2)$ em uma vizinhança da origem $(0,0)$ escreve-se:

$$G_{ij}(u_1,u_2) = \sum_{r,s=1}^{\infty} b_{rs}^{ij}\, u_1^r\, u_2^s\,, \tag{19}$$

sendo

$$b_{rs}^{ij} = \frac{1}{r!s!}\frac{\partial^{r+s} G_{ij}}{\partial u_1^r\, \partial u_2^s} \tag{20}$$

calculadas em $x = 0$, $y = 0$.

A série de Taylor do dado inicial em uma vizinhança da origem do eixo dos y, é dada por:

$$\phi_i(y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell^i\, y^\ell, \tag{21}$$

sendo:

$$a_\ell^i = \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell\, \phi_i(y)}{dy^\ell}\,, \quad \text{em} \quad y = 0. \tag{22}$$

Note-se que $a_0 = \phi_i(0) = 0$, assim, inicia-se o somatório (21) com $\ell = 1$.

O objetivo é demonstrar a existência de soluções analíticas do problema de Cauchy (18), por intermédio do método dos limites ou, equivalentemente, das funções majorantes. Supõe-se, então, $G_{ij}(u_1,u_2)$, $i,j = 1,2$, analíticas em $|u_i| < a$, $i = 1,2$ e $\phi_i(y)$ analítica em $|y| < b$. Logo, admite-se, que as séries (19) com coeficientes (20) e (21) com coeficientes (22), convergem, respectivamente, em $|u_i| < a$, $i = 1,2$ e $|y| < b$.

Deve provar que (18) possui uma solução analítica em uma vizinhança da origem $(0,0)$ do $\mathbb{R}^2$.

De modo preciso, tem-se como objetivo principal, provar o problema de Cauchy (18), com estas hipóteses, possui uma solução do tipo:

$$u_i(x,y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} c^i_{\alpha\beta}\, x^\alpha\, y^\beta, \quad i = 1,2 \tag{23}$$

com coeficientes dados do modo seguinte:

$$c^i_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{\alpha+\beta} u_i(x,y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}\,, \quad \text{para} \quad x = 0, y = 0, \tag{24}$$

com $i = 1,2$.

Para uma clara compreensão do método dos limites de Cauchy, calcula-se, a seguir, os coeficientes $c^i_{\alpha\beta}$ de (23) em função dos coeficienes b^{ij}_{rs} e a^i_ℓ dados por (20) e (22), respectivamente, supondo-se que (23) com coeficientes (24) seja solução de (18).

Cálculo dos coeficientes $c^i_{\alpha\beta}$

De fato,

$$c^i_{00} = u_i(0,) = \phi_i(0) = 0,$$

por hipótese

$$c^i_{10} = \frac{\partial u_i}{\partial x}(0,0) = G_{i1}\big(u_1(0,0), u_2(0,0)\big)\frac{\partial u_1}{\partial y}(0,0) + G_{12}\big(u_1(0,0), u_2(0,0)\big)\frac{\partial u_2}{\partial y}(0,0)$$

obtido da equação (18).

Tem-se, de (18), $u_i(0,y) = \phi_i(y)$, logo

$$\frac{\partial u_i}{\partial y}(0,y) = \phi_i'(y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_i}{\partial y}(0,0) = \phi_i'(0).$$

Resulta de (20), que $G_{ij}\big(u_1(0,0),u_2(0,0)\big)=G_{ij}(0,0)=b_{00}^{ij}$.

Daí, obtém-se:

$$c_{10}^i=b_{00}^{i1}\,\phi_i'(0)+b_{00}^{i2}\,\phi_2^i(0),\quad i=1,2.$$

Tem-se, igualmente,

$$c_{01}^i=\frac{\partial u_i}{\partial y}(0,0)=\phi_i'(0),\quad i=1,2$$

mas,

$$\phi_i'(0)\frac{d\phi^i(y)}{dy}\bigg|_{y=0}=a_1^i\,.$$

Em resumo, obteve-se:

$$\left|\begin{array}{l} c_{10}^i=b_{00}^{i1}\,a_1^i+b_{00}^{i2}\,a_2^i \\ \\ c_{01}^i=a_1^i \end{array}\right. \tag{25}$$

Calcula-se o segundo coeficiente de (23) dado por (24). De (18), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y\partial x}=\sum_{j=1}^{2}\left\{\left[\frac{\partial G_{ij}}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial G_{ij}}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+G_{ij}(u_1,u_2)\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\right\}.$$

Cálculo em $x=0$, $y=0$

De (20), obtém-se:

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial u_1}=b_{10}^{ij}\qquad\text{e}\qquad\frac{\partial G_{ij}}{\partial u_2}=b_{01}^{ij}\,,$$

quando as derivadas são calculadas em $x=0$, $y=0$, isto é, $u_1(0,0)=0$, $u_2(0,0)=0$. Da condição inicial $\dfrac{\partial u_i}{\partial y}(0,0)=\phi_i^1(0)=a_1^i$ e $G_{ij}\big(u_1(x,y),u_2(x,y)\big)=b_{00}^{ij}$ em $x=0$, $y=0$. Da condição inicial em (18), obtém-se: $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}(0,0)=\phi_i''(0)=\dfrac{1}{2}a_2^i$.

Daí, obtém-se o coeficiente c_{11}^i dado por:

$$c_{11}^i = \sum_{j=1}^{2} \left\{ \left[b_{10}^{ij}\, a_1^i + b_{01}^{ij}\, a_2^i \right] + \frac{1}{2} b_{00}^{ij}\, a_2^i \right\} \tag{26}$$

para $i = 1, 2$.

Por este processo, vão sendo obtidos os coeficientes $c_{\alpha\beta}^i$ da série (23), hipotética solução de (18). Examinando-se (25) e (26), deduz-se que estes coeficientes $c_{\alpha\beta}^i$ serão obtidos por meio de polinômios em b_{rs}^{ij} e a_ℓ^i, com coeficientes números inteiros não negativos. Relembre-se que b_{rs}^{ij} e a_ℓ^i são os coeficientes das representações de $G_{ij}(u_1, u_2)$ e $\phi_i(y)$ em séries de potências numa vizinhança da origem, (19), (20), (21), (22).

Considere-se a série (23) com os coeficientes (24) calculados por (25), (26), etc, por meio de polinômios em b_{rs}^{ij} e a_ℓ^i, com coeficientes inteiros não negativos. Suponha, por enquanto, que ela seja convergente em uma vizinhança $v(0,0)$ da origem do plano $\mathbb{R}^2$. Considere-se a função

$$\Phi_i(x,y) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(x,y) - \sum_{j=1}^{2} G_{ij}\big(u_1(x,y), u_2(x,y)\big) \frac{\partial u_j}{\partial y}(x,y) \qquad i = 1, 2,$$

definida na vizinhança de convergência $v(0,0)$. Por repetição do processo de cálculo dos coeficientes acima desenvolvido, conclui-se que $\Phi_i(x,y) = 0$ em $(0,0)$ com todas as suas derivadas. Resulta que $\Phi_i(x,y)$ é a função identicametne nula em $v(0,0)$, provando que se a série (23), com coeficientes (25), (26), etc, for convergente, sua soma será solução do problema de Cauchy (18). Portanto, resta provar a convergência de (23) com os coeficientes dados por (25), (26), etc.

Convergência da série (23)

Considere-se a série (23) com os coeficientes dados por (25), (26), etc, isto é, polinômios em b_{rs}^{ij}, a_ℓ^i, com coeficientes inteiros não negativos.

A demonstração é semelhante a que foi feita no caso de equações ordinárias. Tem-se, apenas, mais cálculo a fazer. Emprega-se o método dos limites devido a Cauchy. No presente caso, consiste em obter majorantes, conhecidas, para as $G_{ij}(u_1, u_2)$ e $\phi_i(y)$, $i, j = 1, 2$. Considere-se $H_{ij}(u_1, u_2)$ e $\psi_i(y)$, analíticas, tais que:

$$H_{ij}(u_1, u_2) = \sum_{r,s=0}^{\infty} B_{rs}^{ij}\, u_1^r\, u_2^s \tag{27}$$

convergente em $|u_i| < a$, sendo

$$|b_{rs}^{ij}| < B_{rs}^{ij}\,, \quad \text{para todos os índices} \tag{28}$$

e

$$\psi_i(y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} A_\ell^i\, y^\ell \tag{29}$$

convergente em $|y| < b$, sendo

$$|a_\ell^i| < A_\ell^i\,, \quad \text{para todos os índices.} \tag{30}$$

Portanto, conhecidas as majorantes $H_{ij}(u_1, u_2)$ e $\psi_i(y)$, considera-se o problema de Cauchy:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial V_i}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} H_{ij}(V_1, V_2) \dfrac{\partial V_j}{\partial y} \\ V_i(0, y) = \psi_i(y) \\ i = 1, 2 \end{array}\right. \tag{31}$$

Note-se que $H_{ij}(V_1, V_2)$ e $\psi_i(y)$ são funções analíticas conhecidas.

Pelo mesmo processo para construir a solução (23) com coeficientes (24), obtidos por (25), (26) e por meio de poliômios em b^{ij}_{rs} , a^i_ℓ com coeficientes inteiros não negativos, obtém-se a representação em série da solução $V_i(x, y)$ de (31). Deste modo, encontra-se

$$V_i(x,y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} C^i_{\alpha\beta}\, x^\alpha\, y^\beta\,, \tag{32}$$

sendo os coeficientes $C^{ij}_{\alpha\beta}$ obtidos, neste caso, por meio de polinômios em B^{ij}_{rs} e A^i_ℓ com coeficientes inteiros não negativos.

De (28) e (30) deduz-se que os $C^{ij}_{\alpha\beta}$ coeficientes de (32) majoram os $c^{ij}_{\alpha\beta}$ coeficientes de (23). De fato, tem-se $c^{ij}_{\alpha\beta} = P(b^{ij}_{rs}\,, a^i_\ell)$, polinômio com coeficientes inteiros não negativos e $C^{ij}_{\alpha\beta} = P(B^{ij}_{rs}\,, A^i_\ell)$ polinômios com coeficientes inteiros não negativos. Tem-se $|b^{ij}_{rs}| < B^{ij}_{rs}$ e $|a^i_\ell| < A^i_\ell$. Conseqüentemente vale a majoração:

$$|c^{ij}_{\alpha\beta}| \leq P\big(|b^{ij}_{rs}|, |a^i_\ell|\big) \leq P(B^{ij}_{rs}.A^i_\ell) = c^i_{\alpha\beta} j \tag{33}$$

provando que a série (32) majora a série (23) na vizinhança da origem $(0, 0)$ onde convergem. Sendo (32) convergente conclui-se que (23) é convergente, logo (18) possui uma solução analítica. $\square$

Assim, o sucesso do método repousa na escolha de um problema majorante (31) de simples resolução como procedeu-se no caso de equações ordinárias.

A etapa seguinte consiste da escolha e resolução do problema majorante (31). De fato, suponha que as séries

$$\phi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a^i\, y^i \quad \text{e} \quad G_{ij}(u_1, u_2) = \sum_{r,s=0}^{\infty} b^{ij}_{rs}\, u_1^r\, u_2^s$$

convirjam, respectivamente nas vizinhanças da origem:

$$|y| < \rho \qquad \text{e} \qquad |u_1| + |u_2| < R,$$

sendo $|G(u_1, u_2)| < M$ na segunda vizinhança. Então, obtém-se as majorações:

$$|a_\nu^i| < \frac{M}{\rho^\nu} \tag{34}$$

e

$$|b_{rs}^{ij}| < \frac{M}{R^{r+s}} \leq \frac{M}{R^{r+s}} \frac{(r+s)!}{r!s!} \, . \tag{35}$$

Definindo-se

$$A_\nu^i = \frac{M}{\rho^\nu} \quad \text{e} \quad B_{rs}^{ij} = \frac{M}{R^{r+s}} \frac{(r+s)!}{r!s!}$$

obtém-se:

$$\psi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^i \, y^\nu = M \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\rho}\right)^\nu \tag{36}$$

com $|y| < \rho$ e

$$H_{ij}(V_1, V_2) = \sum_{r,s=0}^{\infty} B_{rs}^{ij} \, V_1^r \, V_2^s \, ,$$

ou

$$H_{ij}(V_1, V_2) = M \sum_{r,s=0}^{\infty} \left(\frac{V_1}{R}\right)^r \left(\frac{V_2}{R}\right)^s \frac{(r+s)!}{r!s!} \tag{37}$$

com $|u_1| + |u_2| < R$.

Sendo

$$\frac{M}{1 - \frac{V_1 + V_2}{R}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r+s=0}^{k} \frac{(r+s)!}{r!s!} \left(\frac{V_1}{R}\right)^r \left(\frac{V_2}{R}\right)^s , \tag{38}$$

obtém-se de (37) e (38)

$$H_{ij}(V_1, V_2) = \frac{M}{1 - \frac{V_1+V_2}{R}}\,, \tag{39}$$

independente de $i, j = 1, 2$. Para $|V_1| + |V_2| < R$.

De (31) obtém-se

$$\psi_i(y) = \frac{My}{\rho - y}\,, \tag{40}$$

independente de $i = 1, 2$, para $|y| < \rho$.

De (39) e (40) o problema de Cauchy majorante toma a forma:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V_i}{\partial x} = \dfrac{M}{1 - \frac{V_1+V_2}{R}} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial V_j}{\partial y}(x, y), \\[2ex] V_i(0, y) = \dfrac{My}{\rho - y}\,, \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \tag{41}$$

Sendo $H_{ij}(u_1, u_2)$ e $\psi_i(y)$ independentes de i, j, natural seria procurar soluções de (41) da mesma natureza, isto é,

$$V_1(x, y) = V_2(x, y) = V(x, y).$$

Logo, o problema (41) simplifica-se na seguinte

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2M}{1 - \frac{2V}{R}} \dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex] V(0, y) = \dfrac{My}{\rho - y} \end{array} \right. \tag{42}$$

Observação 1: O sistema (42) é redutível a um sistema linear do tipo:

$$\left| \begin{array}{l} a(V) \dfrac{\partial V}{\partial x} + b(V) \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad b(V) \neq 0 \\[2ex] V(0, y) = \phi(y), \end{array} \right. \tag{43}$$

cuja solução é dada, explicitamente, por:

$$V(x,y) = \phi\left(y - \frac{a(V)}{b(V)}x\right) \tag{44}$$

cf. Courant-Hilbert [2].

O problema (42) toma a forma:

$$\left|\begin{array}{l} \left(1 - \dfrac{2}{R}V\right)\dfrac{\partial V}{\partial x} - 2M\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ V(0,y) = \phi(y) \end{array}\right. \tag{45}$$

com

$$\phi(y) = \frac{My}{\rho - y}, \quad |y| < \rho.$$

Segue-se da Observação 1 que a solução de (45) é dada por:

$$V(x,y) = \phi\left(y - \frac{a(V)}{b(V)}x\right),$$

com

$$a(V) = 1 - \frac{2}{R}V, \qquad b(V) = -2M.$$

Logo, a solução será:

$$V(x,y) = \phi\left(y + \frac{2M}{1 - \frac{2}{R}V}x\right).$$

Substituindo-se em $\phi(z) = \dfrac{Mz}{\rho - z}$, efetuando-se o cálculo algébrico, obtém-se a equação do segundo grau para o cálculo de V

$$\rho V\left(1 - \frac{2}{R}V\right) = (V + M)\left[\left(1 - \frac{2}{R}V\right)y + 2Mx\right]. \tag{46}$$

Análise simples permite concluir a existência de solução analítica de (45) a partir de (46).

De fato, observe-se que a solução V de (45) que se deseja obter deve ser nula em $x = 0$, $y = 0$, pois $V(0, y) = \dfrac{My}{\rho - y}\cdot$ Tomando-se $x = 0$, $y = 0$ em (46), ela reduz-se a

$$V(0,0)\left(1 - \frac{2}{R}V(0,0)\right) = 0, \qquad R > 0$$

obtendo-se

$$V_1(0,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad V_2(0,0) = \frac{R}{2}\cdot$$

Das duas soluções a que interessa ao problema (45) é a $V_1(x, y)$. Sendo $R > 0$, as duas soluções são diferentes em $(0, 0)$, logo o discriminante $\delta(x, y)$ da equação do segundo grau (46) é maior que zero em $(0, 0)$. Sendo $\delta(x, y)$ uma função contínua, existe uma vizinhança da origem $(0, 0)$ onde $\delta(x, y)$ é estritamente positivo. Logo, nesta vizinhança a raiz $V_1(x, y)$ da equação (46), obtida explicitamente, é uma função analítica. Assim, (45) possui uma solução analítica. $\square$

A unicidade de solução analítica do problema de Cauchy (18) faz-se de modo análogo ao que foi feito para o correspondente problema para equações diferenciais ordinárias. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] CAUCHY, Augustin Louis - Équations Différentielles Ordinaires, (Cours inedit Paris) Johnson Reprint Corporation, Paris 1981.

[2] COURANT, R. and HILBERT, D. - Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Interscience Publ. N.Y. 1962

[3] GOURSAT, E. - Cours d'Analyse Mathématique, Tome II, Gauthier-Villars, 1949.

[4] HADAMARD, J. - Problème de Cauchy et les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques, Hermann Edt., Paris, 1932.

[5] PICARD, E. - Leçons sur l'Équations aux Dérivées Partielles, Gauthier-Villars, Paris, 1950.

[6] PÉRSICO, E. - Introduzione alla Física Matemática, Zenichelli, Bologna, Italy, 1941.

[7] PETROVSKY, I.G. - Lectures on Partial Differential Equations, Interscience, N.Y., 1954.

[8] RIEMANN, B. - Oeuvres Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[9] SMIRNOV, M.M. - Second Order Partial Differential Equations, Nordhoff, Holanda, 1966.

[10] SOBOLEV, S. - Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Pergamon Press, N.Y., 1964.

[11] TRICOMI, F.G. - Equazioni a Derivate Parziali, Ed. Cremonese, Roma, 1957.