A INTEGRAL DE LEBESGUE

por

Luis Adauto Medeiros
Professor da UFRJ

Eliel Amancio de Mello
Professor da UFPb

SEXTA EDIÇÃO

Dedicado à Memória de Alvércio Moreira Gomes

(1916-2003)

Instituto de Matemática - UFRJ
Rio de Janeiro – RJ

2008

M488L

Medeiros, Luis Adauto da Justa, 1926 -
A Integral de Lebesgue/ Luis Adauto da Justa Medeiros, Eliel Amancio de Mello - 6. Ed. - Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2008.
174p.
Inclui índice e bibliografia.

1. Lebesgue, Integral de - Tese . I. Mello, Eliel Amancio de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

ISBN: 85-87674-11-0 CDD-20^a 515.43

SUMÁRIO

PREFÁCIO DA 4ª EDIÇÃO

O presente texto vem sendo adotado na disciplina "Integral de Lebesgue", ministrada no primeiro semestre da Pós-Graduação do Instituto de Matemática da UFRJ.

Com a re-integração do Professor Alvércio Moreira Gomes à Universidade em 1980, após o afastamento de suas atividades docentes em 1964, ele passou a colaborar, de modo substancial, na Pós-Graduação do IM. Ao ministrar esta disciplina, seguindo o presente texto, sugeriu várias modificações que contribuiram, fortemente, para seu aperfeiçoamento e clareza. Podemos citar, entre várias alterações, as seguintes:

i) Na definição da classe $L(a,b)$, funções integráveis, observou que S_1 é apenas um cone convexo, sendo $L(a,b)$ o espaço vetorial por ele gerado. Daí decorre que $L(a,b)$ é constituído pelas diferenças $v-u$ de objetos de S_1, como foi definido por F. Riesz. Esta maneira de definir $L(a,b)$ torna mais claro e compreensível o método adotado.

ii) Incluiu, no texto, o Teorema de Lebesgue caracterizando as funções integráveis à Riemann.

iii) Corrigiu a demonstração do teorema de Egoroff tornando-a mais compreensível e completa.

iv) Reescreveu, modificando, o Capítulo 5 sobre Derivação. Por meio do teorema de recobrimento de Vitali, deu outra demonstração ao teorema fundamental do Cálculo, tornando o capítulo transparente.

Com estas modificações profundas na edição anterior, apresenta-se esta quarta edição, materializando um sonho que alimentávamos, quando trabalhávamos no Departamento de Matemática da Faculdade

Nacional de Filosofia, da UB, em torno de 1960, de escrever um texto conjunto sobre a Integral de Lebesgue, seguindo o pensamento de F. Riesz, (cf. [14]), para facilitar a aprendizagem dos alunos. Aqui, está uma aproximação do mesmo.

Agradeço, portanto, ao Professor Alvércio Moreira Gomes, mestre e amigo, por suas sugestões e decisivas correções que contribuiram para tornar este livro mais inteligível.

Ao Dr. Nikolai A. Larkin, professor na UEM, meu muito obrigado por sugestões que contribuiram para tornar mais completo este livro.

Agradeço ao Ivo Fernandez Lopez, professor do IM-UFRJ, pela leitura de certos trechos do livro e pelas sugestões sobre o Complemento 3, exemplo de conjuntos não mensuráveis à Lebesgue.

À Lourdinha pela revisão cuidadosa do texto, pela organização do quadro de evolução da noção de integral e, em particular, pelo perdão permanente.

Uma versão $\mathbb{R}^n$ do método de F. Riesz para o estudo da Integração à Lebesgue encontra-se em J. Dixmier [5].

Ao Wilson Góes por mais um bonito trabalho de digitação.

Rio de Janeiro, 1º de maio de 1989

L.A. Medeiros

PREFÁCIO

É indiscutível a necessidade do estudo da teoria da integral na formação dos matemáticos com tendência para a Análise Matemática e suas aplicações. Por este motivo, surge o problema de como levar ao conhecimento dos estudantes, de modo simples e inteligível, as noções iniciais daquela teoria, as quais aparecem sob o título: **Integral de Lebesgue**. Na realidade, deseja-se, nesta etapa, fazer um estudo crítico e introdutório, seguindo Lebesgue, da noção de integral, previamente idealizada por Cauchy, Riemann, Darboux, assim como de suas aplicações ao estudo da convergência de sucessões de funções, bem como uma análise do teorema fundamental sobre primitivas. Entretanto, esta fase que chamaríamos preparatória à teoria da integral, sempre teve dificuldades pedagógicas, as quais se agravaram nos últimos anos em nossas universidades. Em face à necessidade, cada vez maior, da noção de integral segundo Lebesgue, para que o estudante possa prosseguir o estudo da Análise Matemática e suas aplicações, necessário foi procurar um método simples de tornar esta noção presente na formação dos matemáticos, com tendência para a Análise Matemática, o mais cedo possível. Várias foram as tentativas, sendo uma, razoavelmente simples, adotada no presente texto, idealizada por F. Riesz.

Tivemos a oportunidade de ensinar pelo método original de Lebesgue, segundo o qual faz-se a construção da medida, dos conjuntos mensuráveis e posteriormente define-se a integral. Para os estudantes, tal método parecia desvinculado de seus estudos anteriores e por isso mesmo trazia certa dúvida, não compreensão nem localização das novas idéias no contexto de sua formação. Experimentamos o método de Riesz aqui adotado, nos parecendo mais inteligível ao estudante, além de ir rapidamente às noções fundamentais e concluir, sem dificuldade, as relações entre a integral e as sucessões de funções. A partir de certo ponto os métodos de Lebesgue e Riesz se confundem e se equivalem.

A fim de que o leitor tenha uma idéia do método de Riesz é interessante compará-lo ao processo adotado por Cantor, para construir os números reais a partir de sucessões de números racionais. De modo um tanto vago, a construção de Riesz obedece à mesma linha de idéias, que descreveremos suscintamente. Considera-se o espaço vetorial das funções escada, no qual define-se, de maneira óbvia, uma noção de integral. Considera-se a classe das sucessões crescentes de funções escada cujas integrais são limitadas. Demonstra-se que tais sucessões convergem. Define-se uma nova coleção de funções limites de sucessões nas condições anteriores. Estende-se a noção de integral às funções limites. Amplia-se a nova coleção obtida, por inclusão da diferença de seus elementos, fazendo-se nova extensão da noção de integral. A classe assim obtida, é a das funções integráveis à Lebesgue e a integral obtida na nova coleção é a de Lebesgue. Nesta construção desempenha papel fundamental o teorema de Beppo-Levi. Ele afirma que se repetirmos o mesmo processo na classe obtida de funções integráveis à Lebesgue, não sairemos desta coleção.

Resta-nos localizar este texto em nosso Ensino Universitário. Diríamos que após um curso de Análise Matemática ao nível da referência [6], é compreensível um curso baseado no presente livro. É aconselhável que após a leitura deste texto os estudantes vejam algumas aplicações, como por exemplo: séries e transformações de Fourier, iniciação aos espaços de Hilbert com ênfase na topologia do espaço L^2, demonstração de certos teoremas de existência para equações diferenciais em hipóteses gerais de integrabilidade, etc.

Apesar do sumário que acompanha o presente livro, não será perda de tempo um breve resumo do seu conteúdo. Inicia-se com a noção de conjunto de medida nula, para, a seguir, definir-se a noção de convergência quase sempre de funções escada. Há duas proposições, denominadas Primeiro e Segundo Lema Fundamental, sobre as quais se baseia a definição de integral. Eles devem ser lidos cuidadosa-mente. Com base no Segundo Lema Fundamental, define-se a classe das funções integráveis à Lebesgue e a respectiva integral de Lebesgue. Compara-se a nova integral com a de Riemann, estudam-se as propriedades básicas dos conjuntos e funções mensuráveis, demonstrando-se a equivalência entre os métodos de Riesz e Lebesgue. Faz-se um estudo breve sobre os espaços L^p, finalizando-se com o estudo sobre a derivação e demonstração do teorema fundamental sobre primitivas.

Nossa gratidão aos colegas da UFRJ pelo estímulo permanente.

Ao Luiz Henrique Medeiros nossos agradecimentos pelas figuras contidas no texto.

Os Autores

INTRODUÇÃO

O método de calcular áreas e volumes de figuras geométricas complicadas, por meio de áreas e volumes de figuras mais simples, já era usado por Arquimedes (287-212 A.C.). Tal idéia foi o germe do que se convencionou chamar cálculo infinitesimal. Embora esta idéia seja tão antiga, sua formalização matemática, denominada teoria da integração, teve o seu apogeu no século passado. Podemos afirmar que o conceito de integral aparece, de fato, em forma embrionária, nos trabalhos de Arquimedes, ao utilizar o método de exaustão criado por Eudoxo (408-355 A.C.), no cálculo do comprimento de curvas, áreas e volumes de figuras geométricas.

Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), atualmente tidos como os inventores do Cálculo Diferencial, aperfeiçoaram o método de Arquimedes, lançando as bases do Cálculo Integral. Entretanto, Newton e Leibniz não possuiam com clareza a noção de limite, deixando duvidosos e obscuros vários pontos de seus trabalhos, com a introdução do conceito de infinitésimo.

Posteriormente, com os trabalhos de Cauchy (1789-1857) e Riemann (1826-1866) o conceito de integral foi estabelecido em bases rigorosas, tornando-se um instrumento poderoso, para a época, na resolução de inúmeros problemas.

Durante muito tempo foi desenvolvida uma teoria da integração baseada nas idéias de Riemann. Esta teoria, entretanto, contém certos inconvenientes que a tornam inadequada ao estudo de vários problemas da Análise Matemática. No Capítulo 1 deste texto traremos à luz alguns deles, no parágrafo dedicado à integral de Riemann. Evidentemente, com fortes hipóteses sobre as funções em jogo, alguns dos inconvenientes mencionados desaparecem. Todavia, cumpre-nos notar que, tanto do ponto de vista das aplicações como do ponto de vista estético, os resultados contidos em uma teoria matemática devem ser os mais gerais possíveis, em cada etapa do conhecimento, procurando-se evitar as hipóteses superfluas, muitas vezes motivadas por definições inadequadas de determinados conceitos. Deste modo, com a noção de integral de Riemann apresentando certas deficiências que a tornavam ineficaz para a resolução de um grande número de problemas, fazia-se necessária uma reformulação de tal noção, tendo-se em mente obter uma, sem as deficiências da anterior, mas contendo aquela como caso particular. Dito de outro modo, dever-se-ia obter um conceito de integral, tal que a nova classe de funções integráveis contivesse a classe das funções integráveis à Riemann (onde as duas integrais deveriam coincidir) e na qual os inconvenientes da integral de Riemann desaparecessem ou, pelo menos, fossem minimisados.

O passo decisivo no sentido de se obter uma definição de integral que eliminasse as deficiências existentes na integral de Riemann foi dado por Henri Lebesgue (1875-1941), quando em 1902 publicou sua famosa tese de doutoramento, intitulada: "Intégrale, longueur, aire", que atualmente está contida em seu famoso livro "Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives" (cf. [9]). O conceito de integral originalmente proposto por Lebesgue baseia-se na noção de medida de conjuntos. As idéias de Lebesgue se afastaram tanto dos cânones da época que foram, em princípio, refutadas e severamente criticadas ou, na melhor das hipóteses, aceitas com desconfiança. Todavia, a originalidade de suas idéias encontrou crescente reconhecimento, vindo a completar definitivamente certas lacunas inerentes à integral de Riemann.

A integral de Lebesgue foi a primeira tentativa frutífera de organização matemática da noção de integral e, neste sentido, costuma-se dizer que a teoria da integração foi criada no século vinte.

Com a evolução do pensamento matemático, a noção de medida e integral no sentido de Lebesgue foi se tornando cada vez mais imprescindível ao desenvolvimento e organização de novas teorias. Daí resultou o problema pedagógico de saber como introduzir, o mais cedo possível no ensino acadêmico, as idéias de Lebesgue. Várias foram as tentativas de obter outra definição da integral de Lebesgue. Entre elas estão algumas que surtiram efeito, tais como a de W.H. Young (1863-1942), baseada no método das sucessões monótonas; a de L. Tonelli (1885-1946), por meio das funções quase contínuas e, a que teve maior sucesso, não apenas do ponto de vista de generalizações como também do ponto de vista pedagógico, foi a idealizada por F. Riesz (1880-1956), a qual será usada neste texto. (Cf. [14]).

Dos métodos de definir a integral de Lebesgue o que penetrou no ensino foi o original, criado por Lebesgue, baseado na noção de medida de conjuntos. Tal procedimento foi sempre de difícil assimilação, por parte dos estudantes, porque parecia desvinculado do conhecimento anterior da noção de integral de Cauchy e Riemann. Acreditamos que o caminho originalmente seguido por Lebesgue, isto é, desenvolver a teoria da medida dos conjuntos para depois definir a integral, tornar-se-ia natural, na graduação, se fosse feita a relação entre a integral de Riemann e a medida de Jordan. Esclarecemos esta observação. Limitando-nos ao caso de funções reais de uma variável real, identifica-se a integral de Riemann de uma função limitada não negativa $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, com a medida de Jordan do conjunto dos pares (x,y) do $\mathbb{R}^2$ tais que $a \le x \le b$, $0 \le y \le u(x)$ (este conjunto é denominado conjunto ordenada de u). Assim, uma maneira de introduzir a integral de Lebesgue, relacionada imediatamente com a integral de Riemann, seria generalizar a medida de Jordan dos conjuntos do $\mathbb{R}^2$, obtendo-se a medida de Lebesgue de tais conjuntos e definir $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, como integrável à Lebesgue quando seu conjunto ordenada fosse mensurável à Lebesgue. A integral de Lebesgue de u seria, desta forma, a medida de Lebesgue de seu conjunto ordenada. Assim, facilmente obteríamos a relação entre as integrais de Riemann e de Lebesgue. Este procedimento, entretanto, não é aconselhável, pois neste caso teríamos de desenvolver uma teoria da medida de Jordan, com pouca utilidade no estágio atual da Análise Matemática. Aliás, não devemos também perder muito tempo ensinando propriedades particulares a integral de Riemann. Devemos, todavia, chamar a atenção dos estudantes para alguns de seus aspectos que servem de motivação para o estudo da integral de Lebesgue.

Da experiência que acumulamos no ensino da Matemática em nossas Universidades concluimos que, o método de Riesz, já mencionado, é de fácil assimilação por parte dos estudantes que, uma vez iniciados e motivados no estudo da integral de Lebesgue por este método, poderão, posteriormente, estudar outros métodos de acordo com os seus interesses e necessidades. O método de Riesz vem exposto também em [16] e [17]. O texto que aqui apresentamos é uma exposição deste método, baseada na bibliografia citada, organizada ao nosso gosto e escrita, principalmente, visando os estudantes que nunca tiveram contato algum com a noção de integral de Lebesgue.

1

Funções Escada

1.1 Conjuntos de medida nula

Como mencionamos na introdução deste texto, o método que iremos usar para definir a integral de Lebesgue é o método de Riesz. Neste método, apesar de não ser necessária a construção de uma teoria da medida para os conjuntos, necessitamos, todavia, do conceito de conjunto de medida nula o qual é bastante simples e de fácil compreensão. O único conhecimento prévio de que precisamos é a noção elementar de comprimento (ou amplitude) de um intervalo da reta que é definido como sendo o valor absoluto da diferença entre os extremos do intervalo, não importando se o mesmo é aberto ou fechado. Naturalmente, se o intervalo não é limitado diremos que tem amplitude infinita. A amplitude de um intervalo I será denotada por $\operatorname{amp}(I)$. Salvo menção explícita em contrário, todos os conjuntos a que nos referirmos são subconjuntos do conjunto dos números reais, aqui denotado por $\mathbb{R}$, também denominado reta real.

1.1 Definição. Diz-se que um conjunto E tem *medida nula* quando para todo $\varepsilon > 0$ existe uma família enumerável de intervalos abertos $\{I_k\{_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazendo às seguintes condições:

(i) $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, isto é, $\{I_k\}$ é um recobrimento de E.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_k) < \varepsilon$.

Decorre imediatamente desta definição que todo subconjunto de um conjunto de medida nula tem ele mesmo medida nula.

Neste texto entendemos como *enumerável* uma coleção que é finita ou equipotente ao conjunto N dos números naturais.

1.2 Exemplo. Seja $E = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ um subconjunto enumerável da reta real $\mathbb{R}$. Para cada $\varepsilon > 0$, consideremos os intervalos $I_n = \{x \in \mathbb{R};\, r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} < x < r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\}$ para $n = 1, 2, \ldots$. A família $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um recobrimento enumerável de E e a amplitude de cada I_n é dada por $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Logo, a soma das amplitudes dos I_n é menor que ε. Conclui-se que qualquer conjunto enumerável tem medida nula. Como conseqüência qualquer conjunto finito tem medida nula.

1.3 Exemplo. Consideremos um intervalo compacto $I = [a, b]$, $a \neq b$, e seja $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ um recobrimento enumerável de I por intervalos abertos. Do teorema de Borel-Lebesgue podemos extrair do recobrimento dado um sub-recobrimento finito $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$. É claro que

$$b - a \leq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{amp}(J_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_k). \tag{1.1}$$

Decorre de (1.1) que, se $0 < \varepsilon < b - a$, a soma das amplitudes dos intervalos de $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é maior ou igual a ε. Portanto I não tem medida nula.

1.4 Proposição. *A união de uma família enumerável de conjuntos de medida nula possui medida nula.*

Demonstração: Seja $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos de medida nula. Para cada $\varepsilon > 0$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um recobrimento enumerável de E_k por intervalos abertos $\{I_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_n^k) < \frac{\varepsilon}{2^k} \cdot \tag{1.2}$$

Assim, o conjunto $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ é recoberto pela família de intervalos $\{I_n^k\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ que ainda é enumerável e por (1.2) tem-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_n^k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

mostrando que E tem medida nula.

Quando uma propriedade é válida em um conjunto E exceto em um subconjunto de E com medida nula, diz-se que a propriedade vale quase sempre em E. Por exemplo, suponha que $u\colon (a,b) \to R$ seja uma função contínua exceto nos racionais de (a,b). Resulta do Exemplo 1.2 que u é contínua quase sempre em (a,b).

1.2 A integral de Riemann

Embora o propósito desta seção seja fazer uma revisão das propriedades da integral de Riemann, esta não será pré-requisito para a compreensão da integral de Lebesgue como será apresentada neste texto. Tal revisão, no entanto, será feita para facilitar a sua comparação com a integral de Lebesgue e também analisar com alguns detalhes as deficiências da integral de Riemann, conforme já nos referimos na introdução deste texto.

Seja (a,b) um intervalo aberto e limitado de $\mathbb{R}$ (salvo menção explícita em contrário todos os conjuntos considerados daqui até o fim do Capítulo 2 são subconjuntos de (a,b)). Toda coleção finita $\{x_0,\ldots,x_k\}$ de pontos de $\mathbb{R}$ tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ determina k subintervalos $I_1 = (x_0,x_1)$, $I_2 = (x_1,x_2),\ldots, I_k = (x_{k-1},x_k)$

de (a, b). Diz-se que a coleção $\{I_1, \ldots, I_k\}$ é uma *decomposição* de (a, b) pelos pontos $x_0, \ldots, x_k$ e que $x_0, \ldots, x_k$ são os *pontos de divisão* dessa decomposição.

Considere $u \colon I \to R$ uma função limitada e seja D uma decomposição do intervalo I pelos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, representemos por m_j e M_j, respectivamente, o ínfimo e o supremo de u em $I_j = (x_{j-1}, x_j)$. Consideremos as somas $s(u, D)$ e $S(u, D)$ denominadas, respectivamente, soma inferior e soma superior de u, relativas à decomposição D de I, definidas por

$$s(u, D) = \sum_{j=1}^{k} m_j \operatorname{amp}(I_j); \quad S(u, D) = \sum_{j=1}^{k} M_j \operatorname{amp}(I_j).$$

Demonstra-se que se D_1, D_2 forem decomposições quaisquer de I então $s(u, D_1) \leq S(u, D_2)$, isto é, qualquer soma inferior é um minorante do conjunto das somas superiores e qualquer soma superior é um majorante do conjunto das somas inferiores. Assim, o conjunto de todas as somas superiores (obtido fazendo-se variar todas as decomposições possíveis) tem um ínfimo que será representado por

$$\overline{\int_a^b} u(x)\, dx,$$

denominado *integral superior* segundo Riemann de u em (a, b). Analogamente, o conjunto de todas as somas inferiores possui um supremo que será denotado por

$$\underline{\int_a^b} u(x)\, dx,$$

denominado *integral inferior* segundo Riemann de u em (a, b). É claro que $\underline{\int_a^b} u(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} u(x)\, dx$. Quando valer a igualdade, diz-se que u é *integrável à Riemann* em (a, b) sendo o valor comum das integrais inferior e superior denominado integral de Riemann de u em (a, b) e representado por

$$\int_a^b u(x)\, dx.$$

É claro que, para u ser integrável à Riemann em (a, b) é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$, exista uma decomposição D de (a, b) satisfazendo a condição $S(u, D) - s(u, D) < \varepsilon$.

Na realidade Bernhard Riemann não introduziu em sua definição os conceitos de integral inferior e integral superior. Estes foram introduzidos por G. Darboux num artigo intitulado "Mémoire sur les fonctions discontinues", publicado em Ann. École Norm. Sup. (2) IV (1875) pp. 57-112, razão porque tais integrais são conhecidas como integrais superior e inferior de Darboux. Em sua definição, Riemann considera, para cada decomposção D, a soma $S = \sum_{j=1}^{k} \Delta_j\, u(x_{j-1} + \varepsilon_j \Delta_j)$ onde $\Delta_j = x_j - x_{j-1}$, $0 \leq \varepsilon_j \leq 1$; se S converge para um limite finito quando $\Delta = \max\{\Delta_j\}$ tende a zero, ele diz que u é integrável e o referido limite é a integral de u em (a, b). Demonstra-se que as definições de Riemann e de Darboux são equivalentes e as integrais de u obtidas segundo ambas as definições coincidem.

1.5 Exemplo. Seja $I = (0, 1)$ e u a função definida em I por

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é um racional de } I \\ 0 & \text{se } x \text{ é um irracional de } I. \end{cases}$$

Seja D uma decomposição de I pelos pontos $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1$. Como cada intervalo $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$, possui pontos racionais e pontos irracionais, resulta que $m_j = 0$ e $M_j = 1$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$. Logo,

$$\underline{\int_0^1} u(x)\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\int_0^1} u(x)\, dx = 1,$$

portanto u não é integrável segundo Riemann em (a, b).

1.6 Exemplo. Seja $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ limitada e crescente. Então u é integrável segundo Riemann em (a, b). (Aqui e em todo este texto uma função u diz-se crescente se para todo $x > y$ tem-se $u(x) \geq u(y)$; quando valer sempre a desigualdade estrita diremos que u é estritamente crescente. Considerações análogas são feitas no caso decrescente).

A idéia para provar a validade da afirmativa do Exemplo 1.6 é esboçada como segue. Fixado um $k \in \mathbb{N}$, considere a decomposição D de I obtida por meio dos pontos $x_j = a + j\,\frac{b-a}{k}$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Considere as somas $s(u, D)$ e $S(u, D)$. Simples é verificar que para cada $\varepsilon > 0$ a diferença $S(u, D) - s(u, D)$ é menor do que ε para k suficientemente grande o que implica a integrabilidade segundo Riemann da função u.

1.7 Exemplo. Toda função contínua e limitada é integrável segundo Riemann.

A afirmativa do exemplo anterior é na verdade, um caso particular do resultado a seguir.

1.8 Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função limitada, $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, seja integrável segundo Riemann em (a, b) é que u seja contínua quase sempre em (a, b).*

Demonstração: Para demonstrar esse resultado, recorde-se que: a) a oscilação, $\omega(J)$, de u no subintervalo J de (a, b) é a diferença entre o supremo e o ínfimo de u em J; b) a oscilação $\omega(x)$ de u no ponto $x \in (a, b)$ é o número $\inf\,\{\omega(J); J \subset (a, b),\ x \in J\}$; c) u é contínua no ponto x se e só se $\omega(x) = 0$; d) designando por E o conjunto das descontinuidades de u em (a, b) e pondo $E_m = \{x \in (a, b); \omega(x) \geq 1/m\}$ tem-se $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m\,.$

Isto posto, mostremos que a condição é necessária. Seja, para isto, u integrável à Riemann em (a, b). Pelo que se acaba de dizer, para demonstrar que u é contínua quase sempre em (a, b) é bastante demonstrar que E_m tem medida nula para todo $m \in \mathbb{N}$. Suponha-se então que, para algum $m \in \mathbb{N}$, E_m não tenha medida nula. Resulta, daí, que existe um $\delta > 0$ tal que a soma das amplitudes dos intervalos de qualquer recobrimento de E_m, por intervalos abertos, é maior que δ. Portanto, para toda decomposição D de (a, b), a soma das amplitudes dos intervalos de D, que contêm pontos de E_m, é maior ou igual a δ. Logo, $S(u, D) - s(u, D) \geq \frac{1}{m}\delta > 0$, donde u não é integrável à Riemann em (a, b), contra a hipótese. A condição é, pois, necessária. Reciprocamente, suponha-se que E tenha medida nula. Dado $\varepsilon > 0$ seja

$$N > \frac{2(b-a)}{\varepsilon} \cdot \tag{1.3}$$

De $E_N \subset E$ resulta que E_N tem medida nula, donde o conjunto $F_N = E_N \cup \{a, b\}$ tem medida nula e, portanto, existe um recobrimento enumerável (I_k) de F_N, por intervalos abertos, tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_k) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}, \tag{1.4}$$

onde M e m são, respectivamente, o supremo e o ínfimo de u em (a, b).

Para todo $x \in [a, b] - F_N$, seja I_x um subintervalo de (a, b) que contém x e tal que

$$\omega(I_x) < \frac{1}{N} \cdot$$

Então $\{I_k\} \cup \{I_x\}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [a, b] - F_N$ é um recobrimento de $[a, b]$ por intervalos abertos que, pelo Teorema de Heine-Borel, admite um subrecobrimento finita

$$I_{k_1}, \ldots, I_{k_r}, I_{x_1}, \ldots, I_{x_s} . \tag{1.6}$$

Seja D a decomposição de (a, b) cujos pontos de divisão são a, b e os extremos dos intervalos da família (1.6) contidos em (a, b). É imediato que cada intervalo de D está contido em algum intervalo da família (1.6) e que se $J_1, \dots, J_n$ são intervalos de D contidos em um intervalo I dessa família, então

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(J_i)\,\mathrm{amp}(J_i) \leq \omega(I)\,\mathrm{amp}(I).$$

Daí e de (1.3)-(1.5) vem:

$$\begin{aligned} S(u,D) - s(u,D) &\leq \sum_{j=1}^{r} \omega(I_{k_j})\,\mathrm{amp}(I_{k_j}) + \sum_{j=1}^{s} \omega(I_{x_j})\,\mathrm{amp}(I_{x_j}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} (M-m)\,\mathrm{amp}(I_{k_j}) + \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{N}\,\mathrm{amp}(I_{x_j}) < \varepsilon \end{aligned}$$

donde u é integrável à Riemann e a condição é, pois, suficiente. $\square$

1.9 Observação: Representaremos por $\mathcal{R}(a,b)$ a classe de todas as funções limitadas e integráveis segundo Riemann em (a,b). Em $\mathcal{R}(a,b)$ são válidas as seguintes propriedades, de fácil verificação:

(i) Se $u, v \in \mathcal{R}(a,b)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha u + \beta v \in \mathcal{R}(a,b)$ e tem-se

(ii) $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]dx = \alpha \int_a^b u(x)dx + \beta \int_a^b v(x)dx$.

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, uma aplicação $f\colon V \to \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ para todo par de vetores $u, v \in V$ e todo par de escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ diz-se *funcional linear* sobre V.

A propriedade (i) mencionada na Observação 1.9 nos diz que $\mathcal{R}(a,b)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (na realidade, um subespaço do espaço de todas as funções reais definidas em (a,b)). A propriedade (ii) nos diz que a aplicação que a cada $u \in \mathcal{R}(a,b)$ associa o número real dado por $\int_a^b u(x)\,dx$ é um funcional linear sobre $\mathcal{R}(a,b)$.

Outra propriedade bem conhecida das funções integráveis segundo Riemann é a seguinte: se $u \in \mathcal{R}(a,b)$ e $x \in (a,b)$ então u é integrável em (a, x) segundo Riemann. Isto é, a restrição de u a (a, x) pertence a $\mathcal{R}(a, x)$. Esta propriedade permite-nos construir, a partir de $u \in \mathcal{R}(a, b)$, uma nova função $w\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mediante a fórmula

$$w(x) = \int_a^x u(t)\, dt. \tag{1.7}$$

Diz-se que uma função $v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é *integral indefinida* de u se v é dada por $v(x) = w(x) + C$, onde C é uma constante real arbitrária e w é dada por (1.7). Portanto, se $u \in \mathcal{R}(a, b)$ as integrais indefinidas de u são obtida por

$$v(x) = \int_a^x u(t)\, dt + C. \tag{1.8}$$

Dos cursos elementares de Cálculo Infinitesimal, sabe-se que toda integral indefinida, v, de uma função u de $\mathcal{R}(a, b)$ é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável nos pontos de continuidade de u e nesses pontos tem-se $v' = u$. Logo, se u é uma função contínua em (a, b), toda integral indefinida v de u é uma primitiva de u, i.e., satisfaz a condição

$$v'(x) = u(x) \qquad \forall\, x \in (a, b). \tag{1.9}$$

Sabe-se, ainda, dos cursos elementares de Cálculo Infinitesimal que, reciprocamente, se v é uma primitiva de u, então v é uma integral indefinida de u e, mais precisamente, v é dada pela fórmula (1.8) com $c = v(a)$. Portanto, se u é contínua em (a, b), uma função $v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é primitiva de u se, e só se, v é uma integral indefinida de u. Este resultado é o bem conhecido Teorema Fundamental do Cálculo Infinitesimal. Ele dá, no espaço $C(a, b)$ das funções contínuas em $[a, b]$, uma relação harmoniosa e simples entre a derivação e a integração no sentido de Riemann.

Suponha-se, agora, que a função u de $\mathcal{R}(a, b)$ não seja necessariamente contínua. Então, pelo Teorema 1.8, u é contínua quase sempre em (a, b) e o que se pode afirmar é que as integrais indefinidas de u são deriváveis quase sempre em (a, b) e, mais precisamente, nos pontos de continuidade de u e nesses pontos tem-se $v' = u$. Portanto, no caso geral, as integrais indefinidas de u não são primitivas de u quando se entende por "primitiva de u" toda função v que satisfaz a condição (1.9). Vê-se, assim, que (1.9) é uma condição demasiadamente forte e que a definição, de primitiva de uma função, que se deve adotar é a que se segue.

1.10 Definição. Diz-se *primitiva* de uma função $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ toda função $v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável quase sempre em (a, b) e que satisfaz a condição $v'(x) = u(x)$ quase sempre em (a, b).

Com este conceito de primitiva pode-se dizer que as integrais indefinidas de u são primitivas de u. A recíproca, porém, não é verdadeira; o exemplo a seguir mostra que existem primitivas de $u \in \mathcal{R}(a, b)$ que não são integrais indefinidas de u.

1.11 Exemplo. Seja v a função definida por

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{se } 3 < x \leq 5. \end{cases}$$

De acordo com a Definição 1.13, v é uma primitiva da função u identicamente nula em (0,5), mas não é uma integral indefinida de u pois as integrais indefinidas de u são as funções constantes em $[0, 5]$.

O conjunto das integrais indefinidas de $u \in \mathcal{R}(a, b)$ está, pois, propriamente contido no de suas primitivas. Daí a pergunta: dentre as primitivas de u como caracterizar as que são integrais indefinidas? A dificuldade em responder essa pergunta é uma das deficiências da integral de Riemann. Voltaremos ao assunto no Capítulo 5.

Uma outra deficiência da integral de Riemann está na "passagem ao limite sob o sinal de integral", i.e., na possibilidade de concluir que, se (u_n) é uma sucessão de funções de $\mathcal{R}(a, b)$ convergente em (a, b) então

$\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathcal{R}(a,b)$ e

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n \,. \tag{1.10}$$

Como se sabe dos cursos elementares de Cálculo Infinitesimal, isto só é possível em casos muito particulares como, por exemplo, no caso em que (u_n) é uma sucessão de funções contínuas que converge uniformemente. O exemplo a seguir mostra o motivo dessa deficiência da integral de Riemann.

1.12 Exemplo. Seja $r_1, r_2, \ldots$ o conjunto dos racionais do intervalo (0,1) e $u_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{nos pontos } r_1, \ldots, r_n \\ 0 & \text{nos demais pontos de } (0,1). \end{cases}$$

Então (u_n) é uma sucessão crescente de funções de $\mathcal{R}(a,b)$, com $\int_0^1 u_n(x) = 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, que converge para a função u definida por

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{nos pontos racionais de } (0,1) \\ 0 & \text{nos demais pontos de } (0,1). \end{cases}$$

Neste caso não é possível passar ao limite sob o sinal de integral porque, pelo Exemplo 1.5, $u \notin \mathcal{R}(a,b)$ e assim, o primeiro membro de (1.10) não tem sentido.

Este exemplo mostra claramente a seguinte falha da integral de Riemann: o limite de uma sucessão crescente e convergente de funções de $\mathcal{R}(a,b)$, cuja sucessão dos integrais é limitada, nem sempre pertence a $\mathcal{R}(a,b)$. É uma falha muito grave que praticamente a torna imprestável no trato dos problemas que envolvem passagem ao limite sob o sinal de integral.

Nos dois primeiros capítulos deste curso será construída a integral de Lebesgue. Para ela os inconvenientes da integral de Riemann, apontados, deixam de existir.

1.3 Integração das funções escada

A noção de função escada é fundamental no método escolhido para o estudo da integral de Lebesgue neste texto. Após a definição das funções escada serão demonstrados, entre outros resultados, dois lemas fundamentais que serão o alicerce sobre o qual se baseia a definição de integral de Lebesgue proposta por F. Riesz.

Se D_1 e D_2 forem decomposições de um intervalo limitado (a, b), representa-se por $D_1 + D_2$ a decomposição cujos pontos de divisão são os de D_1 e os de D_2.

Diz-se que $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função escada, quando existe uma decomposição D do intervalo (a, b) tal que u é constante em cada subintervalo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, de D. A decomposição D diz-se *associada* à função escada u, sendo claro que D não é univocamente determinada para cada u. Em verdade podemos sempre refinar uma decomposição D, associada a u, acrescentando novos pontos de divisão aos subintervalos de D.

1.13 Exemplo. A função $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in (a, b)$ associa a sua parte inteira é uma função escada.

1.14 Exemplo. Seja $u\colon (-2, +2) \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{1+x^{2k}}\cdot$ Esta é uma função escada.

1.15 Exemplo. Suponha $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ contínua e D uma decomposição de (a, b). Sejam $m_k = \inf\{u(x);\, x \in I_k\}$ e $M_k = \sup\{u(x);\, x \in I_k\}$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, sendo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ os intervalos de D. As funções v e w definidas em (a, b) por $v(x) = m_k$ e $w(x) = M_k$ para $x \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, são funções escada em (a, b).

Note-se que alterando os valores de uma função escada u em um número finito de pontos de (a, b) e, em particular, nos pontos de divisão de uma decomposição associada a u tem-se, ainda, uma função escada.

1.16 Lema. *Sejam u e v duas funções escada definidas em (a, b). Então existe uma decomposição de (a, b) associada, simultaneamente, a u e v.*

Demonstração: Sejam D_1 e D_2 decomposições de (a, b) associadas a u e v, respectivamente. A decomposição $D_1 + D_2$ tanto pode ser obtida por acréscimo a D_1 dos pontos de D_2 como por acréscimo a D_2 dos pontos de D_1. Portanto pelo que se observou acima, $D_1 + D_2$ é associada tanto a u como a v. □

Com auxílio do Lema 1.16 vê-se imediatamente que a classe das funções escadas definidas em (a, b) é um espaço vetorial real. Para representá-lo será usada a notação $S_0(a, b)$ ou apenas S_0 quando não houver possibilidade de confusão.

Dadas duas funções reais u e w, definidas em $[a, b]$ define-se as funções $u \vee w$, $u \wedge w$ e $|u|$ do modo seguinte:

$$\begin{aligned} (u \vee w)(x) &= \max\{u(x), w(x)\} \\ (u \wedge w)(x) &= \min\{u(x), w(x)\} \\ |u|(x) &= |u(x)| \end{aligned}$$

(veja figuras 1.1 a 1.4).

Se u, w são funções escada, também o são as funções $u \vee w$ e $u \wedge w$, em virtude do Lema 1.16. Assim, $S_0(a, b)$ é um reticulado vetorial real.

Observe-se que de $u \in S_0(a, b)$ vem $|u| \in S_0(a, b)$ pois, como é óbvio, $|u| = u \vee (-u)$.

1.17 Proposição. *Sejam (u_k) e (w_k) duas sucessões de funções reais definidas em $[a, b]$, convergentes quase sempre em $[a, b]$ para as funções u e w, respectivamente. Então as sucessões $(u_k \wedge w_k)$ e $(u_k \vee w_k)$ convergem quase sempre em $[a, b]$ para $u \wedge w$ e $u \vee w$, respectivamente.*

Demonstração: Seja A o conjunto dos pontos x de $[a, b]$ onde as sucessões (u_k) e (w_k) não convergem. Logo A tem medida nula. Considere x em $[a,b] - A$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existem k_1 e $k_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$-\varepsilon + u(x) < u_k(x) < \varepsilon + u(x) \quad \text{para} \quad k > k_1. \tag{1.11}$$

$$-\varepsilon + w(x) < w_k(x) < \varepsilon + w(x) \quad \text{para} \quad k > k_2. \tag{1.12}$$

Tomando $k^* = \max\{k_1, k_2\}$ resulta que as desigualdades (1.11) e (1.12) são válidas para $k > k^*$. Portanto,

$$\begin{aligned} &\max\{-\varepsilon + u(x), -\varepsilon + w(x)\} < \max\{u_k(x), w_k(x)\} \\ &\qquad < \max\{\varepsilon + u(x), \varepsilon + w(x)\} \end{aligned}$$

para todo $k > k^*$, ou seja

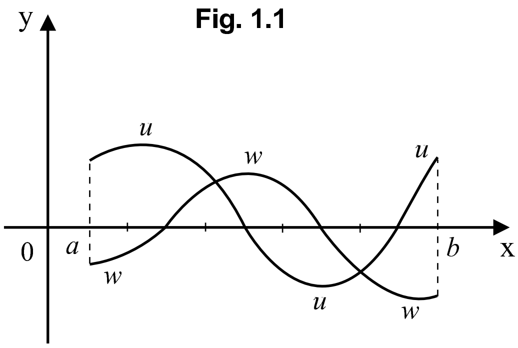
$$-\varepsilon + (u \vee w)(x) < (u_k \vee w_k(x) < \varepsilon + (u \vee w)(x), \ \ \forall\, k > k^*,$$

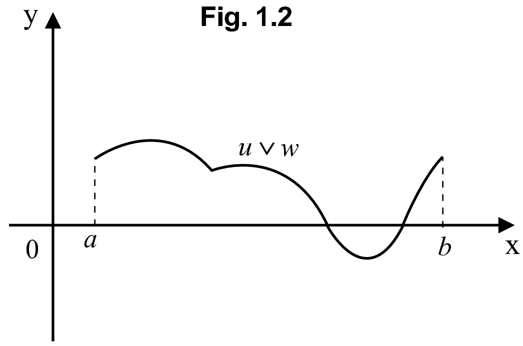
ou ainda,

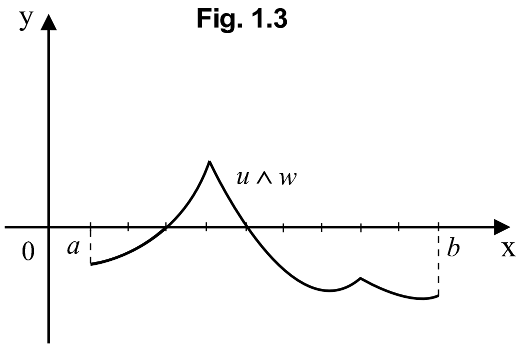
$$|(u_k \vee w_k)(x) - (u \vee w)(x)| < \varepsilon, \ \ \forall\, k > k^*.$$

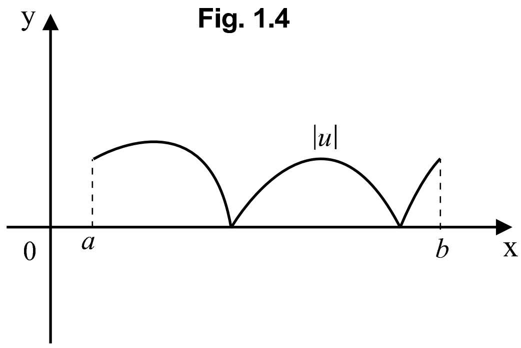
Logo $(u_k \vee w_k)$ converge para $(u \vee w)$ quase sempre em $[a,b]$.

De maneira análoga mostra-se que $(u_k \wedge w_k)$ converge para $u \wedge w$ quase sempre em $[a,b]$. $\square$









Definiremos a integral em S_0 como segue:

1.18 Definição. Seja $u \in S_0$ e D uma decomposição de (a, b) associada a u. Denotemos por C_k o valor constante assumido por u no intervalo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ de D, $k = 1, 2, \dots, n$. O número real

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(x_k - x_{k-1})$$

denomina-se *integral* da função u no intervalo (a, b), e é representado por $\int_a^b u(x)\,dx$, $\int_{(a,b)} u(x)\,dx$ ou simplesmente $\int u$. Isto é,

$$\int u = \int_a^b u(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} C_k(x_k - x_{k-1}).$$

Devemos provar, naturalmente, que a integral de uma função escada u obtida da Definição 1.18 não depende da decomposição D considerada.

1.19 Proposição. *Se $u \in S_0$ então a integral de u em (a,b) não depende da decomposição D de (a,b) associada a u.*

Demonstração: Sejam D_1 e D_2 duas decomposições (a,b) associadas à mesma função $u \in S_0$, obtidas, respectivamente, pelos pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$. Seja $D = D_1 + D_2$ e representemos por $x_{j-1} = z_0^j < z_1^j < \cdots < x_{k(j)}^j = x_j$ os pontos de divisão de D contidos no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$. Sendo $x_j - x_{j-1} = (z_{k(j)}^j - z_{k(j)-1}^j) + \cdots + (z_1^j - z_0^j)$ e u constante em (x_{j-1}, x_j) para $j = 1, 2, \ldots, n$, resulta que

$$C_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{p=1}^{k(j)} C_j(z_p^j - z_{p-1}^j) \tag{1.13}$$

onde C_j é o valor de u em (x_{j-1}, x_j). Se denotarmos, nesta demonstração, a integral de u obtida usando-se uma decomposição D por $(D)\int u$, obtemos de (1.13) que

$$(D_1)\int u = \sum_{j=1}^{n} C_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{k(j)} C_j(z_p^j - z_{p-1}^j) = (D)\int u.$$

Procedento de maneira análoga com os pontos de divisão da decomposição D_2 chegaremos à conclusão que $(D_2)\int u = (D)\int u$ e portanto $(D_1)\int u = (D_2)\int u$. $\square$

Observe que a integral de u não depende dos valores que u assume nos pontos de divisão de uma decomposição D associada a u; depende apenas dos valores assumidos por u nos intervalos I_k. Pode-se, pois, desconhecer os valores de u nos pontos de divisão de D ou atribuir-lhe valores arbitrários ou, mesmo, nem defini-la nesses pontos. E, como refinando uma decomposição associada a u por acréscimo de uma família finita de pontos de (a,b) tem-se ainda uma decomposição associada a u, o mesmo pode ser dito a respeito de qualquer família finita de pontos de (a,b).

1.20 Observação: Seja E um subconjunto de (a,b). A função $\mathcal{X}_E\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{X}_E(x) = 1$ se $x \in E$ e $\mathcal{X}_E(x) = 0$ nos demais pontos de (a,b), chama-se *função característica* de E. Se $E \subset (a,b)$ é uma união de n intervalos abertos I_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, dois a dois sem ponto interior em comum, simples é verificar que $\mathcal{X}_E \in S_0(a,b)$. Para cada $u \in S_0(a,b)$ define-se $\int_E u = \int_a^b u\mathcal{X}_E$ (ver Exercícios 1.1 e 1.2) e verifica-se que $\int_E u = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{I_k} u$, uma vez que $\mathcal{X}_E = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathcal{X}_{I_k}$ exceto, possivelmente, em uma família finita de pontos de (a,b). Em particular, se $u = \mathcal{X}_E$, $\int_E \mathcal{X}_E = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{amp}(I_k)$. Neste caso o número $\int_E \mathcal{X}_E$ chama-se *amplitude* de E e denota-se por $\operatorname{amp}(E)$.

1.21 Observação: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in S_0$ então $\int(\alpha u + \beta v) = \alpha \int u + \beta \int v$. Esta propriedade nos diz que a aplicação $u \to \int u$ que a cada $u \in S_0$ associa o número real $\int_a^b u$ é um funcional linear sobre o espaço vetorial S_0. Além disto se $u, v \in S_0$ e $u \leq v$ então $\int_a^b u \leq \int_a^b v$ o que significa que o funcional linear $u \to \int_a^b u$ é positivo sobre S_0.

1.22 Observação: Observemos que $u \leq v$ é entendido no sentido de que existem decomposições D_1, D_2 de (a,b), associadas às funções u e v, respectivamente, tais que $u(x) \leq v(x)$ para todo x de (a,b) distinto dos pontos de divisão de $D_1 + D_2$. Todavia, também convém notar que podemos admitir $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in (a,b)$ uma vez que se alterarmos os valores de uma função escada em um número finito de pontos a sua integral não se modifica.

Passaremos agora a demonstrar duas proposições, as mais significativas deste capítulo. Sobre ela está moldada a definição de integral de Lebesgue apresentada por F. Riesz. Dada a importância de ambas, no presente texto, resolvemos identificá-las como “Primeiro Lema Fundamental” e “Segundo Lema Fundamental” para facilitar futuras referências. Aconselhamos ao leitor memorizar estes resultados, pois, no decorrer deste texto, faremos uso freqüente dos mesmos.

1.23 Proposição. (*Primeiro Lema Fundamental*) – *Seja* (u_k) *uma sucessão decrescente de funções escada não negativas em* (a, b). *Se* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ *quase sempre em* (a, b) *então* $\lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b u_k = 0$.

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja E_k o conjunto dos pontos de descontinuidade da função u_k em $[a, b]$. Como $u_k \in S_0$ então E_k é finito e portanto $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ é enumerável.

Logo, E possui medida nula. Representemos por F o conjunto dos pontos de $[a, b]$ nos quais a sucessão (u_k) não converge para zero. Por hipótese F possui medida nula. Se $G = E \cup F$ então G possui medida nula. Resulta daí que para cada $\varepsilon > 0$, existe um recobrimento enumerável de G por intervalos abertos, cuja soma das amplitudes é menor que $\varepsilon/2M$, onde $M > \sup\{u_1(x);\, x \in (a, b)\}$. Denotemos por J_1 o citado recobrimento de G.

Se p é um ponto de $[a, b] - G$, resulta que $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(p) = 0$. Logo, existe um número natural m, dependendo de p e ε, tal que

$$u_m(p) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot$$

Como $p \notin G$, u_m é contínua em p e sendo u_m uma função escada, existe um intervalo aberto $I(p)$ contido em (a, b) e contendo p, tal que para todo x em $I(p)$ se tem

$$u_m(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \tag{1.14}$$

Sendo (u_k) decrescente, resulta que a desigualdade (1.14) é válida para todo $k \geq m$ e todo $x \in I(p)$, isto é,

$$u_k(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{1.15}$$

para todo $k \geq m$ e todo $x \in I(p)$. Quando p varia em $[a, b] - G$, obtém-se uma coleção de intervalos abertos $J_2 = \{I(p);\ p \text{ em } [a, b] - G\}$, nos quais vale a desigualdade (1.15).

A união $J_1 \cup J_2$ é portanto um recobrimento do intervalo compacto $[a, b]$ por intervalos abertos. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue existe uma subfamília finita de $J_1 \cup J_2$, que ainda é um recobrimento de $[a, b]$, a qual representaremos por $B = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r,\ I(p_1), I(p_2), \dots, I(p_s)\}$, onde os δ_i são os elementos de J_1 e os $I(p_j)$ são os elementos de J_2 que ocorrem em B.

Para cada intervalo $I(p_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$ de B, existe um $m_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_k(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{para todo } k > m_j \text{ e todo } x \in I(p_j),$$

pela própria definição dos $I(p_j)$. Seja $m^* = \max\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$. Obtém-se

$$u_k(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{para todo } x \in K = \bigcup_{j=1}^{s} I(p_j)$$

e para todo $k > m^*$. Mas K pode ser escrito como união de um número finito de sub-intervalos de $[a, b]$ dois a dois sem ponto interior em comum. Logo, pelo que vimos na Observação 1.20, tem-se que para todo $k > m^*$

$$\begin{aligned}\int_K u_k &= \int_a^b u_k \mathcal{X}_K \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\, \mathcal{X}_k = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b \mathcal{X}_K \\ &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_K \mathcal{X}_K = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ \mathrm{amp}(K) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Considerando agora a parte correspondente aos δ_i, seja $\delta = \bigcup_{i=1}^{r} \delta_i$ e seja $S = \delta \cap [a, b]$. É claro que S também pode ser escrito como uma união de um número finito de sub-intervalos de $[a, b]$ dois a dois sem ponto interior em comum. Portanto, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\begin{aligned}\int_S u_k &= \int_a^b u_k \mathcal{X}_S \leq \int_a^b u_1 \mathcal{X}_S \leq M \int_a^b \mathcal{X}_S \\ &= M \int_S \mathcal{X}_S = M \operatorname{amp}(S) < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{1.17}$$

uma vez que $\operatorname{amp}(S) < \frac{\varepsilon}{2M}$ · De (1.16) e (1.17) podemos concluir que para todo $k > m^*$

$$\begin{aligned}0 \leq \int_a^b u_k &= \int_a^b u_k \mathcal{X}_{(a,b)} \leq \int_a^b u_k(\mathcal{X}_S + \mathcal{X}_K) \\ &= \int_a^b u_k \mathcal{X}_S + \int_a^b u_k \mathcal{X}_K = \int_S u_k + \int_K u_k\,.\end{aligned}$$

□

1.24 Proposição. (*Segundo Lema Fundamental*). *Seja (u_k) uma sucessão de funções escada em (a, b), crescente e tal que a sucessão das integrais $\left(\int u_k\right)$ tenha um majorante finito, isto é, existe uma constante M tal que $\int u_k < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então a sucessão (u_k) converge para um limite finito u quase sempre em (a, b).*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que as u_k são funções não negativas, pois em caso contrário consideraríamos as funções $u_k - u_1$ em lugar de u_k.

Consideremos o conjunto $E_0 = \{x \in (a, b);\ \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x) = +\infty\}$. Demonstraremos que E_0 possui medida nula. Isto é o suficiente para demonstrar a proposição, porque nos pontos onde (u_k) não tende para o infinito ela é limitada e como é monótona, resulta que é convergente.

Por hipótese, existe $M > 0$ tal que $\int u_k < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada número natural k, considere o conjunto $E_{\varepsilon,k}$ definido do modo seguinte:

$$E_{\varepsilon,k} = \left\{x \in (a, b);\ u_k(x) > \frac{M}{\varepsilon}\right\}.$$

Quando k varia em $\mathbb{N}$ obtém-se uma sucessão de conjuntos $(E_{\varepsilon,k})_{k\in\mathbb{N}}$, crescente no sentido da inclusão, porque a sucessão (u_k) é crescente. Além disso, $E_0 \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{\varepsilon,k}$ como é simples verificar. Sendo as u_k funções escada, resulta que para cada k, o conjunto $E_{\varepsilon,k}$ se não for vazio, é a união de um número finito de intervalos disjuntos contidos em (a,b). Representemos por $m_{\varepsilon,k}$ a soma das amplitudes destes intervalos. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$M \geq \int_a^b u_k = \sum_{j=1}^{n(k)} C_j^k \big(x_j^k - x_{j-1}^k\big) \tag{1.18}$$

sendo C_j^k o valor de u_k no intervalo (x_{j-1}^k, x_j^k), de uma decomposição associada a u_k.

Decomponhamos a soma do segundo membro de (1.18) nas parcelas Σ' e Σ'', definidas do seguinte modo: Σ' é a soma dos termos em que $C_j^k > \frac{M}{\varepsilon}$ e Σ'' é a soma dos termos restantes. Destas considerações conclui-se que se $E_{\varepsilon,k}$ não for vazio, então

$$M \geq \Sigma' + \Sigma'' > \frac{M}{\varepsilon}\, m_{\varepsilon,k} + \Sigma'' > \frac{M}{\varepsilon}\, m_{\varepsilon,k}\,,$$

portanto $m_{\varepsilon,k} < \varepsilon$. Se $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{\varepsilon,k}$, então E_ε é uma união enumerável de intervalos cuja soma das amplitudes é inferior a ε (verifique!). Segue-se então que E_0 tem medida nula. $\square$

Vimos que no espaço vetorial S_0 a integral definida é um funcional linear. A próxima etapa é estender este funcional linear a um espaço vetorial contendo S_0, que será o espaço vetorial das funções integráveis à Lebesgue, procurado.

Antes de alcançarmos este objetivo, passaremos por uma etapa intermediária, construindo uma classe S_1 que contém S_0 mas não é ainda um espaço vetorial.

Representaremos por S_1 ou $S_1(a,b)$ a classe de todas as funções $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ que são limites quase sempre de sucessões de funções de S_0, satisfazendo as hipóteses do Segundo Lema Fundamental. Isto significa dizer que uma função $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ pertence a S_1 se e somente se existe uma sucessão crescente (u_k) de funções de S_0 tal que a sucessão das integrais $\left(\int u_k\right)$ tem um majorante e $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ quase sempre em (a,b). Diremos que uma tal sucessão define u. É claro que todo elemento de S_0 é elemento de S_1, porém, nem todo elemento de S_1 é elemento de S_0, conforme mostra o exemplo a seguir.

1.25 Exemplo. Seja u uma função nula em (a,b) exceto nos pontos de um conjunto E de medida nula. Então $u \in S_1$, pois a sucessão (u_k), onde u_k é, para cada k, a função identicamente nula, satisfaz às condições do Segundo Lema Fundamental e converge quase sempre para u. Em geral u não pertence a $S_0(a,b)$ como ocorre com a função característica do conjunto dos racionais do intervalo (a,b) como foi visto no Exemplo 1.5.

A etapa seguinte é a extensão da noção de integral definida em S_0, à nova classe S_1.

Seja $u \in S_1$ e (u_k) uma sucessão de funções de S_0, satisfazendo as hipóteses do Segundo Lema Fundamental, convergindo para u quase sempre em (a,b). Sendo a sucessão (u_k) crescente vem que $\left(\int u_k\right)$ é crescente e como esta última tem um majorante ela é convergente, isto é, existe e é finito o $\lim\limits_{k\to\infty} \int u_k$. Este limite será, por definição, a integral de u em (a,b), como elemento de S_1. Isto é

$$\int_a^b u(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx,$$

onde as integrais $\int_a^b u_k$ são aquelas definidas para funções de S_0.

Para provar que esta noção de integral em S_1 está bem definida devemos mostrar que $\int u$ não depende da sucessão (u_k) de S_0, satisfazendo ao Segundo Lema Fundamental, que define u. Outro fato que precisamos constatar é que esta integral de S_1, quando restrita aos elementos de S_0, coincide com a integral já existente em S_0.

Antes de prosseguirmos nesta direção, introduziremos aqui mais alguns conceitos gerais sobre funções. Dada uma função $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ podemos definir as funções u^+ e u^- chamadas, respectivamente, parte positiva e parte negativa de u, da seguinte maneira: $u^+ = u \vee \mathcal{O}$ e $u^- = (-u) \vee \mathcal{O}$, conforme notação já introduzida após a demonstração do Lema 1.16 (aqui, o símbolo $\mathcal{O}$ representa a função nula). Observemos ainda que tanto a parte positiva quanto a parte negativa de u são funções não negativas. É simples verificar que $u = u^+ - u^-$ e $|u| = u^+ + u^-$. Se u e w são funções reais quaisquer, definidas em (a,b), tem-se as seguintes identidades:

$$(u-w)^+ = (u \vee w) - w = u - (u \wedge w) \tag{1.19}$$

$$(u-w)^- = (u \vee w) - u = w - (u \wedge w) \tag{1.20}$$

(veja Exercício 1.5).

1.26 Proposição. *Sejam u, v funções de S_1 definidas, respectivamente, pelas sucessões (u_k) e (v_k) de funções de S_0, satisfazendo as hipóteses do Segundo Lema Fundamental. Então, se $u \leq v$ quase sempre em (a,b), tem-se*

$$\lim_{k\to\infty} \int u_k \leq \lim_{k\to\infty} \int v_k\,.$$

Demonstração: Fixemos uma função u_m de (u_k). Então a sucessão $(u_m - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ será decrescente e converge quase sempre para $u_m - v$. Além disto, tem-se que $u_m - v \leq u - v \leq 0$ quase sempre em (a,b), de acordo com a hipótese. Então, pela Proposição 1.17, $([u_m - v_k]^+)_{k\in\mathbb{N}}$ converge quase sempre em (a,b) para a função $[u_m - v]^+ \equiv 0$. Deste modo temos uma sucessão $([u_m - v_k]^+)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções de S_0 decrescente e convergente quase sempre para zero em (a,b). Pelo Primeiro Lema

Fundamental, resulta que a sucessão das integrais $\left(\int [u_m - v_k]^+\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para zero. Mas como para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$u_m - v_k \leq [u_m - v_k]^+,$$

e estas funções são de S_0, decorre daí que para todo k

$$\int (u_m - v_k) \leq \int [u_m - v_k]^+. \tag{1.21}$$

Tomando o limite em (1.21) quando $k \to \infty$, levando em conta que o segundo membro converge para zero, tem-se:

$$\int u_m - \lim_{k\to\infty} \int v_k = \lim_{k\to\infty} \int (u_m - v_k) \leq \lim_{k\to\infty} \int [u_m - v_k]^+ = 0$$

ou seja

$$\int u_m \leq \lim_{k\to\infty} \int v_k\,. \tag{1.22}$$

Sendo a desigualdade (1.22) válida para todo $m \in \mathbb{N}$, resulta daí que

$$\lim_{k\to\infty} \int u_k \leq \lim_{k\to\infty} \int v_k\,.$$

□

1.27 Corolário. *Se $u \in S_1$ é limite de (u_k) e (v_k) de S_0, nas hipóteses do Segundo Lema Fundamental, então $\lim\limits_{k\to\infty} \int u_k = \lim\limits_{k\to\infty} \int v_k$, ou seja, a integral em S_1 está bem definida.*

Demonstração: É suficiente considerar, na Proposição 1.26, $v \geq u$ e $v \leq u$. □

1.28 Corolário. *A restrição da integral definida em S_1 à classe S_0, coincide com a integral definida em S_0.*

Demonstração: A fim de facilitar a compreensão, representaremos nesta demonstração as integrais definidas em S_1 e S_0 por I_1 e I_0, respectivamente. Vamos provar que se $u \in S_0$ então $I_1(u) = I_0(u)$. De fato, sendo $u \in S_0$ podemos considerar a sucessão (u_k) onde $u_k = u$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então (u_k) define u como elemento de S_1, pois $u_k \in S_0$ e satisfaz as hipóteses do Segundo Lema Fundamental. Por definição temos

$$I_1(u) = \lim_{k\to\infty} I_0(u_k) = I_0(u).$$

□

Resumindo, fica demonstrado que a integral em S_1 é bem definida como extensão daquela definida em S_0. Além disto ela preserva a ordem.

1.29 Proposição. *Sejam u, v pertencentes a S_1 e λ um número real não negativo. Então λu e $u+v$ também pertencem a S_1. Além disto tem-se $\int \lambda u = \lambda \int u$ e $\int (u+v) = \int u + \int v$.*

Demonstração: Sejam (u_k) e (v_k) sucessões de funções de S_0, satisfazendo as hipóteses do Segundo Lema Fundamental, que definem as funções u e v, respectivamente. Como $\lambda \geq 0$, a sucessão (λu_k) está nas condições do Segundo Lema Fundamental e define a função λu. Portanto $\lambda u \in S_1$, obtendo-se

$$\int \lambda u = \lim_{k\to\infty} \int \lambda u_k = \lim_{k\to\infty} \big[\lambda \int u_k\big] = \lambda \int u,$$

porque $\int \lambda u_k = \lambda \int u_k$, uma vez que as u_k pertencem a S_0.

Da mesma forma a sucessão $(u_k + v_k)$ está nas condições do Segundo Lema Fundamental e define a função $u+v$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \int (u+v) &= \lim_{k\to\infty} \int (u_k + v_k) = \lim_{k\to\infty} \big[\int u_k + \int v_k\big] \\ &= \lim_{k\to\infty} \int u_k + \lim_{k\to\infty} \int v_k = \int u + \int v. \end{aligned}$$

□

1.30 Observação: A classe S_1 não é um espaço vetorial pois não é verdade que $u - v \in S_1 \ \ \forall\, u, v \in S_1$ (ver o Exercício 1.6). Todavia, se

$u \in S_1$ e $v \in S_0$, então $u - v \in S_1$. De fato, de $v \in S_0$ vem $-v \in S_0$, pois S_0 é um espaço vetorial, donde $-v \in S_1$ visto que $S_0 \subset S_1$; logo, $u - v \in S_1$ pela Proposição 1.29.

1.31 Observação: Diz-se que um subconjunto $\mathbb{C}$ de um espaço vetorial V é um cone se $\lambda u \in \mathbb{C}\ \forall u \in \mathbb{C}$ e $\forall \lambda \geq 0$. Diz-se que $\mathbb{C}$ é um *cone convexo* se $\mathbb{C}$ é um cone e $u + v \in \mathbb{C}\ \forall u, v \in \mathbb{C}$. Verifica-se imediatamente que um cone convexo é um conjunto convexo e reciprocamente, se um cone $\mathbb{C}$ é um conjunto convexo, então $\mathbb{C}$ é um cone convexo. Pela Proposição 1.29, S_1 é um cone convexo.

Seja W o subespaço de V gerado por um cone convexo C. Como é bem sabido, cada elemento de W é uma combinação linear de uma família finita de elementos de $\mathbb{C}$, i.e., se $w \in W$, então

$$w = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n\,, \quad w_i \in \mathbb{C}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Se, agora, u e v são, respectivamente, as somas dos termos para os quais $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i < 0$, tem-se $w = u - v$ com $u, v \in \mathbb{C}$. Reciprocamente, se $u, v \in \mathbb{C}$ e $w = u - v$, então $w \in W$. Logo, W é o conjunto dos elementos de V da forma $u - v$, onde $u, v \in \mathbb{C}$.

O espaço vetorial gerado pelo cone convexo S_1 será estudado no Capítulo 2.

1.32 Observação: Seja $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função de S_1. Para cada $t \in (a, b)$, a função $u\mathcal{X}_{(a,t)}$ é também uma função de S_1. Define-se $\int_a^t u = \int_a^b u\mathcal{X}_{(a,t)}$. Daí, simples é demonstrar que se $t \in (a, b)$ e $u \in S_1$ então

$$\int_a^b u = \int_a^t u + \int_t^b u.$$

Para tal é suficiente observar que $u = u\mathcal{X}_{(a,t)} + u\mathcal{X}_{(t,b)} + u\mathcal{X}_{\{t\}}$.

1.33 Proposição. *Se u e w são funções de S_1, então $u \vee w$ e $u \wedge w$ também pertencem a S_1.*

Demonstração: Sejam (u_k) e (w_k), sucessões de funções de S_0, satisfazendo as hipóteses do Segundo Lema Fundamental, definindo u e w, respectivamente. Consideremos a sucessão (φ_k) onde $\varphi_k = u_k \vee w_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.17, (φ_k) converge quase sempre para $u \vee w$. Como (φ_k) é uma sucessão de funções de S_0, crescente, resta-nos apenas provar que a sucessão das integrais $\left(\int \varphi_k\right)$ tem um majorante. Para isto, basta observar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(1.23)\quad \varphi_k = u_k \vee w_k \leq (u_k + u_1^-) \vee (w_k + w_1^-) \leq (u_k + u_1^-) + (w_k + w_1^-)$$

uma vez $u_k + u_1^- \geq 0$, $w_k + w_1^- \geq 0$ e o supremo de duas funções não negativas é menor ou igual à sua soma. Decorre de (1.23), levando em conta a Observação 1.22, que

$$\int \varphi_k \leq \int u_k + \int w_k + \int u_1^- + \int w_1^- \leq M,$$

onde M é constante. Portanto $u \vee w$ pertence a S_1.

Procedimento análogo, mostra-nos que, também, $u \wedge w$ pertence a S_1. Basta observar que para cada $k \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade

$$u_k \wedge w_k \leq u_k .$$

$\square$

1.4 Retorno à integral de Riemann

Examinaremos a integral de Riemann, na linguagem introduzida para as funções escada. Os resultados que aqui obteremos facilitarão o entendimento da comparação entre as integrais de Riemann e de Lebesgue, que faremos posteriormente.

Consideremos $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ limitada, e D uma decomposição de (a,b), por meio de pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ seja $m_j = \inf\{u(x);\, x \in I_j\}$ e $M_j = \sup\{u(x);\, x \in I_j\}$, onde $I_j = (x_{j-1}, x_j)$. Deste modo, fixada $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, limitada, a cada decomposição D de (a,b) ficam definidas em (a,b) as seguintes funções escada:

$$\begin{aligned}
&\ell_D(x) = m_j \qquad \text{para} \qquad x \in I_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\\
&L_D(x) = M_j \qquad \text{para} \qquad x \in I_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\\
&\ell_D(x_j) = L_D(x_j) = u(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.
\end{aligned}$$

Resulta que as somas inferior e superior, respectivamente, $s(u,D)$ e $S(u,D)$ podem ser representadas pelas integrais das funções escada ℓ_D e L_D , isto é

$$s(u,D) = \int_a^b \ell_D \quad \text{e} \quad S(u,D) = \int_a^b L_D\,.$$

Seja (D_i) uma sucessão crescente de decomposições de (a,b). Com isto estamos dizendo que para cada $i \in \mathbb{N}$, todo ponto de divisão de D_i é ponto de divisão de D_{i+1} . Denotaremos esta inclusão por $D_i < D_{i+1}$, para $i \in \mathbb{N}$. Representemos as funções ℓ_{D_i} e L_{D_i} simplesmente por ℓ_i e L_i , respectivamente, para $i \in \mathbb{N}$. Observemos que $D_i < D_{i+1}$ acarreta $\ell_i \leq \ell_{i+1}$ e $L_i \geq L_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, isto é, a sucessão (ℓ_i) é crescente e a sucessão (L_i) é decrescente. Sendo $\ell_i(x) \leq u(x) \leq L_i(x)$ em (a,b) para todo $i \in \mathbb{N}$, conclui-se que estas sucessões são convergentes em (a,b) e tem-se:

$$\ell(x) = \lim_{i\to\infty} \ell_i(x) \leq u(x) \leq \lim_{i\to\infty} L_i(x) = L(x). \tag{1.24}$$

Se $u \in \mathcal{R}(a,b)$, a sucessão (D_i) pode ser escolhida de modo que $\int_a^b (L_i - \ell_i)$ converge para zero.

1.33 Proposição. *Se u for integrável à Riemann em (a,b), então existe uma (D_i) tal que $\ell(x) = u(x) = L(x)$ quase sempre em (a,b).*

Antes de provarmos esta proposição demonstraremos um lema, que é o recíproco do Primeiro Lema Fundamental.

1.34 Lema. *Seja* (u_k) *uma sucessão decrescente de funções escada não negativas. Se* $\lim\limits_{k\to\infty} \int u_k = 0$, *então a sucessão* (u_k) *converge para zero, quase sempre em* (a, b).

Demonstração: Sendo a sucessão (u_k) decrescente e limitada inferiormente por zero, conclui-se que u_k converge, em (a, b), para uma função u não negativa. É suficiente provar que u é nula quase sempre em (a, b). Como é não negativa, o conjunto dos pontos onde ela é diferente de zero é a união enumerável dos conjuntos $E_j = \{x \in (a, b);\ u(x) \geq \frac{1}{j}\}$, $j \in \mathbb{N}$. Portanto, tudo que temos a fazer é provar que para cada $j \in \mathbb{N}$ o conjunto E_j tem medida nula. Sendo $u_k \geq u$, resulta que $u_k(x) \geq \frac{1}{j}$ para todo $x \in E_j$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Fixados k e j em N, os subintervalos disjuntos de (a, b) onde u_k é constante e nos quais $u_k(x) \geq \frac{1}{j}$ formam, evidentemente, um recobrimento finito dos pontos de E_j diferentes das discontinuidades de u_k as quais são em número finito, uma vez que u_k é uma função escada.

Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_s$ os intervalos de tal recobrimento e $S = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_s$. Então

$$\int_a^b u_k \geq \int_a^b u_k \mathcal{X}_S \geq \frac{1}{j} \int_a^b \mathcal{X}_S = \frac{1}{j}\, \mathrm{amp}(S).$$

Portanto $\mathrm{amp}(S) \leq j \int_a^b u_k$ onde $\mathrm{amp}(S) = \sum\limits_{n=1}^{s} \mathrm{amp}(I_n)$. Mas, como $\lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b u_k = 0$, segue-se que se $\varepsilon > 0$ é dado, e k suficientemente grande, então $\mathrm{amp}(S) < \varepsilon$. Portanto para cada $\varepsilon > 0$ existe um recobrimento de E_j cuja soma das amplitudes é menor que ε; logo E_j tem medida nula, para cada j, uma vez que j era arbitrário. □

Demonstração da Proposição 1.33: A função $L - \ell$ é limite da sucessão $(L_i - \ell_i)$, que é formada de funções escada não negativas, pois $L_i - \ell_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Além disso, verifica-se sem dificuldade que a sucessão $(L_i - \ell_i)$ é decrescente. Sendo u integrável à Riemann, a sucessão (D_i) pode ser escolhida de modo que a sucessão das integrais $\left(\int[L_i - \ell_i]\right)$ converge para zero. Portanto, pelo Lema 1.34, a sucessão $(L_i - \ell_i)$ converge para zero quase sempre em (a, b), concluindo-se que $\ell(x) = L(x)$ quase sempre em (a, b). Levando-se em conta a desigualdade (1.24), obtém-se que $\ell(x) = u(x) = L(x)$ quase sempre em (a, b). $\square$

1.35 Corolário. *Toda função $u \in \mathcal{R}(a, b)$ é uma função de S_1 e a integral de u em S_1 é a integral de u segundo Riemann.*

Demonstração: Basta observar que para uma conveniente (D_i), (ℓ_i) é uma sucessão de funções escada satisfazendo as hipoteses do Segundo Lema Fundamental, que converge quase sempre para u, e que a integral de u segundo Riemann é dada por $\int u = \lim\limits_{i\to\infty} \int \ell_i$; mas esta é a integral de u em S_1 . $\square$

1.36 Proposição. *Sejam $u \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, limitada, (v_i), (w_i) sucessões de funções escada em (a, b), a primeira crescente e a outra decrescente, ambas convergindo quase sempre para u e tais que para todo i, $v_i \le u \le w_i$ em (a, b). Então u é integrável à Riemann em (a, b) e $\int u = \lim\limits_{i\to\infty} \int v_i = \lim\limits_{i\to\infty} \int w_i$.*

Demonstração: Por hipótese, para todo $i \in \mathbb{N}$ se tem $v_i(x) \le u(x) \le w_i(x)$ para todo x em (a, b). Para cada i, seja D_i uma decomposição de (a, b) associada, simultaneamente, às funções v_i e w_i (ver Lema 1.16) e sejam (ℓ_i) e (L_i) as sucessões de funções escada, definidas a partir da sucessão de decomposição (D_i) como fizemos no início deste parágrafo. É claro que para todo i tem-se:

$$v_i(x) \le \ell_i(x) \le u(x) \le L_i(x) \le w_i(x) \tag{1.25}$$

para todo x em (a, b). Mas como $(w_i - v_i)$ converge para zero quase sempre em (a, b) e é decrescente segue-se do Primeiro Lema Fundamental que $\lim\limits_{i\to\infty} \int(w_i - v_i) = 0$ e por (1.25) conclui-se que $\lim\limits_{i\to\infty} \int(L_i - \ell_i) = 0$.

Assim, $S(u, D_i) - s(u, D_i) = \int (L_i - \ell_i)$ converge para zero e portanto u é integrável à Riemann. Além disso

$$\int u = \lim_{i\to\infty} \int v_i = \lim_{i\to\infty} \int \ell_i = \lim_{i\to\infty} \int L_i = \lim_{i\to\infty} \int w_i \,.$$

$\square$

Resumindo, ficou provado que uma função $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, limitada, é integrável à Riemann em (a, b) se e somente se existem sucessões de funções escada (v_i), (w_i), uma crescente e a outra decrescente, ambas convergentes para u quase sempre e tais que $v_i \le u \le w_i$ em (a, b) para todo i. A integral de u é o valor comum dos limites das sucessões das integrais de v_i e w_i .

1.37 Observação: Nem toda função de S_1 é uma função de $\mathcal{R}(a, b)$. Para ver isto basta considerar, outra vez, a função do Exemplo 1.5 e comparar com o Exemplo 1.25.

1.38 Observação: Se $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções, representemos por $-\mathcal{F}$ o conjunto das funções de $\mathcal{F}$ com sinal trocado. Então, do Corolário 1.35 tem-se $\mathcal{R}(a, b) \subset S_1$, e $\mathcal{R}(a, b) = -\mathcal{R}(a, b) \subset -S_1$. Logo, $\mathcal{R}(a, b) \subset S_1 \cap (-S_1)$. A inclusão é forte porque a função do Exemplo 1.5 pertence a S_1 e a $-S_1$.

Exercícios

1.1 Mostre que o produto de duas funções escada é uma função escada.

1.2 Demonstre que $\int_E u$, como definida na Observação 1.20, não depende da maneira como E é representado pela união de uma família finita de intervalos dois a dois sem ponto interior em comum.

1.3 Se u, v são funções escada tais que $u \geq v$ então $\int u \geq \int v$.

1.4 Use o Exercício 1.3 para provar que se $E \subset (a, b)$ como no Exercício 1.2, então $\int_E u \leq \int_a^b u$ qualquer que seja $u \in S_0$ não negativa.

1.5 Prove as identidades (1.19) e (1.20) do texto.

1.6 Seja $\{I_n\}$ uma família de intervalos em $(0,1)$ que cobre o conjunto dos racionais de $(0,1)$ e é tal que $\Sigma \operatorname{amp}(I_n) \leq \frac{1}{2}\cdot$ Seja $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ e $u = \mathcal{X}_{(0,1)} - \mathcal{X}_S$. Mostre que $u \notin S_1$, embora $\mathcal{X}_{(0,1)}$ e $\mathcal{X}_S$ pertençam a S_1.

Sugestão: Para cada $k \in \mathbb{N}$ considere $S_k = \bigcup\limits_{n=1}^{k} I_n$ e seja g_k a função característica de S_k. Então, (g_k) é uma sucessão crescente de funções escada que converge quase sempre para $\mathcal{X}_S$ e além disso $\int_0^1 \mathcal{X}_S \leq 1/2$. Assim, $\mathcal{X}_S$ pertence a S_1 e portanto se u pertencesse a S_1 teríamos $\int_0^1 u = 1 - \mathcal{X}_S \geq 1/2$. Por outro lado, para cada ponto racional $p \in (0,1)$ existe um intervalo aberto, da família $\{I_n\}$, contendo p e no qual u assume o valor zero. Desta forma, qualquer intervalo aberto J contém um intervalo aberto no qual u é zero. Resulta daí que se Ψ é uma função escada tal que $\Psi \leq u$ quase sempre então $\Psi \leq 0$ quase sempre. Use estas considerações para concluir que se u pertencesse a S_1 então teríamos $\int u \leq 0$, o que seria uma contradição.

1.7 (a) Mostre que a palavra "aberto" pode ser omitida na Definição 1.1.
(b) Mostre que a Definição 1.1 é equivalente à seguinte: "um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se existe um recobrimento enumerável de E por intervalos $\{J_k\}$ tais que cada ponto de E pertence a um número infinito de tais intervalos e a soma das amplitudes dos J_k é finita".

2

Integral à Lebesgue-Riesz

2.1 A Integral de Lebesgue

Será representado por $L(a,b)$ o subespaço do espaço das funções reais em (a,b) gerado pelo cone convexo $S_1(a,b)$. Pelo que foi visto na Observação 1.31, $w \in L(a,b)$ se, e só se, $w = u - v$, onde $u, v \in S_1(a,b)$.

2.1 Proposição. *$L(a,b)$ é um reticulado vetorial.*

Demonstração: Como $L(a,b)$ é um espaço vetorial é bastante demonstrar que $L(a,b)$ é fechado para $\vee$ e $\wedge$. Seja, para isto, $\omega = u - v$, $u, v \in S_1(a,b)$. Daí, por (1.19), vem $\omega^+ = (u-v)^+ = u \vee v - v \in L(a,b)$ uma vez que $u \vee v \in S_1(a,b)$. Logo, se $\omega_1, \omega_2 \in L(a,b)$, então $(\omega_1 - \omega_2)^+ \in L(a,b)$ e como, ainda por (1.19), $(\omega_1 - \omega_2)^+ = \omega_1 \vee \omega_2 - \omega_2$, resulta que $\omega_1 \vee \omega_2 = (\omega_1 - \omega_2)^+ + \omega_2 \in L(a,b)$. Analogamente vê-se que $\omega_1 \wedge \omega_2 \in L(a,b)$.

2.2 Corolário. *Se $\omega \in L(a,b)$, então ω^+ e ω^- também pertencem a $L(a,b)$; conseqüentemente, $|w| \in L(a,b)$.*

Demonstração: De fato, $w^+ = w \vee \mathcal{O} \in L(a,b)$ e $w^- = (-w) \vee \mathcal{O} \in L(a,b)$, pela Proposição 2.1 ($\mathcal{O}$ é a função identicamente nula em (a,b)). Além disto $|w| = w^+ + w^- \in L(a,b)$ pois $L(a,b)$ é um espaço vetorial.

Seja $w \in L(a,b)$ e escrevamos $w = u - v$ onde $u, v \in S_1$. Define-se a *integral* de w em $L(a,b)$ como sendo $\int w = \int u - \int v$, onde as integrais do segundo membro são definidas em S_1. Devemos demonstrar que a integral de w assim definida não depende da escolha da representação de w como diferença de funções de S_1. De fato, suponhamos que $w = u - v = u_1 - v_1$, sendo u, v, u_1, v_1 funções de S_1. Resulta daí que $u_1 + v = u + v_1$ e como $u_1 + v$, $u + v_1$ são funções de S_1, obtém-se que

$$\int u_1 + \int v = \int u + \int v_1\,,$$

e portanto

$$\int u_1 - \int v_1 = \int u - \int v = \int w,$$

provando assim que a integral de w está bem definida.

2.3 Proposição. *A aplicação $u \to \int u$, que a cada $u \in L(a,b)$ associa a integral de u é um funcional linear sobre o espaço vetorial $L(a,b)$.*

Demonstração: Sejam w, w_1 em $L(a,b)$. Então $w + w_1 \in L(a,b)$. Vamos mostrar que $\int (w + w_1) = \int w + \int w_1$. De fato, se $w = u - v$ e $w_1 = u_1 - v_1$ com $u, v, u_1, v_1 \in S_1$, tem-se por definição:

$$\int (w + w_1) = \int (u + u_1) - \int (v + v_1) = \int u + \int u_1 - \int v - \int v_1 =$$
$$= \Big(\int u - \int v\Big) + \Big(\int u_1 - \int v_1\Big) = \int w + \int w_1$$

provando que a integral em $L(a,b)$ é uma função aditiva. A seguir verificaremos que ela é homogênea. Seja $\lambda \in R$ e $w \in L(a,b)$ com $w = u - v$, $u, v \in S_1$. Se $\lambda \geq 0$ tem-se

$$\int \lambda w = \int (\lambda u - \lambda v) = \int \lambda u - \int \lambda v = \lambda\Big(\int u - \int v\Big) = \lambda \int w.$$

Observando que

$$\int(-w) = \int(v-u) = \int v - \int u = -(\int u - \int v) = -\int w$$

concluimos que se $\lambda < 0$ tem-se

$$\int \lambda w = \int(-|\lambda| w) = -\int |\lambda| w = -|\lambda| \int w = \lambda \int w.$$

□

2.4 Definição. $L(a, b)$ é dito *espaço vetorial* das *funções integráveis à Lebesgue.* A integral definida em $L(a, b)$ denomina-se *integral de Lebesgue.* Omitiremos a palavra Lebesgue e diremos apenas *integral* e *função integrável* (ou *somável*, como Lebesgue chamou originalmente) quando nos referirmos aos elementos de $L(a, b)$.

Observemos que a integral de Lebesgue, definida em $L(a, b)$ é uma extensão da integral definida em S_1 . Isto é, se $w \in S_1$ então a integral de w como elemento de S_1 coincide com a integral de Lebesgue de w. Basta considerar uma função v arbitrária em S_1 e escrever $w = (w + v) - v$. Então, por definição, a integral de Lebesgue de w é dada por

$$\int w = \int(w+v) - \int v = \int w + \int v - \int v = \int w,$$

onde as integrais consideradas do segundo membro em diante são aquelas definidas para os elementos de S_1 . Como $\mathcal{R}(a, b) \subset S_1$ e a integral de Riemann de uma função de $\mathcal{R}(a, b)$ coincide com a integral da mesma função como elemento de S_1 (ver Corolário 1.35), conclui-se que toda função integrável à Riemann em (a, b) é integrável à Lebesgue e as duas integrais coincidem. A recíproca, como era de se esperar, não é verdadeira (veja Observação 1.37).

2.5 Proposição. *Se* $w \in L(a, b)$ *e* $w \geq 0$ *quase sempre, então* $\int w \geq 0$.

Demonstração: Seja $w = u - v$, com $u, v \in S_1$. Sendo $w \geq 0$ quase sempre, obtém-se $u \geq v$ quase sempre e portanto $\int u \geq \int v$ (veja Proposição 1.26). Resulta daí que $\int w = \int u - \int v \geq 0$. $\square$

2.6 Corolário. *Se $w_1, w_2 \in L(a,b)$ e $w_1 \geq w_2$ quase sempre então $\int w_1 \geq \int w_2$.*

Demonstração: Considere a função $w = w_1 - w_2$ e aplique a Proposição 2.5. $\square$

2.7 Proposição. *Se w pertence a $L(a,b)$, então $|\int w| \leq \int |w|$.*

Demonstração: Do Corolário 2.2 tem-se que $|w| \in L(a,b)$. Como $\pm w \leq |w|$, conclui-se pelo Corolário 2.6 que $\pm \int w \leq \int |w|$ e portanto $|\int w| \leq \int |w|$. $\square$

2.8 Proposição. *Se $w \in L(a,b)$ então existe uma sucessão $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções escada em (a,b) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ quase sempre. Além disso tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \int |w_n - w| = 0$.*

Demonstração: Seja $w = u - v$ com $u, v \in S_1$. Por definição de S_1 existem sucessões (u_n) e (v_n) de funções escada satisfazendo as condições do Segundo Lema Fundamental, convergindo quase sempre para u e v, respectivamente. Considere a sucessão (w_n) onde para cada n, $w_n = u_n - v_n$. É claro que cada w_n é uma função escada e $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ quase sempre, ficando provada a primeira parte da proposição. Além disso tem-se:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int |w_n - w| &= \int |u_n - v_n - u + v| \leq \\ &\leq \int |u - u_n| + \int |v - v_n| = \\ &= \int (u - u_n) + \int (v - v_n), \end{aligned}$$

pois $u \geq u_n$ e $v \geq v_n$.

Tomando o limite quando n tende para infinito, levando em conta que $\lim\limits_{n\to\infty} \int (u - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \int (v - v_n) = 0$, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \int |w_n - w| = 0.$$

□

2.2 Sucessões de Funções

Neste parágrafo estudaremos alguns teoremas de convergência notadamente aqueles que dizem respeito à integração termo a termo. Iniciaremos com o teorema de Beppo Levi (1906). Lembremos que a partir de S_0 construimos a classe S_1 constituida das funções obtidas como limite quase sempre de sucessões de funções S_0, satisfazendo às hipóteses do Segundo Lema Fundamental. O teorema de Beppo Levi nos assegura que se aplicarmos o mesmo método de construção para sucessões de funções de $L(a,b)$ não obteremos uma nova classe de funções.

2.9 Lema. *Seja w uma função integrável. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existem funções $u, v \in S_1$ tais que $w = u - v$, $v \geq 0$ e $\int v\,dx < \varepsilon$. Além disso, se $w \geq 0$ então pode-se considerar $u \geq 0$.*

Demonstração: Sendo $w \in L(a,b)$, por definição, podemos escrever $w = u^* - v^*$ com $u^*, v^* \in S_1$. Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções de S_0, satisfazendo às hipóteses do Segundo Lema Fundamental, convergindo quase sempre para v^*. Então, para todo n, tem-se

$$w = u^* - v^* = (u^* - v_n) - (v^* - v_n) = U_n - V_n \tag{2.1}$$

onde $U_n = u^* - v_n$ e $V_n = v^* - v_n$. Como $v_n \leq v^*$ para todo n, vem que $V_n \geq 0$ para todo n. Mais ainda, pela definição da integral em S_1 tem-se $\int v^* = \lim \int v_n$, donde $\lim \int V_n = \lim \int (v^* - v_n) = 0$ e, portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int V_{n_0}\,dx <$

ε. Considerando $n = n_0$ em (2.1) tem-se que $w = U_{n_0} - V_{n_0}$ e as funções $u = U_{n_0}$ e $v = V_{n_0}$ satisfazem às condições do lema, pela Observação 1.30. Além disso se $w \geq 0$ temos de (2.1) que, para todo n, $U_n = w + V_n \geq 0$. Em particular, $u = U_{n_0} \geq 0$. □

2.10 Lema. *Seja (u_n) uma sucessão crescente de funções de S_1 cuja sucessão das integrais $\left(\int u_n\right)$ tem um majorante. Então (u_n) converge quase sempre para uma função $u \in S_1$ e tem-se ainda que $\int u = \lim\limits_{n\to\infty} \int u_n$.*

Demonstração: De fato, consideremos uma sucessão crescente (u_n) de elementos de S_1 tal que existe uma constante M satisfazendo a desigualdade $\int u_n < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como as funções u_n pertencem a S_1, para cada n existe uma sucessão $(u_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ de funções de S_0, nas condições do Segundo Lema Fundamental, convergindo quase sempre para u_n. Isto é,

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
u_{11} & \leq & u_{12} & \leq & \dots & \leq & u_{1n} & \leq & \dots & \text{e} & u_{1n} & \to & u_1 \\
u_{21} & \leq & u_{22} & \leq & \dots & \leq & u_{2n} & \leq & \dots & \text{e} & u_{2n} & \to & u_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
u_{s1} & \leq & u_{s2} & \leq & \dots & \leq & u_{sn} & \leq & \dots & \text{e} & u_{sn} & \to & u_s \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Pondo $v_n(x) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{u_{in}(x)\} = \max\{u_{1n}(x), u_{2n}(x), \dots, u_{nn}(x)\}$ para todo $x \in (a, b)$ tem-se, para cada n, uma função escada v_n e a sucessão (v_n) é crescente. Além disto, $u_{in} \leq u_i \leq u_n$ para $1 \leq i \leq n$. Logo, tomando o máximo para $1 \leq i \leq n$, obtém-se $v_n \leq u_n$ e portanto $\int v_n \leq \int u_n \leq M$ para todo n. Logo, a sucessão das integrais das funções v_n é limitada. Pelo Segundo Lema Fundamental conclui-se que (v_n) converge quase sempre para uma função u que está em S_1, por definição. Mostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ quase sempre. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se $v_k = \max\limits_{1\leq n\leq k}\{u_{nk}\} \geq u_{nk}$, qualquer que seja $1 \leq n \leq k$. Logo, tomando o limite quando $k \to \infty$ resulta que $u \geq u_n$ para todo

n. Mas $v_n \leq u_n$ para todo n; logo $v_n \leq u_n \leq u$ para todo n. Sendo $\lim_{n\to\infty} v_n = u$ quase sempre, conclui-se que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ quase sempre. Da desigualdade $v_n \leq u_n \leq u$ conclui-se ainda que $\int v_n \leq \int u_n \leq \int u$ para todo n. Mas sendo, por definição, $\int u = \lim_{n\to\infty} \int v_n$ conclui-se que $\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n$. $\square$

2.11 Corolário. *Consideremos uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *com* $u_n \in S_1$, $u_n \geq 0$ *para todo* n. *Se a sucessão* $\left(\int \left[\sum_{n=1}^{k} u_n\right]\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *for limitada, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge quase sempre para uma função* u *de* S_1 *e* $\int u = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n$.

Demonstração: Para cada n, seja $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Segue-se que a sucessão (U_n) satisfaz às hipóteses do Lema 2.10. Logo existe uma função $u \in S_1$ tal que $\lim_{n\to\infty} U_n = u$ quase sempre e tem-se que

$$\int u = \lim_{n\to\infty} \int U_n = \lim_{n\to\infty} \int \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n . \qquad \square$$

Teorema (Beppo Levi). *Seja* (u_n) *uma sucessão crescente de funções de* $L(a,b)$ *cuja sucessão das integrais* $(\int u_n)$ *é limitada superiormente. Então* (u_n) *converge quase sempre para uma função* $u \in L(a,b)$ *e tem-se que* $\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n$.

Demonstração: Seja (u_n) uma sucessão crescente de funções integráveis e suponhamos que existe uma constante A tal que $\int u_n < A$ para todo n. Consideremos a série $u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ onde para cada n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. A demonstração reduz-se a provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge quase sempre para uma função integrável v e que

$\int v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int v_n$, pois, se este é o caso a sucessão (u_n) convergirá quase sempre para a função integrável $u = u_1 + v$ e $\int u = \int u_1 + \int v = \int u_1 + \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int v_k = \lim\limits_{n\to\infty} \int u_n$.

Para cada n, temos que $\int u_n = \int u_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int v_k$ e portanto

$$\int \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \int u_n - \int u_1 < A - \int u_1 = B. \tag{2.2}$$

Sendo v_n integrável pode-se escrever: $v_n = U_n - V_n$ com U_n, V_n em S_1 . Pelo Lema 2.9 pode-se admitir que U_n, V_n são não negativas e

$$\int V_n < \frac{1}{2^n} \cdot \tag{2.3}$$

Para concluir a demonstração vamos provar que as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ estão nas condições do Corolário 2.11. De fato, tem-se $U_n \geq 0$ e $V_n \geq 0 \quad \forall\, n$. Por (2.3) a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int V_n$ é convergente e portanto a sucessão $(\int \sum\limits_{k=1}^{n} V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Como, por (2.2), a sucessão $(\int \sum\limits_{k=1}^{n} v_k)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e, para todo n, vale a igualdade $\int \sum\limits_{k=1}^{n} U_k = \int \sum\limits_{k=1}^{n} v_k + \int \sum\limits_{k=1}^{n} V_k$, conclui-se que a sucessão $(\int \sum\limits_{k=1}^{n} U_k)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Assim, as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ satisfazem as condições do Corolário 2.11. Logo convergem quase sempre para funções U e V, respectivamente, onde U, V estão em S_1 . Então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$

converge quase sempre para $v = U - V$ que é uma função integrável. Além disso tem-se que $\int v = \int U - \int V = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int U_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int V_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int (U_n - V_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int v_n$. □

O Teorema 2.12 é a *forma crescente* do Teorema de Beppo Levi. Nele a sucessão (u_n) é suposta crescente e a sucessão $(\int u_n)$ majorada por uma constante. A *forma decrescente*, conseqüência imediata da forma crescente, é a seguinte:

2.13 Teorema (Beppo Levi). *Se (u_n) é uma sucessão decrescente de funções de $L(a,b)$ cuja sucessão das integais $(\int u_n)$ é limitada inferiormente, então (u_n) converge quase sempre para uma função u de $L(a,b)$ e $\int u = \lim\limits_{n\to\infty} \int u_n$.*

Portanto, as conclusões do Teorema de Beppo Levi são válidas para as sucessões monótonas cuja sucessão das integrais é limitada. Por motivo agora óbvio, o Teorema de Beppo Levi é também conhecido por *Teorema da Convergência Monótona*.

Uma conseqüência imediata da forma crescente do Teorema de Beppo Levi é o resultado a seguir.

2.14 Proposição. *Seja $u \in L(a,b)$ tal que $u \geq 0$ e $\int_a^b u = 0$. Então $u = 0$ quase sempre em (a,b).*

Demonstração: Para cada n, seja $v_n = nu$. Então v_n é integrável, (v_n) é uma sucessão crescente e $\int v_n = n \int u = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Pela forma crescente do Teorema de Beppo Levi, (v_n) converge quase sempre; mas (v_n) só não converge nos pontos onde u é diferente de zero. Logo, $u = 0$ quase sempre em (a,b). □

2.15 Observação: Recorde-se que o ínfimo e o supremo de uma sucessão (u_n) de funções reais definidas em (a,b) são as funções $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$

e $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ definidas em cada ponto x de (a,b) pelos limites

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \min_{1\le i\le n}\{u_i(x)\} \quad \text{e} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n}\{u_i(x)\},$$

respectivamente. Assim, de acordo com a notação estabelecida anteriormente,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to\infty} u_1\wedge\cdots\wedge u_n \quad \text{e} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to\infty} u_1\vee\cdots\vee u_n\,.$$

Recorde-se, também, que o limite superior e o limite inferior de (u_n) são as funções $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n$ e $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$ definidas, respectivamente, por

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\ge n} u_k \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} u_k\,.$$

Como a sucessão $(\sup\limits_{k\ge n} u_k)$ é decrescente e a sucessão $(\inf\limits_{k\ge n} u_k)$ é crescente, pode-se escrever, também,

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} u_k \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} u_k\,.$$

Recorde-se, ainda, que $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} u_n$ e que se (u_n) tem um limite $u(x)$ num ponto x de (a,b), então

$$\liminf_{n\to\infty} u_n(x) = \limsup_{n\to\infty} u_n(x) = u(x).$$

2.16 Observação: Seja $u_0 \in L(a,b)$ e $L_s(u_0)$ o conjunto $\{u \in L(a,b); u \le u_0\}$. Então tem-se $\int u \le \int u_0$ para toda $u \in L_s(u_0)$. Decorre daí que se (u_n) é uma sucessão de funções de $L_s(u_0)$, a sucessão das integrais $(\int u_n)$ é limitada superiormente. Se, além disso, (u_n) é crescente, então, pela forma crescente do Teorema de Beppo Levi, (u_n) converge em (a,b) para uma função u de $L(a,b)$ e como $u_n \in L_s(u_0)$, $n = 1,\ldots,$ tem-se que $u \in L_s(u_0)$. Conclui-se daí que

$L_s(u_0)$ é fechado por passagem ao limite das sucessões crescentes. Analogamente, o conjunto $L_i(u_0) = \{u \in L(a,b); u \geq u_0\}$ é fechado por passagem ao limite das sucessões decrescentes e, se $u_0 \geq 0$, o conjunto $L(u_0) = \{u \in L(a,b); -u_0 \leq u \leq u_0\}$ é fechado por passagem ao limite das sucessões monótonas.

Uma conseqüência desse resultado é que, para toda sucessão (u_n) de funções de $L_s(u_0)$, a função $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ pertence a $L_s(u_0)$, uma vez que $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é o limite da sucessão crescente $(u_1 \vee \cdots \vee u_n)$. Analogamente, $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \in L_i(u_0)$ para toda sucessão (u_n) de funções de $L_i(u_0)$. Conseqüentemente, $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ e $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ pertencem a $L(u_0)$ para toda sucessão (u_n) de funções de $L(u_0)$ e, desse modo, $\limsup_{n\to\infty} u_n$ e $\liminf_{n\to\infty} u_n$ pertencem a $L(u_0)$, visto que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ é o limite da sucessão decrescente $(\sup_{k\geq n} u_k)$ e $\liminf_{n\to\infty} u_n$ é o limite da sucessão crescente $(\inf_{k\geq n} u_k)$ de funções de $L(u_0)$.

Com base nestas considerações preliminares demonstraremos o seguinte teorema de Lebesgue, também conhecido por Teorema da Convergência Dominada.

2.17 Teorema (Lebesgue). *Seja (u_n) uma sucessão de funções integráveis em (a,b), convergente quase sempre para a função u. Se existir uma função integrável u_0 tal que $|u_n| \leq u_0$ quase sempre para todo $n \in \mathbb{N}$, então u é integrável e tem-se*

$$\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n \, .$$

Demonstração: Pode-se supor que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq u_0$ em todo ponto de (a,b). Com efeito, é bastante, se necessário, redefinir convenientemente as funções u_n em conjuntos de medida nula; as funções obtidas serão ainda integráveis, suas integrais coincidirão com as das u_n e a sucessão delas ainda será convergente quase sempre para u. Com essa hipótese e pelo que foi dito na Observação 2.16, $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$ pertence a $L(u_0)$ e, portanto, é integrável. Mas, por hipótese, (u_n) converge quase sempre para u; logo, $u = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n$ quase sempre, donde u é integrável e $u = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ quase sempre, onde $v_n = \inf\limits_{k\geq n} u_k$. Temos $v_n \leq u_m \leq u_0$, $m \geq n$, donde $\int v_n \leq \int u_m \leq \int u_0$, $m \geq n$. De $\int v_n \leq \int u_0$ resulta, pela forma crescente do Teorema de Beppo Levi, que $\int u = \lim\limits_{n\to\infty} \int v_n$ e de $\int v_n \leq \int u_m$, $m \geq n$, resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} \int v_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \int u_m$. Portanto,

$$\int u \leq \liminf_{n\to\infty} \int u_n .$$

De maneira análoga vê-se que

$$\int u \geq \limsup_{n\to\infty} \int u_n .$$

Logo, $\int u = \lim\limits_{n\to\infty} \int u_n$. $\square$

2.18 Exemplo: Considere a função v definida em $(0,1)$ por $v(x) = \frac{1}{x}\cdot$ Usando o teorema de Lebesgue podemos afirmar que a função v não é integrável. Para ver isto, considere, para cada n a seguinte função definida em $(0,1)$:

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \geq \frac{1}{n} \\ n, & \text{se} \quad 0 < x < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

Então, as funções u_n são integráveis e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Além disso, $|u_n| \leq v$ para todo n. Se v fosse integrável deveríamos ter, pelo Teorema de Lebesgue, que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 u_n = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Mas isto não é verdade uma vez que para todo n tem-se $\int_0^1 u_n = 1$. Logo v não é integrável em $(0,1)$.

2.19 Teorema (Lema de Fatou). *Seja (u_n) uma sucessão de funções integráveis e não negativas, convergente quase sempre para* *uma função u. Suponhamos que exista uma constante C tal que $0 \leq \int u_n \leq C$ para todo n. Então u é integrável e tem-se que $0 \leq \int u \leq C$.*

Demonstração: Para cada n, seja $v_n = \inf_{k \geq n} u_k$. Então $v_n \leq v_{n+1}$ e, pela Observação 2.16, $v_n \in L_i(0)$. Logo, (v_n) é uma sucessão crescente de funções integráveis. Além disso $v_n \leq u_n$ para todo n e, portanto, de acordo com as hipóteses, $\int v_n \leq \int u_n \leq C$. Logo, pelo Teorema de Beppo Levi, a sucessão (v_n) converge para uma função integrável v. Sendo (v_n) crescente resulta que

$$v = \lim_{n \to \infty} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} u_k = \liminf_{n \to \infty} u_n = u \text{ quase sempre}$$

provando que u é integrável. Ainda pelo Teorema de Beppo Levi

$$\int u = \int v = \lim \int v_n \leq C.$$

□

O lema de Fatou também pode ser enunciado da seguinte forma:

2.20 Teorema (Lema de Fatou). *Seja (u_n) uma sucessão de funções integráveis e não negativas que converge quase sempre para uma função u. Se $\liminf_{n \to \infty} \int u_n$ é finito, então u é integrável e tem-se*

$$\int u \leq \liminf_{n \to \infty} \int u_n \,.$$

É claro que o Lema de Fatou nesta forma implica a validade do mesmo na forma anterior (Teorema 2.19). Mostremos que a recíproca é verdadeira, o que provará a equivalência das duas formas de enunciar o Lema de Fatou. Para cada n, seja $v_n = \inf_{k \geq n} \{u_k\}$. Então v_n é integrável para $n = 1, \dots$ e $v_n \leq u_{n+k}$, $k = 0, 1, \dots$. Logo, $\int v_n \leq \int u_{n+k}$, $k = 0, 1, \dots$, donde fazendo $k \to \infty$ tem-se

$$\int v_n \leq \liminf_{k \to \infty} \int u_{n+k} = \liminf_{k \to \infty} \int u_k = C.$$

Mas sendo (v_n) uma sucessão crescente, tem-se $v = \lim v_n = \sup_n v_n = \sup_n \inf_{k \geq n} \{u_k\} = \liminf_{n\to\infty} u_n = u$ quase sempre donde, (v_n) encontra-se nas condições do Lema de Fatou 2.19, válido por hipótese. Logo $0 < \int v < C = \liminf_{n\to\infty} \int u_n$ isto é $\int u \leq \liminf_{n\to\infty} \int u_n$. □

NOTA: O Lema de Fatou pode ser enunciado de forma mais geral substituindo-se a condição $u_n \geq 0$ pela condição $u_n \geq v$, onde v é uma função integrável. Em particular, substituindo $u_n \geq 0$ por $u_n \geq C$, onde C é uma constante negativa, no caso dos intervalos limitados. Tem-se a demonstração dessa forma geral do Lema de Fatou substituindo $L_i(0)$ por $L_i(v)$ na demonstração do Teorema 2.19.

2.21 Definição: Diz-se que uma função $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ é *mensurável* quando u é o limite quase sempre de uma sucessão de funções escada.

Obviamente, as funções escada e, em particular, as funções constantes são mensuráveis; de um modo geral, pela Proposição 2.8, toda função integrável é mensurável. A recíproca, porém, não é válida. Para ver isto, considere-se o Exemplo 2.18. Nele a função v é mensurável pois é limite quase sempre da sucessão de funções escada (w_n), onde w_n, $n = 1, \ldots$, é definida em $(0,1)$ por $w_n(x) = n/k$ se $(k-1)/n < x \leq k/n$, $k = 1, \ldots, n$. No entanto, como foi visto, v não é integrável.

Seja, como no exemplo que se acaba de examinar, $u \geq 0$ uma função mensurável mas não integrável e (u_n) uma sucessão de funções escada que converge quase sempre para u. Podemos supor que $u_n \geq 0$, $n = 1, \ldots$, pois, se assim não fosse, as funções escada u'_n definidas por $u'_n = u_n \vee \mathcal{O}$, $n = 1, \ldots$, seriam não negativas e ainda teríamos $\lim_{n\to\infty} u'_n = u$ quase sempre. A sucessão (v_n), onde $v_n = \inf_{k \geq n} u_k$, é crescente, $v_n \in L_i(0)$ e, portanto, v_n é integrável e, além disto, $\lim_{n\to\infty} v_n = u$ quase sempre. Mas não existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\int v_n \leq M$, $n = 1, \ldots$, porque se existisse um M nessas condições u seria integrável, pela forma crescente do teorema de Beppo Levi. Portanto, $\lim \int v_n = +\infty$ e como $v_n \leq u$ somos levados a por $\int u = +\infty$. Analogamente, se $u \leq 0$ é mensurável mas não integrável poremos $\int u = -\infty$. No caso geral, se u é mensurável mas não integrável, de $u = u^+ - u^-$ resulta que se uma das funções u^+ ou u^- for integrável podemos por $\int u = \int u^+ - \int u^-$.

2.22 Proposição. *Se u e v são funções mensuráveis em (a,b) e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:*

i) *λu, $u+v$, uv, $u \vee v$ e $u \wedge v$ são mensuráveis;*

ii) *se v não se anula em (a,b), então $1/v$ é mensurável.*

Em outros termos, a família das funções mensuráveis em (a,b) é um reticulado vetorial de funções, fechado para o produto e para o quociente por funções que não se anulam em (a,b).

Demonstração: Sejam u e v, respectivamente, limites quase sempre das sucessões de funções escada (u_n) e (v_n). Como $S_0(a,b)$ é um reticulado vetorial fechado para o produto, λu_n, $u_n + v_n$, $u_n v_n$, $u_n \vee v_n$ e $u_n \wedge v_n$, $n = 1, \ldots$, são funções escada e, pelas propriedades gerais dos limites e a Proposição 1.17, as sucessões (λu_n), $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(u_n \vee v_n)$ e $(u_n \wedge v_n)$ convergem quase sempre para λu, $u+v$, uv, $u \vee v$ e $u \wedge v$, respectivamente. Essas funções são, pois, mensuráveis ficando assim demonstrado i). Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos definir v_n' do seguinte modo: v_n' é igual a v_n nos pontos onde v_n é diferente de zero e igual a α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, nos pontos onde v_n é zero. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, v_n' é uma função escada, $v_n' \neq 0$ em (a,b) e $\lim v_n' = v$ quase sempre, donde $(1/v_n')$ é uma sucessão de funções escada que converge quase sempre para $1/v$. Portanto $1/v$ é mensurável. □

2.23 Corolário. *Se u é mensurável o mesmo acontece com u^+, u^- e $|u|$.*

Com efeito, $u^+ = u \vee \mathcal{O}$, $u^- = -u \vee \mathcal{O}$ e $|u| = u^+ + u^-$. □

Consideremos uma função $v\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, não negativa e $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Denomina-se truncada de u por v a função

$T_v(u)$ definida do seguinte modo:

$$T_v(u)(x) = \begin{cases} -v(x) & \text{se} \quad u(x) \leq -v(x) \\ u(x) & \text{se} \quad |u(x)| \leq v(x) \\ v(x) & \text{se} \quad u(x) \geq v(x). \end{cases}$$

Observe que vale sempre a desigualdade: $-v(x) \leq T_v(u)(x) \leq v(x)$ para todo $x \in (a,b)$. De acordo com a definição acima é fácil concluir que $T_v(u)$ também pode ser definida pela fórmula: $T_v(u) = (-v) \vee (u \wedge v)$ (verifique!).

2.24 Proposição. *Seja v uma função integrável. Se u for mensurável e $|u| \leq v$, então u é integrável.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sucessão de funções escada convergindo quase sempre para u. Para cada n, considere a truncada de u_n pela função v, isto é, a função $v_n = T_v(u_n) = (-v) \vee (u_n \wedge v)$. Então v_n é integrável para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso $v_n \in L(v)$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} [(-v) \vee (u_n \wedge v)] = (-v) \vee (u \wedge v)$ e por hipótese $-v \leq u \leq v$, vem que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = u$. Logo pelo teorema de Lebesgue u é integrável. □

2.25 Corolário. *Se u é mensurável e $|u|$ é integrável então u é integrável.*

Demonstração: Basta fazer $v = |u|$ na proposição. □

2.26 Corolário. *Se u é mensurável e limitada num intervalo (a,b) de amplitude finita, então u é integrável.*

2.27 Proposição. *Seja (u_n) uma sucessão de funções mensuráveis convergente quase sempre para uma função u. Então u é mensurável.*

Demonstração: Podemos considerar $u_n \geq 0$ para todo n, pois se assim não fosse consideraríamos as partes positiva e negativa de u_n, isto é, as funções u_n^+ e u_n^- Para cada n seja $v_n = \frac{1}{1+u_n}\cdot$ Como $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$

quase sempre, segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{1+u}$ quase sempre. Observe que as funções v_n são mensuráveis pela Proposição 2.22 e $0 < v_n \leq 1$ para todo n. Resulta do Corolário 2.26 que as v_n são integráveis; logo o limite de (v_n) é uma função integrável (Teorema de Lebesgue) donde a função $v = \frac{1}{1+u}$ é integrável e, portanto, mensurável em (a, b). Além disto $v > 0$. Logo, pela Proposição 2.22, a função $u = \frac{1-v}{v}$ é mensurável.

2.28 Corolário. *Seja (u_n) uma sucessão de funções mensuráveis que converge para uma função u quase sempre em (a, b). Se existe uma função integrável g tal que se tenha $|u| \leq g$ então u é integrável.*

Demonstração: Sendo as funções u_n mensuráveis, a função u é mensurável pela Proposição 2.27. Segue-se da Proposição 2.24 que u é integrável. □

2.29 Corolário. *Seja $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ e suponha que para cada $\varepsilon > 0$ existem funções integráveis v_ε e w_ε tais que se tenha $v_\varepsilon \leq u \leq w_\varepsilon$ e $\int_a^b (w_\varepsilon - v_\varepsilon) < \varepsilon$. Então u é integrável.*

Demonstração: Ponhamos sucessivamente $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ e denotemos por v_n e w_n as funções correspondentes. Então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b (w_n - v_n)$ é convergente, pois é majorada pela série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot$ Então, pelo Teorema 2.12, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (w_n - v_n)$ é convergente quase sempre e portanto $w_n - v_n$ converge para zero quase sempre. Isto é $v_n \to u$ e $w_n \to u$ quase sempre. Se considerarmos a função $H(x) = \max\{|v_1(x)|, |w_1(x)|\}$ é claro que H é integrável e $|u| \leq H$. Pelo Corolário 2.28 segue-se que u é integrável. □

2.3 A integral sobre um intervalo não limitado

Até aqui consideramos a integral para funções definidas num intervalo limitado (a, b). O caso dos intervalos não limitados como $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$ não apresenta dificuldade. Com pequenas modificações nas definições poderemos obter todos os resultados já vistos até agora para o caso do intervalo limitado. Neste parágrafo denotaremos por J um intervalo não limitado de qualquer um dos tipos mencionados acima. Uma função φ definida em J é dita *função escada* se existe um intervalo limitado (a, b) contido em J, fora do qual φ é nula e no qual φ é função escada no sentido da definição dada na Seção 1.3.

2.30 Exemplo: A função ψ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} \text{maior inteiro menor que } x \text{ se } |x| < 5 \\ 0 \text{ se } |x| \geq 5 \end{cases}$$

é uma função escada definida em toda reta.

Se φ for uma função escada definida em J e se denotarmos por C_k os valores assumidos por φ sobre os intervalos limitados $I_k \subset (a, b) \subset J$, $k = 1, \ldots, n$ a sua integral é definida por

$$\int_J \varphi = \sum_{k=1}^{n} C_k \ \text{amp}(I_k) = \int_a^b \varphi.$$

As definições de funções mensuráveis e integráveis sobre J são feitas de modo análogo ao caso do intervalo finito e todos os resultados vistos até agora são válidos, com exceção dos que fazem apelo à integrabilidade das funções constantes. Embora as funções constantes sejam mensuráveis nos intervalos ilimitados, não são, contudo, integráveis nesses intervalos (a função u constante e igual a c no intervalo $(0, +\infty)$, por exemplo, é mensurável porque é o limite da sucessão $(c\mathcal{X}_{(0,n)})$ de funções escada, mas não é integrável porque se fosse, sua suposta integral deveria ser maior que $\int c\mathcal{X}_{(0,n)} = nc$, $\forall n \in \mathbb{N}$, uma vez que $u > c\mathcal{X}_{(0,n)}$, o que não é possível). Como conseqüência, o Corolário 2.26 não é válido nos intervalos ilimitados e, desse modo, a Proposição 2.27, que permanece válida nos intervalos ilimitados, deve ter sua demonstração revista pois faz apelo àquele corolário. Para demonstrá-la no caso ilimitado devemos substituir a função constante e igual a 1 que figura no numerador de v_n por uma função h integrável e essencialmente positiva; as funções $\hat{v}_n = \frac{h}{1+u_n}$ são integráveis pela Proposição 2.24, pois $\hat{v}_n$ é mensurável e $0 < \hat{v}_n \leq h$. Os demais argumentos da demonstração permanecem válidos. (Uma função integrável e estritamente positiva em $(0, +\infty)$, por exemplo, pode ser construída como segue: seja $u_k = \frac{1}{2^k}\mathcal{X}_{(k-1,k)}$, $k = 1, \ldots$, e $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$; então (h_n) é uma sucessão crescente de funções escada cuja sucessão das integrais é limitada pois $\int h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1/2^k < 1$. Pela forma crescente do Teorema de Beppo Levi, (h_n) converge para uma função integrável h e, como é imediato, $h > 0$ em $(0, +\infty)$).

Exercícios

2.1 Prove que dada u integrável em (a,b) tal que $0 \leq u \leq M$, então existe uma função escada φ tal que $|u-\varphi| < M$ e $\int |u-\varphi| < \varepsilon$. *Sugestão*: Aplicar Proposição 2.8.

2.2 Mostre que $E \subset (a,b)$ tem medida nula se e só se existe uma seqüência (u_k) de funções escada não negativas tais que a série $\sum u_k$ é divergente nos pontos de E e a série das integrais $\sum \int u_k$ é convergente.

2.3 Prove que uma função $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ é mensurável se e só se $T_v(u)$ é integrável em (a,b) qualquer que seja a função $v \geq 0$, integrável em (a,b).

2.4 Com exemplos mostre que de $u, v \in L(a,b)$ não decorre que $u \cdot v \in L(a,b)$.

2.5 Mostre que se u é mensurável e limitada e v é integrável, então uv é integrável.

2.6 Seja $u_n = n\mathcal{X}_{(n,n+1)}$. Então (u_n) converge a $u=0$ em $(0,\infty)$ mas $\int u \neq \lim \int u_n$. Por que o Teorema da Convergência Limitada não se aplica a este caso?

2.7 Seja $u_n = -\frac{1}{n}\mathcal{X}_{(0,n)}$. Então (u_n) converge a $u=0$ em $(0,\infty)$ e

$$\int u \geq \liminf_{n\to\infty} \int u_n\,.$$

Por que este exemplo não contraria o lema de Fatou?

2.8 Demonstre a seguinte forma generalizada do Lema de Fatou: se (u_n) é uma sucessão de funções de $L(u_0)$, então $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$ é integrável e

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty} u_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b u_n\,.$$

3

Conjuntos e Funções Mensuráveis

3.1 Conjuntos mensuráveis

O conceito de medida de um conjunto generaliza os antigos conceitos de comprimento, área e volume das figuras elementares. Nesta seção iremos definir um conceito de medida paa subconjuntos da reta e estudar as propriedades de tal medida. Mais precisamente, introduziremos aqui o conceito de medida proposto por Lebesgue para os subconjuntos da reta, na formulação de Riesz. Posteriormente, mostra-se a equivalência das formulações de Riesz e de Lebesgue.

3.1 Definição. Dado $E \subset \mathbb{R}$ dizemos que E é *mensurável* quando sua função característica $\mathcal{X}_E$ for mensurável.

3.2 Definição. Seja E um subconjunto mensurável de (a, b). A *medida* de E, denotada por $\mu(E)$, é definida por

$$\mu(E) = \int_A^b \mathcal{X}_E \,,$$

caso $\mathcal{X}_E$ seja integrável em (a, b) e, por $\mu(E) = +\infty$, caso não seja.

Da Definição 3.2 resulta que se (a, b) é limitado, então todos os subconjuntos mensuráveis de (a, b) têm medida finita uma vez que, para cada $E \subset (a,b)$, $\mathcal{X}_E$ é uma função limitada e, portanto, integrável pelo Corolário 2.26. Logo os subconjuntos de medida infinita só podem ocorrer quando (a,b) é ilimitado.

Da Definição 3.2 resulta, ainda, que sempre se tem $\mu(E) \geq 0$.

3.3 Exemplo. Se E for um intervalo limitado então E é mensurável e a medida de E é a sua amplitude.

3.4 Exemplo. a) O conjunto vazio $\varnothing$ é mensurável e $\mu(\varnothing) = 0$. Basta observar que $\mathcal{X}_\varnothing \equiv 0$ em (a,b).

b) Sejam E e F mensuráveis. Então $E \cup F$ e $E \cap F$ são mensuráveis. Basta observar que $\mathcal{X}_{E\cup F} = \mathcal{X}_E \vee \mathcal{X}_F$ e $\mathcal{X}_{E\cap F} = \mathcal{X}_E \wedge \mathcal{X}_F$.

3.5 Exemplo. Todo conjunto E de medida nula no sentido da Definição 1.1 é mensurável no sentido da Definição 3.1 e tem-se $\mu(E) = 0$. Reciprocamente se E é mensurável no sentido da Definição 3.1 e $\mu(E) = 0$ então E tem medida nula no sentido da Definição 1.1.

Com efeito, seja E um conjunto de medida nula no sentido da Definição 1.1. Então $x_E = 0$ quase sempre, donde $x_E \in L(a,b)$ e $\int_a^b x_E = 0$. Logo, E mensurável e $\mu(E) = 0$.

Reciprocamente, de $\mu(E) = 0$ resulta que $\mathcal{X}_E$ é integrável e

$$\int \mathcal{X}_E = \mu(E) = 0.$$

Como $\mathcal{X}_E \geq 0$ segue, pela Proposição 2.14, que $\mathcal{X}_E = 0$ quase sempre. Logo E tem medida nula no sentido da Definição 1.1.

Salvo menção explícita em contrário, os conjuntos com os quais lidaremos neste capítulo, são subconjuntos de um intervalo limitado fixo (a,b).

3.6 Proposição. *Sejam E, F conjuntos mensuráveis tais que $E \subset F$. Então $F - E$ é mensurável e $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Demonstração: Basta observar que $\mathcal{X}_{F-E} = \mathcal{X}_F - \mathcal{X}_E$. □

3.7 Corolário. *Se $E \subset (a,b)$ é mensurável então o complemento de E em (a,b) é mensurável.*

Demonstração: Do Exemplo 3.3 sabemos que (a,b) é mensurável. Logo, $(a,b) - E$ é mensurável pela Proposição 3.6. □

3.8 Proposição. *Seja $\{M_\nu; \nu \in \mathbb{N}\}$ uma família enumerável de conjuntos mensuráveis e seja $M = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$. Então*

i) *M é mensurável.*

ii) *Se os M_ν são dois a dois disjuntos tem-se $\mu(M) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu(V_\nu)$.*

iii) *Se a família $\{M_\nu; \nu \in \mathbb{N}\}$ é crescente, isto é, $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_\nu \subset \ldots$ tem-se $\mu(M) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \mu(V_\nu)$.*

iv) *Em qualquer caso tem-se $\mu(M) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu(V_\nu)$.*

Demonstração: i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $g_k(x) = \max\limits_{\nu \leq k}\{\mathcal{X}_{M_\nu}(x)\}$. Sendo as funções $\mathcal{X}_{M_\nu}$ mensuráveis decorre que as g_k são mensuráveis. Por outro lado temos que $\mathcal{X}_M(x) = \sup\limits_{\nu \in \mathbb{N}}\{\mathcal{X}_{M_\nu}(x)\} = \lim\limits_{k \to \infty} g_k(x)$. Logo, de acordo com a Proposição 2.27, temos que $\mathcal{X}_M$ é mensurável e portanto M é mensurável.

ii) Se os M_ν são dois a dois disjuntos as funções g_k definidas no item anterior podem ser descritas por $g_k(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{k} \mathcal{X}_{M_\nu}(x)$. As funções g_k são integráveis e $\lim\limits_{k \to \infty} g_k = \mathcal{X}_M$. Além disso $\mathcal{X}_M$ é integrável e $|g_k| \leq \mathcal{X}_M$ para todo k. Pelo Teorema 2.17 (Lebesgue) tem-se que

$$\int_a^b \mathcal{X}_M = \lim_{k \to \infty} \int_a^b g_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \mathcal{X}_{M_\nu}$$

e portanto, $\mu(M) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu(M_\nu)$.

iii) Considere a seguinte família de conjuntos:

$$N_1 = M_1,\ N_2 = M_2 - M_1,\ N_3 = M_3 - M_2, \dots, N_\nu = M_\nu - M_{\nu-1}, \dots .$$

Pela Proposição 3.6 os conjuntos N_ν são mensuráveis e tem-se $\mu(N_\nu) = \mu(M_\nu) - \mu(M_{\nu-1})$. Além do mais eles são dois a dois disjuntos e $M = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} N_\nu$. Logo, pelo item anterior, tem-se

$$\begin{aligned}\mu(M) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(N_\nu) = \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1) + \dots + \mu(M_\nu) - \mu(M_{\nu-1}) + \dots \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \Big[\mu(M_1) + \sum_{k=2}^{\nu} (\mu(M_k) - \mu(M_{k-1}))\Big] = \lim_{\nu\to\infty} \mu(M_\nu).\end{aligned}$$

iv) Considere a família $\{P_k; k \in \mathbb{N}\}$ onde $P_k = \bigcup\limits_{n=1}^{k} M_\nu$. Então os P_k são mensuráveis e $P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_k \subset \dots$. Além disso $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$. Logo, pelo item anterior tem-se

$$\mu(M) = \lim_{k\to\infty} \mu(P_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k\}.$$

Sendo $M_1 \cap M_2$ mensurável (Exemplo 3.4, b)) e

$$\begin{aligned}\mu(M_1 \cup M_2) &= \mu(M_1 \cup (M_2 - (M_1 \cap M_2))) \\ &= \mu(M_1) + \mu(M_2 - (M_1 \cap M_2)) \\ &= \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1 \cap M_2) \le \mu(M_1) + \mu(M_2),\end{aligned}$$

por indução conclui-se que $\mu(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k) \le \mu(M_1) + \mu(M_2) + \cdots + \mu(M_k)$ para todo k. Logo, $\mu(M) \le \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(M_i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(M_k)$.

$\square$

3.9 Proposição. *Seja* $\{M_\nu; \nu \in \mathbb{N}\}$ *uma família enumerável de conjuntos mensuráveis e seja* $M = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$. *Então*

i) M *é mensurável.*

ii) *Se a família* $\{M_\nu; \nu \in \mathbb{N}\}$ *é decrescente, isto é,* $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_\nu \supset \ldots$, *então* $\mu(M) = \lim_{\nu\to\infty} \mu(M_\nu)$.

Demonstração: i) Em virtude do Corolário 3.7, basta mostrar que CM é mensurável. Como $CM = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} CM_\nu$ e os M_ν são mensuráveis, segue do Corolário 3.7 que os CM_ν são mensuráveis e portanto CM é mensurável em virtude do item (i) da Proposição 3.8. (Aqui e em todo este texto CM denota o complementar de M).

ii) Sendo a família $\{M_\nu; \nu \in \mathbb{N}\}$ decrescente, segue-se que a família $\{CM_\nu; \nu \in \mathbb{N}\}$ é crescente. Além disso $CM = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} CM_\nu$. Logo, pelo item (iii) da Proposição anterior tem-se $\mu(CM) = \lim_{\nu\to\infty} \mu(CM_\nu)$. Ou seja, $(b-a) - \mu(M) = (b-a) - \lim_{\nu\to\infty} \mu(M_\nu)$ e portanto, $\mu(M) = \lim_{\nu\to\infty} \mu(M_\nu)$,. □

Sabe-se que se A é um aberto de (a,b) então A é união de uma família enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Como os intervalos abertos são mensuráveis, obtém-se pela Proposição 3.8 que A é mensurável. Sendo fechado o complementar de um aberto, decorre do Corolário 3.7 que todo fechado é mensurável. Prosseguindo desta maneira conclui-se que são mensuráveis todos os conjuntos obtidos a partir dos intervalos abertos, por meio das operações elementares com conjuntos a saber, uniões, interseções e complementações. Esses particulares conjuntos mensuráveis são conhecidos por *conjuntos de Borel* ou *Borelianos.*

Neste ponto é natural indagar se existem conjuntos limitados não mensuráveis. A resposta é afirmativa. Exemplos simples de tais conjuntos podem ser encontrados em Natanson [19], página 76. Veja Compl. 3, p.152.

3.2 A integral sobre conjuntos mensuráveis

Se $E \subset (a, b)$ é mensurável, pode-se definir a integral de uma função sobre E. Diz-se que u é *integrável* sobre E se a função $u\mathcal{X}_E$ for integrável sobre (a, b) e define-se

$$\int_E u = \int_a^b u\mathcal{X}_E \,.$$

Dentre as propriedades da integral de uma função u sobre um conjunto mensurável E destacaremos algumas que serão estudadas a seguir.

3.10 Proposição. *Se u é integrável sobre $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, onde os E_i são mensuráveis e dois a dois disjuntos então u é integrável sobre cada E_i e tem-se*

$$\int_E u = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} u. \tag{3.1}$$

Demonstração: Por definição a função $u\mathcal{X}_E$ é integrável sobre (a, b) e portanto mensurável. Ainda por definição, para cada i, a função $\mathcal{X}_{E_i}$ é mensurável. Logo, para cada i, a função $u\mathcal{X}_{E_i}$ é mensurável pois $u\mathcal{X}_{E_i} = (u\mathcal{X}_E)\mathcal{X}_{E_i}$. Além disso, para cada i tem-se

$$|u\mathcal{X}_{E_i}| = |u\mathcal{X}_E|\,|\mathcal{X}_{E_i}| \leq |u|\mathcal{X}_E \,,$$

uma vez que $|\mathcal{X}_{E_i}| \leq 1$. Como a função $|u|\mathcal{X}_E$ é integrável, segue-se da Proposição 2.24 que $u\mathcal{X}_{E_i}$ é integrável. Sendo os E_i disjuntos dois a dois pode-se escrever que $\mathcal{X}_E = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_{E_i}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{E_i} \leq 1$.

Portanto,

$$u\mathcal{X}_E = \sum_{i=1}^{\infty} u\mathcal{X}_{E_i}\,; \tag{3.2}$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} u\mathcal{X}_{E_i}\Big| \le \sum_{i=1}^{n} |u|\mathcal{X}_E\mathcal{X}_{E_i} = |u|\mathcal{X}_E\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_{E_i} \le |u|\mathcal{X}_E\,. \tag{3.3}$$

De (3.3) tem-se que as reduzidas de ordem n da série (3.2) são dominadas pela função integrável $|u|\mathcal{X}_E$ e pelo Teorema 2.17 (Lebesgue) pode-se integrar (3.2) termo a termo, obtendo (3.1). □

A recíproca da proposição anterior é válida se a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|u|$ é suposta convergente, como mostra o resultado a seguir.

3.11 Proposição. *Seja $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ onde os E_i são mensuráveis e dois a dois disjuntos. Se u é integrável sobre cada E_i e a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|u|$ é convergente então u é integrável sobre E e vale a igualdade* (3.1).

Demonstração: Seja, inicialmente, $u \ge 0$ e observe-se que, nesse caso, a função $u\mathcal{X}_E$ é limite quase sempre da sucessão crescente constituida das somas parciais da série de funções integráveis $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u\mathcal{X}_{E_i}$, cujas integrais são limitadas por uma constante porque a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} u$ é convergente por hipótese. Segue-se do Teorema 2.12 (Beppo Levi) que $u\mathcal{X}_E$ é integrável e vale (3.1). No caso geral, da integrabilidade de u sobre cada E_i, isto é, da integrabilidade de $u\mathcal{X}_{E_i}$ e de $u^+\mathcal{X}_{E_i} = (u\mathcal{X}_{E_i})^+$ e $u^-\mathcal{X}_{E_i} = (u\mathcal{X}_{E_i})^-$ resulta, pelo Corolário 2.2, a integrabilidade de u^+ e u^- sobre cada E_i. Além disto, da convergência da série $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|u|$

resulta a das séries $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} u^+$ e $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} u^-$. Pelo que já foi demonstrado segue-se, então, que u^+ e u^- são integráveis sobre E e

$$\int_E u^+ = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} u^+, \quad \int_E u^- = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} u^- .$$

Portanto a função u^+ e $u^- = u$ é integrável sobre E e

$$\int_E u = \int_E (u_+ - u_-) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} u^+ - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} u^- = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} u.$$

□

Quando $u \geq 0$ a proposiçao anterior pode ser enunciada, equivalentemente, da seguinte forma: Se uma função $u \geq 0$ é integrável sobre cada um dos conjuntos $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_i \subset \ldots$, e se a sucessão das integrais $\left(\int_{E_i} u \right)$ é limitada, então u é integrável sobre $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ e tem-se $\int_E = \lim\limits_{i \to \infty} \int_{E_i} u$.

3.12 Proposição. *Se u é integrável sobre (a, b), então para cada conjunto mensurável $E \subset (a, b)$, u é integrável sobre E.*

Demonstração: Basta ver que a função $u\mathcal{X}_E$ é mensurável e que $u\mathcal{X}_E| \leq |u|$. Aplicando a Proposição 2.24 obtemos o resultado desejado. □

Se os conjuntos considerados possuem medida infinita podemos definir a intetgral sobre eles utilizando o conceito de integral sobre intervalos são limitados introduzido no parágrafo 2.3.

3.3 O método de Lebesgue e sua comparação com o método de Riesz

Até aqui consideramos o método de Riesz para definir a integral de Lebesgue. Nesta seção passaremos a expor sucintamente o método original de Lebesgue e mostraremos a sua equivalência com o método de Riesz.

O método de Lebesgue consiste de três etapas: a definição dos conjuntos mensuráveis, a definição das funções mensuráveis e a definição das funções integráveis. Para distinguir os conceitos de medida, mensurabilidade e integrabilidade propostos por Riesz, dos mesmos conceitos propostos por Lebesgue, denotaremos estes últimos por L-medida, L-mensurabilidade e L-integrabilidade. Esta notação é apenas temporária uma vez que, como iremos ver, as definições de Riesz e de Lebesgue são equivalentes.

Dado $E \subset [a,b]$, chama-se *medida exterior* de E, e denota-se por $m_e(E)$, o seguinte número

$$m_e(E) = \inf_{\{I_k\}\in\mathcal{A}} \sum_k \operatorname{amp}(I_k), \tag{3.4}$$

onde $\mathcal{A}$ denota a coleção de todos os recobrimentos $\{I_k\}$ enumeráveis de E por intervalos I_k abertos ou não.

Observe-se que se $\varepsilon > 0$ e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_k) < m_e(E) + \frac{\varepsilon}{2}$, onde $\{I_k\} \in \mathcal{A}$, então se a_k e b_k são os extensos de I_k e se designamos por I'_k, $k = 1, \dots,$ o intervalo aberto $\left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}},\ b_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right)$, tem-se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I'_k) < m_e(E) + \varepsilon$. Isto mostra que em (3.4) podemos supor que os intervalos I_k são abertos.

Em geral vale a seguinte desigualdade

$$m_e(E) + m_e(CE) \geq b - a. \tag{3.5}$$

De fato, sejam $\{I_k\}$, $\{J_s\}$ recobrimentos enumeráveis de E e CE, respectivamente, por intervalos abertos tais que

$$m_e(E) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_k \operatorname{amp}(I_k) \quad \text{e} \quad m_e(CE) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_k \operatorname{amp}(J_s),$$

onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Então $\{I_k\} \cup \{J_s\}$ é um recobrimento de $[a, b]$ e pelo teorema de Borel-Lebesgue podemos escolher um subrecobrimento $S_1, S_2, \ldots, S_n$ finito de $[a, b]$. É claro que $\sum\limits_{i=1}^{n} \text{amp}(S_i) \leq m_e(E) + m_e(CE) + \varepsilon$. Além disso, $b - a \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \text{amp}(S_i)$. Portanto,

$$b - a \leq m_e(E) + m_e(CE) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, obtém-se (3.5).

Diremos que o conjunto E é *L-mensurável* quando em (3.5) for válida a igualdade. Neste caso $m_e(E)$ é dita *L-medida* de E e denotada simplesmente por $m(E)$.

É importante observar que esta definição não depende da escolha do intervalo fechado $[a, b]$ que contém E.

3.13 Teorema. *Um conjunto E é L-mensurável se e somente se E é mensurável e tem-se $m(E) = \mu(E)$.*

Demonstração: Suponhamos que E seja L-mensurável. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $\{I_k\}$, $\{J_s\}$ recobrimentos enumeráveis de E e CE, respectivamente, tais que $\sum\limits_{k} \text{amp}(I_k) \leq m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$ e $\sum\limits_{s} \text{amp}(J_s) \leq m(CE) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Sejam h e g as somas das funções características dos intervalos correspondentes aos recobrimentos $\{I_k\}$ e $\{J_s\}$, respectivamente. A existência de h e g é assegurada pelo teorema de Beppo Levi. Além do mais h e g são integráveis e $\int_a^b h = \sum\limits_{s} \text{amp}(I_k)$, $\int_a^b g = \sum\limits_{s} \text{amp}(J_s)$. Também são válidas as seguintes desigualdades, cujas verificações são imediatas:

$$h \geq \mathcal{X}_E \geq \mathcal{X}_{[a,b]} - g$$

e

$$\begin{aligned} \int_a^b [h - (1 - g)] &= \sum_k \text{amp}(I_k) + \sum_s \text{amp}(J_s) - (b - a) \\ &\leq m(E) + m(CE) + \varepsilon - (b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue-se do Corolário 2.29 que $\mathcal{X}_E$ é integrável. Logo $\mathcal{X}_E$ é mensurável e, portanto, E é mensurável. Como a integral de $\mathcal{X}_E$ será compreendida entre as integrais de $1-g$ e h e, além disso valem as desigualdades

$$\int_a^b (1-g) = b-a-\sum_s \operatorname{amp}(J_s) \geq b-a-m(CE)-\frac{\varepsilon}{2} = m(E)-\frac{\varepsilon}{2}$$

$\int_a^b h = \sum\limits_k \operatorname{amp}(I_k) \leq m(E)+\frac{\varepsilon}{2}$, segue-se que $m(E)-\frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b \mathcal{X}_E \leq m(E)+\frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Como ε é arbitrário, tem-se que $\int \mathcal{X}_E = m(E)$, mostrando que $\mu(E) = m(E)$.

Reciprocamente, suponhamos que E seja mensurável. Vamos provar que E é L-mensurável. Por definição $\mathcal{X}_E$ é mensurável. Seja, então, (φ_ν) uma sucessão de funções escada convergindo quase sempre para $\mathcal{X}_E$. Podemos admitir que as funções φ_ν são funções características de conjuntos A_ν que por sua vez são uniões de um número finito de intervalos. De fato, se este não fosse o caso poderíamos modificar os valores de φ_ν redefinindo-as da seguinte forma: $\varphi_\nu(x) = 1$ se o valor anterior $\varphi_\nu(x) > 1/2$ e $\varphi_\nu(x) = 0$ nos demais casos. A sucessão assim modificada ainda convergiria quase sempre para $\mathcal{X}_E$. Além disso a função $\mathcal{X}_E$ é limite quase sempre da sucessão formada pelas funções

$$g_\nu(x) = \sup\left\{\varphi_\nu(x), \varphi_{\nu+1}(x), \dots\right\},$$

e cada g_ν é função característica do conjunto $B_\nu = A_\nu \cup A_{\nu+1} \cup \dots$ e é claro que os B_ν são uniões de famílias enumeráveis de intervalos que podemos admitir serem dois a dois disjuntos suprimindo, se necessário, de cada A_k os pontos contidos nos conjuntos A_i de índices i inferiores a k. Assim, a integral de g_ν é a soma das amplitudes dos intervalos que fazem parte de B_ν e esta soma tende para a integral da função $\mathcal{X}_E$ quando $\nu \to \infty$. Mais ainda, os intervalos que compõem os B_ν cobrem E exceto, possivelmente, por um conjunto de medida nula. Segue-se então que

$$m_e(E) \leq \int \mathcal{X}_E\,. \tag{3.6}$$

Como CE também é mensurável, permutando E por CE em (3.6), obtemos

$$m_e(CE) \leq \int \mathcal{X}_{CE} = \int (1 - \mathcal{X}_E) = b - a - \int \mathcal{X}_E \,. \tag{3.7}$$

Adicionando membro a membro (3.6) e (3.7) concluímos que

$$m_e(E) + m_e(CE) \leq b - a. \tag{3.8}$$

De (3.5) e (3.8) vem que

$$m_e(E) + m_e(CE) = b - a$$

e portanto E é L-mensurável. $\square$

Daqui em diante não necessitamos mais distinguir entre conjuntos mensuráveis e L-mensuráveis pois já vimos que os dois conceitos são equivalentes.

3.14 Definição. Uma função $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ é dita *L-mensurável* se o conjunto $\{x \in (a,b); u(x) \leq c\}$ for mensurável qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

3.15 Observação: É um exercício fácil demonstrar que, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$, se um dos seguintes conjuntos $\{x \in (a,b); u(x) \leq c\}$, $\{x \in (a,b); u(x) > c\}$, $\{x \in (b,a); u(x) \geq c\}$, $\{x \in (a,b); u(x) < c\}$ for mensurável, os outros também serão.

3.16 Teorema. *Uma função u é L-mensurável se e somente se u é mensurável.*

Demonstração: Suponhamos que u seja L-mensurável. Então, para cada $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $E_{k,n} = \big\{x \in (a,b); k/n < u(x) \leq \frac{k+1}{n}\big\}$ é mensurável (em virtude da Definição 3.14 e da Observação 3.15). Para cada n, defina $\varphi_n(x) = k/n$ para $x \in E_{k,n}$. As funções φ_n são mensuráveis pois

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{n} \mathcal{X}_{E_{k,n}} \,.$$

Além disso φ_n converge para u quase sempre em (a, b). Logo u é mensurável.

Reciprocamente, suponhamos que u é mensurável. Seja $c \in R$ e considere a função mensurável $u_c(x) = \max\{u(x), c\}$. Consideremos a sucessão (g_ν) onde as g_ν são definidas por

$$g_\nu(x) = \nu\big[u_{c+1/\nu}(x) - u_c(x)\big].$$

É claro que as g_ν são mensuráveis e é fácil constatar que a sucessão (g_ν) converge quase sempre para a função característica do conjunto $A = \{x \in (a, b); u(x) \leq c\}$. Portanto a função característica de A é mensurável, o que acarreta A mensurável. Por definição, temos que u é L-mensurável. $\square$

Daqui em diante não faremos mais distinção entre as funções mensuráveis e as L-mensuráveis.

Para finalizar esta seção mostraremos a equivalência entre os conceitos de integral e de L-integral.

Consideremos uma função u limitada e mensurável definida num intervalo limitado (a, b). Seja (m, M) um intervalo contendo o conjunto de valores de u, isto é, tal que $m < u(x) < M$ para todo $x \in (a, b)$. Seja π a decomposição de (m, M) cujos pontos de divisão são $y_0 = m < y_1 < \cdots < y_\nu = M$ e consideremos as "somas integrais"

$$s_\pi(u) = \sum_{j=0}^{\nu-1} y_j\, \mu(E_j) \quad \text{e} \quad S_\pi(u) = \sum_{j=0}^{\nu-1} y_{j+1}\, \mu(E_j), \tag{3.9}$$

onde

$$E_j = \big\{x \in (a, b); y_j < u(x) \leq y_{j+1}\big\}, \quad j = 0, \ldots, \nu - 1.$$

Tem-se, obviamente, $s_\pi(u) \leq S_\pi(u)$.

Dado $\varepsilon > 0$, sejam π e π' duas decomposições de (m, M) cujas amplitudes máximas $\delta(\pi)$ e $\delta'(\pi)$ são menores que $\varepsilon/(b - a)$. Então temos

$$
\begin{aligned}
S_\pi(u) - s_\pi(u) &= \sum_{j=0}^{\nu-1} y_{j+1}\, \mu(E_j) - \sum_{j=0}^{\nu-1} y_j\, \mu(E_j) \\
&= \sum_{j=0}^{\nu-1} (y_{j+1} - y_j)\mu(E_j) \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=0}^{\nu-1} \mu(E_j) = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

e, analogamente, $S_{\pi'}(u) - s_{\pi'}(u) \le \varepsilon$. Designando por π'' a decomposição cujos pontos de divisão são os de π e os de π' temos

$$
s_\pi \le s_{\pi''} \le S_{\pi''} \le S_\pi \quad \text{e} \quad s_{\pi'} \le s_{\pi''} \le S_{\pi''} \le S_{\pi'}\,.
$$

Logo, $(s_{\pi''}, S_{\pi''}) \subset (s_\pi, S_\pi) \cap (s_{\pi'}, S_{\pi'})$, donde $|s_\pi - s_{\pi'}| < \varepsilon$ e, assim, quando $\delta(\pi) \to 0$ a função s_π tende para um limite que é dito L-integral de u em (a, b).

Se a função u é não limitada admitimos inicialmente que é não negativa. Neste caso, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ considera-se a função $u_\nu(x) = \min\{u(x), \nu\}$ que evidentemente é não negativa, mensurável e limitada. Assim temos uma sucessão (u_ν), crescente, de funções L-integráveis convergindo quase sempre para u. Se a sucessão numérica das L-integrais das funções u_ν tiver um limite finito quando $\nu \to \infty$, a função u é dita *L-integrável* e tal limite é a sua L-integral.

No caso geral, escreve-se $u = u^+ - u^-$ e diz-se que u é L-integrável se o forem u^+ e u^- definindo-se a L-integral de u como a diferença entre as L-integrais de u^+ e u^-.

3.17 Observação: Notemos que a definição de integral dada por Lebesgue difere da de Riemann no fato de que enquanto este considerou decomposições do domínio (a, b) de u, aquele considerou decomposições do conjunto de valores de u. Para isto ele admitiu a hipótese de u ser mensurável a fim de que os conjuntos $\{x \in (a, b); y_j < u(x) \le y_{j+1}\}$ que aparecem em (3.9) fossem mensuráveis e as igualdades (3.9) tivessem significado para toda decomposição π.

3.18 Teorema. *Uma função u é L-integrável se e só se u é integrável e sua L-integral coincide com sua integral.*

Demonstração: Se U é mensurável e limitada já sabemos que é L-integrável e também integrável. Resta ver apenas que estas duas integrais coincidem. Observemos inicialmente que se π é uma decomposição do intervalo (m, M), $m < u(x) < M \ \forall x \in (a, b)$, por meio dos pontos $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_\nu = M$, podemos associar a π uma função φ_π (que depende de u) definida por $\varphi_\pi(x) = y_j$ para $x \in \{x \in (a, b); y_j < u(x) \leq y_{j+1}\}$. É imediato que φ_π é integrável e sua integral é igual a $s_\pi(u)$ dada pela primeira das fórmulas (3.9). Além disso, para todo $x \in (a, b)$, tem-se $|u(x) - \varphi_\pi(x)| < \delta(\pi)$.

Tendo isto em mente consideremos uma sucessão de decomposições (π_ν) do intervalo (m, M) tais que para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se tenha $\delta(\pi_s) < 1/s$. Associada a esta sucessão de decomposições temos uma sucessão de funções (φ_ν), onde $\varphi_s = \varphi_{\pi_s}$. As funções φ_s são integráveis e a sucessão (φ_ν) converge quase sempre para u em (a, b). Além disso existe uma constante C tal que $|\varphi_\nu| \leq C$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Basta considerar $C > \max\{|m|, |M|\}$. Portanto, pelo Teorema 2.17 (Lebesgue), $\int u = \lim\limits_{\nu \to \infty} \int \varphi_s$. Mas este limite é, por definição, a L-integral de u uma vez que $\int \varphi_\nu = s_{\pi_\nu}(u)$ e $\delta(\pi_\nu) \to 0$ quando $\nu \to \infty$.

Mostremos a equivalência das duas definições de integral no caso em que u é não limitada. Evidentemente basta nos restringirmos ao caso em que u é não negativa. Como já vimos, neste caso u é limite de uma sucessão crescente (u_ν) de função L-integráveis. Como cada u_ν é limitada as suas L-integrais coincidem com as suas integrais, conforme já provamos acima. Se u é L-integrável então existe $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int u_\nu$ e este limite é a L-integral de u, por definição. Mas pelo Teorema 2.12 (Beppo Levi) u é integrável e tem-se $\int u = \lim\limits_{\nu \to \infty} \int u_\nu$. Ou seja, a integral de u no sentido de Lebesgue coincide com a integral de u no sentido de Riesz. Reciprocamente, suponhamos que u é integrável. Como $0 \leq u_\nu \leq u$ para todo ν, vem que $0 \leq \int u_\nu \leq \int u$. Assim a sucessão numérica crescente $\left(\int u_\nu\right)$ é limitada e portanto, tem um limite finito. Decorre daí que u é L-integrável e sua L-integral é igual ao $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int u_\nu$. Aplicando novamente o teorema de Beppo Levi concluiremos que as duas integrais coincidem. $\square$

3.4 Teoremas de Egoroff e Lusin

De posse do conceito de medida dos conjuntos podemos definir outros tipos de convergência para as sucessões de funções.

3.19 Definição. Diremos que uma sucessão (u_ν) de funções mensuráveis definidas em (a,b), não necessariamente limitado, *converge quase uniformemente* para uma função mensurável u em (a,b) se para cada $\varepsilon > 0$ existe um conjunto mensurável E_ε tal que $\mu(E_\varepsilon) \le \varepsilon$ e (u_ν) converge para u uniformemente em CE_ε.

Cabe aqui observar que da definição acima não se deduz a existência de um conjunto de medida nula, fora do qual a convergência é uniforme. O seguinte exemplo esclarece este ponto.

3.20 Exemplo. a) Consideremos a sucessão de funções (u_ν) definidas no intervalo $(0,2)$ da seguinte forma

$$u_\nu(x) = \nu \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu}\right)}(x).$$

Para cada $\varepsilon > 0$, podemos considerar $E_\varepsilon = (0,\varepsilon)$ se $\varepsilon < 1$ e $E_\varepsilon = (0,1)$ se $\varepsilon \ge 1$. Assim, (u_ν) converge uniformemente para zero no complementar de E_ε, logo (u_ν) converge quase uniformemente para zero em $(0,2)$. No entanto não existe um conjunto de medida nula, fora do qual a convergência seja uniforme.

b) A sucessão (u_γ), onde u_ν é definida por $u_\nu(x) = x^\nu$, converge quase uniformemente para a função $u = 0$ em $(0,1)$. De fato, pondo $E_\varepsilon = (1-\varepsilon, 1)$ se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ e $E_\varepsilon = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ se $\varepsilon \ge \frac{1}{2}$ tem-se $\mu(E_\varepsilon) \le \varepsilon$ e (u_ν) converge uniformemente a $u = 0$ em CE_ε.

c) A sucessão (u_ν), onde u_ν é definida em $(0,1)$ por $u_\nu(x) = \sqrt[\nu]{x}$, converge quase uniformemente a $u = 1$ em $(0,1)$. Com efeito, pondo $E_\varepsilon = (0,\varepsilon)$ se $\varepsilon < 1/2$ e $E_\varepsilon = (0,1/2)$ se $\varepsilon \geq 1/2$, tem-se $\mu(E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e (u_ν) converge uniformemente a $u = 1$ em CE_ε.

d) A sucessão (u_ν), onde u_ν é definida em $(1,+\infty)$ por $u_\nu(x) = 1/x^\nu\, u$, converge quase uniformemente para a função $u = 0$. Aqui, $\forall\, \varepsilon > 0$, podemos tomar para E_ε o intervalo $(1, 1+\varepsilon)$.

3.21 Definição. Uma sucessão (u_ν) de funções mensuráveis definidas em (a,b) *converge em medida* para uma função mensurável u em (a,b) quando para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mu(A_{\nu,\varepsilon}) = 0$, onde $A_{\nu,\varepsilon} = \{x \in (a,b); |u_\nu(x) - u(x)| \geq \varepsilon\}$.

3.22 Proposição. *Se (u_ν) converge quase uniformemente para u em (a,b) (não necessariamente limitado), então (u_ν) converge quase sempre para u em (a,b).*

Demonstração: Seja E o conjunto dos pontos de (a,b) onde (u_ν) não converge a u. Vamos mostrar que E tem medida nula. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja F_n tal que $\mu(F_n) < 1/2^n$ e (u_ν) converge uniformemente a u em CF_n. Ponhamos $E_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_k$. Então (E_n) é uma sucessão decrescente de conjuntos mensuráveis tais que $\mu(E_n) < \frac{1}{2^{n-1}}\cdot$ Logo,

$$\Big(\mu \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

e, como $E \subset E_n\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, segue-se que $E \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, donde E é mensurável e $\mu(E) = 0$. □

A recíproca da Proposição 3.22 não é válida nos intervalos ilimitados pois a sucessão $(\chi_{(n,n+1)})$, por exemplo, converge em todo ponto de $(1,+\infty)$ mas não converge quase uniformemente nesse intervalo. Mas é válida nos intervalos limitados como se mostra a seguir.

3.23 Teorema de Egoroff. *Se a sucessão (u_ν) de funções mensuráveis converge quase sempre para uma função u em (a,b) e (a,b) é limitado, então (u_ν) converge quase uniformemente para u em (a,b).*

Demonstração: Seja $B_{m,\nu} = \bigcap\limits_{k\geq\nu} \{x \in (a,b); |u_k(x) - u(x)| < \frac{1}{m}\}$, $m,\nu \in \mathbb{N}$. Então $(B_{m,\nu})$ é, para cada $m \in \mathbb{N}$, uma sucessão crescente de conjuntos mensuráveis. Seja $E = \{x \in (a,b); (u_\nu(x))$ converge a $u(x)\}$. Então E é mensurável, $E \subset \bigcup\limits_\nu B_{m,\nu}$ e $\mu(E) = b-a$. Portanto

$$b - a \geq \lim_{\nu\to\infty} \mu(B_{m,\nu}) = \mu\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_{m,\nu}\Big) \geq \mu(E) = b-a.$$

Logo, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mu(CB_{m,\nu}) = 0$ donde, dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu(m) \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(CB_{m,\nu(m)}) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}\cdot$ Ponhamos $B = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} B_{m,\nu(m)}$. Teremos

$$\mu(CB) = \mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} CB_{m,\nu(m)}\Big) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(CB_{m,\nu(m)}) \leq \varepsilon.$$

Se $k \geq \nu(m)$, então $|u_k(x) - u(x)| < 1/m \;\; \forall\, x \in B_{m,\nu(m)}$ e, como $B \subset B_{m,\nu(m)}$, $|u_k(x) - u(x)| < 1/m \;\; \forall\, x \in B$, isto é, (u_ν) converge uniformemente a u em B. Pondo $E_\varepsilon = CB$ tem-se que E_ε é mensurável, $\mu(E_\varepsilon) = \mu(CB) \leq \varepsilon$ e (u_ν) converge uniformemente a u em CE_ε, isto é, (u_ν) converge quase uniformemente a u em (a,b). $\square$

3.24 Observações: 1) Se E é mensurável, então

(3.10) i) $\mu(E) = \inf\limits_{E\subset G} \mu(G)$, G aberto;

(3.11) ii) $\mu(E) = \sup\limits_{F\subset E} \mu(F)$, F fechado.

i) Com efeito pelo que foi estabelecido na Seção 3.3,

$$\mu(E) = \inf_{\{I_k\}\subset\mathcal{A}} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_k),$$

onde $\mathcal{A}$ é a família dos recobrimentos enumeráveis de E por intervalos abertos. Como $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$ é um conjunto aberto cuja medida é, por iv) da Proposição 3.8, menor que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_k)$, segue-se que $\mu(E) \geq \inf\limits_{E\subset G} \mu(G)$, G aberto. Seja, por outro lado, $E \subset G$, G aberto. Como se sabe, $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_k$, onde os J_k, $k = 1, \ldots$, são intervalos abertos e disjuntos dois a dois. Logo, $\{J_k\} \in \mathcal{A}$ e como, por ii) da Proposição 3.8, $\mu(G) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp}(J_k)$ tem=se $\mu(E) \leq \inf \mu(G)$, G aberto. Logo, $\mu(E) = \inf\limits_{E\subset G} \mu(G)$, G aberto.

ii) Como $\mu(E) + \mu(CE) = b - a$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\mu(E) &= b - a - \mu(CE) = b - a - \inf_{CE\subset G} \mu(G) \\
&= b - a - \inf_{CE\subset G}(b - a - \mu(CG)) = b - a - (b - a - \sup_{CE\subset G}(CG)) \\
&= \sup_{CE\subset G} \mu(CG) = \sup_{CG\subset E} \mu(CG) = \sup_{F\subset E} \mu(F),\ F \text{ fechado.}
\end{aligned}
$$

2) O conjunto B que aparece na demonstração do Teorema de Egoroff pode ser considerado como fechado. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ seja $\nu(m)$ tal que $\mu(CB_{m,\nu(m)}) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$ e $F_{\nu(m)}$ um conjunto fechado tal que $F_{\nu(m)} \subset B_{m,\nu(m)}$ e $\mu(F_{\nu(m)}) > \mu(B_{m,\nu(m)}) - \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \cdot$ O conjunto $F_{\nu(m)}$ existe por (3.11). Então temos

$$
\begin{aligned}
b - a - \mu(B_{m,\nu(m)}) &< \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \\
\mu(B_{m,\nu(m)}) - \mu(F_{\nu(m)}) &< \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}
\end{aligned}
$$

donde $b - a - \mu(F_{\nu(m)}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$, ou seja, $\mu(CF_{\nu(m)}) < \frac{\varepsilon}{2^m} \cdot$ Pondo $B = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_{\nu(m)}$ temos $B \subset B_{m,\nu(m)}$, $\mu(CB) < \varepsilon$ e B é fechado.

A seguinte proposição relaciona convergência quase uniforme e convergência em medida.

3.25 Proposição. *Se uma sucessão (u_ν) converge quase uniformemente para u então ela converge em medida.*

Demonstração: Sejam α e ε números positivos. Então existe um conjunto E_ε tal que $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ e u converge uniformemente em CE_ε. Logo, se ν é suficientemente grande, o conjunto $A_{\nu,\alpha} = \{x \in (a,b); |u_\nu(x) - u(x)| \geq \alpha\}$ está contido em E_ε e portanto $\mu(A_{\nu,\alpha}) < \varepsilon$. Isto mostra que $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mu(A_{\nu,\alpha}) = 0$ e conseqüentemente (u_ν) converge em medida. $\square$

3.26 Proposição. *Se (u_ν) converge em medida para u em (a,b), então existe uma subsucessão de (u_ν) que converge para u quase uniformemente (e portanto, quase sempre).*

Demonstração: Como (u_ν) converge em medida para u. existe um $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{\nu_1,1}) < 1$ e denotemos $A_1 = A_{\nu_1,1}$. Da mesma forma encontramos $\nu_2 > \nu_1$ tal que $\mu(A_{\nu_2,1/2}) < 1/2$ e denotemos $A_2 = A_{\nu_2,1/2}$. Continuando este processo encontramos uma sucessão $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k < \dots$ tal que para cada k, tem-se $\mu(A_k) < \frac{1}{2^{k-1}}$, onde $A_k = \left\{x \in (a,b); |u_{\nu_k}(x) - u(x)| \geq \frac{1}{2^{k-1}}\right\}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe ν' suficientemente grande, tal que

$$\sum_{k=\nu'}^{\infty} \mu(A_k) < \sum_{k=\nu'}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{\nu'-2}} < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Seja $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=\nu'}^{\infty} A_k$. Então, por (3.12), $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$. Resta mostrar que (u_{ν_k}) converge uniformemente em CE_ε. Dado $\delta > 0$, seja $n_0 > \nu'$ um número natural tal que $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \delta$. Então, para todo $k > n_0$ o conjunto A_k está contido em E_ε. Portanto, quaisquer que sejam $x \in CE_\varepsilon$ e $k \geq n_0$ tem-se

$$|u_{\nu_k}(x) - u(x)| < \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{n_0-1}} < \delta.$$

Logo, (u_{ν_k}) converge para u uniformemente em CE_ε. □

Para concluir esta seção, daremos uma caracterização das funções mensuráveis num intervalo (a, b) em termos das funções contínuas.

3.28 Teorema (Lusin). *Uma função* $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *é mensurável se e somente se, para cada* $\varepsilon > 0$, *existe um conjunto fechado* $A \subset (a, b)$ *tal que* $\mu(CA) < \varepsilon$ *e* $u|_A$ *é contínua.*

Demonstração: Suponhamos que u é mensurável e seja (φ_ν) uma sucessão de funções escada convergindo quase sempre para u. O conjunto dos pontos de descontinuidade das φ_ν tem medida nula donde, dado $\varepsilon > 0$ existe, por (3.10), um conjunto aberto G que contém as descontinuidades de todas as φ_ν e $\mu(G) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Além disto, pelo Teorema de Egoroff e a Observação 3.24-2, existe um conjunto fechado B tal que $\mu(CB) < \varepsilon/2$ e (φ_ν) converge uniformemente a u em B. Pondo, então, $A = B \cap CG$ tem-se que A é fechado, $\mu(CA) = \mu(CB \cup G) \leq \mu(CB) + \mu(G) < \varepsilon$, φ_ν é contínua em A, $\nu = 1, \ldots$ e (φ_ν) converge a u uniformemente em A. Logo, u é contínua em A. Reciprocamente, suponhamos que para cada $\varepsilon > 0$ exista um fechado A tal que $\mu(CA) < \varepsilon$ e u é contínua em A. Para cada $k \in \mathcal{N}$ seja A_k fechado tal que $\mu(CA_k) \leq 1/k$ e u contínua em A_k. Definamos $B_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ e $u_k\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ por

$$u_k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in B_k \\ 0 & \text{se} \quad x \in CB_k \end{cases}$$

É claro que as funções u_k são mensuráveis. Mostraremos que a sucessão (u_k) converge quase sempre para u. Observemos inicialmente que $\mu(CB_k) = \mu\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} CA_i\big) \leq \min\limits_{1\leq i\leq k}\{\mu(CA_i)\} \leq \frac{1}{k}$ e portanto $\mu(B_k) = (b - a) - \mu(CB_k) \geq (b - a) - \frac{1}{k}\cdot$ E como a sucessão (B_k) é crescente no sentido da inclusão, segue-se que

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \lim_{k\to\infty} [\mu(B_k)] \geq b - a$$

e portanto,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = b - a. \tag{3.13}$$

Seja E o conjunto dos pontos $x \in (a,b)$ tais que $u_k(x)$ não converge para $u(x)$. Então $x \notin B_k$ qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. Logo $x \in C\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k\Big)$, isto é, $E \subset C\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k\Big)$. Mas, por (3.13) segue-se $\mu(E) = 0$. $\square$

O teorema de Lusin fornece-nos outra maneira de definir a integral de Lebesgue. Primeiro definimos função mensurável no intervalo (a,b) pela caracterização dada pelo teorema de Lusin; a seguir definimos conjunto mensurável como aquele que possui função característica mensurável no sentido recém definido. Para definir integral consideramos inicialmente as integrais das funções que são contínuas em conjuntos fechados e a seguir, tomando-se os limites definem-se as funções integráveis.

Exercícios

3.1 Seja $u\colon (0,+\infty)$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ e $u_n = u/n$. Mostre que (u_n) converge em todo ponto de $(0,+\infty)$ mas não converge quase uniformemente nesse intervalo.

3.2 Mostre que o teorema de Egoroff é válido se supusermos as funções u_n definidas num conjunto mensurável E de medida finita, convergindo quase sempre em E para uma função u.

3.3 Mostre que a sucessão $\mathcal{X}_{(\nu,\nu+1)}$ converge a zero em todo ponto de $(1,+\infty)$ mas não converge em medida.

3.4 Mostre que se (u_ν) converge em medida a u, então toda subsucessão de (u_ν) também converge em medida a u.

3.5 Mostre que se (u_ν) converge a u quase sempre em $(0,\infty)$ então existe uma sucessão (E_ν) de conjuntos $E_\nu \subset (0,\infty)$, $\nu = 1,\ldots,$ e um conjunto $A \subset (0,\infty)$ tais que $A \cup \cup_\nu E_\nu = (0,\infty)$, $\mu(A) < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ dado, e (u_ν) converge uniformemente a u em cada conjunto E_ν.

3.6 Mostre que o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, e o Lema de Fatou continuam válidos se a convergência quase sempre é substituida pela convergência em medida.

3.7 Seja (u_n) uma sucessão de funções integráveis e não negativas em (a,b) que converge quase sempre em (a,b) para uma função integrável u e que satisfaz a condição

$$\int_a^b u = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n\,.$$

Mostre que

$$\int_E u = \lim_{n\to\infty} \int_E u_n\,.$$

para todo $E \subset (a,b)$ mensurável.

4

Os Espaços L^p. Funções de Várias Variáveis

4.1 Os Espaços L^p; o Teorema de Riesz-Fischer

No espaço vetorial real $L(a, b)$ identificaremos as funções que diferem apenas por um conjunto de medida nula, isto é, diremos que $u = v$ se $u(x) = v(x)$ quase sempre em (a, b), o que é possível visto que a relação $u = v$ definida desse modo é uma relação de equivalência em $L(a, b)$ compatível com as operações de $L(a, b)$ no sentido que

$$u_1 = u \quad \text{e} \quad v_1 = v \Rightarrow u_1 + v_1 = u + v$$

e

$$u_1 = u \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u_1 = \lambda u.$$

Com esta identificação obteremos um novo espaço vetorial que denotaremos por $L^1(a, b)$. Assim, os elementos de $L^1(a, b)$ não são, a rigor, funções e sim classes de equivalência de funções. Todavia é usual considerar-se, nas aplicações, os elementos de $L^1(a, b)$ como funções em $L(a, b)$ tomando-se o cuidado de não fazer distinção entre duas funções que são iguais quase empre em (a, b). De um modo geral temos:

4.1 Definição. Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Representaremos por $L^p(a, b)$ a classe de todas as funções reais mensuráveis

u, definidas em (a,b) tais que $|u|^p$ é integrável.

Ainda aqui estamos identificando as funções que diferem entre si nos pontos de um conjunto de medida nula.

Simples é verificar que $L^p(a,b)$ é um espaço vetorial real (ver Exercício 4.1).

4.2 Observação: Se em lugar do intervalo aberto (a,b), tivermos um conjunto mensurável E de medida não nula (podendo ser um conjunto não limitado), a definição dos espaços $L^p(E)$ é feita de maneira inteiramente análoga a que fizemos no caso de $L^p(a,b)$. Assim, quando não houver necessidade de se fazer referência ao conjunto E onde as funções estão definidas, escreveremos simplesmente L^p em lugar de $L^p(E)$.

4.3 Observação: Note que é imprescindível, na Definição 4.1, exigirmos que as funções u de L^p sejam mensuráveis pois, se esta exigência não for feita, não podemos garantir que de $u \in L^p$, $v \in L^q$, resulta que $|uv| \in L^1$ como aplicação da Proposição 2.24. Assim, muitas propriedades fundamentais do espaço $L^p(a,b)$ não seriam válidas.

Em L^p podemos definir uma norma, associando a cada $u \in L^p$ o número real

$$||u||_p = \Big[\int |u|^p \Big]^{1/p}. \tag{4.1}$$

Para provarmos que $|| \, ||_p$, definida por (4.1), é de fato uma norma em L^p teremos que verificar o seguinte:

i) $||u||_p \geq 0$, $\forall\, u \in L^p$ e $||u||_p = 0$ se e somente se $u = 0$, no sentido que $u(x) = 0$ quase sempre.

ii) $||\lambda u||_p = |\lambda| \, ||u||_p$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in L^p$.

iii) $||u+v||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$, $\forall\, u, v \in L^p$.

A primeira parte de (i) é trivial e a segunda é uma decorrência do Corolário 2.14. (ii) é de verificação imediata e (iii) é a chamada

Desigualdade de Minkowski cuja demonstração será o nosso próximo objetivo.

Para cada $p > 1$ o número $p/(p-1)$ será denominado *índice conjugado* de p e será denotado por q. Desta forma temos a relação $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. No caso $p = 1$ convenciona-se que o seu conjugado é $q = +\infty$. Observe que $p = q$ se e só se $p = 2$, ou seja, o índice 2 é o único que é autoconjugado.

4.4 Proposição (Desigualdade de Young). *Se a, b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.2}$$

sempre que $1 < p < \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração: De fato, sendo a função logarítmica côncava, obtém-se:

$$\log\left(\frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q\right) \geq \frac{1}{p}\,\log a^p + \frac{1}{q}\,\log b^q = \log(ab).$$

Notando-se que ela é também crescente, resulta:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\cdot$$

□

Se duas funções u, v são integráveis não podemos afirmar que o produto uv seja uma função integrável. Entretanto, temos o seguinte resultado:

4.5 Proposição (Desigualdade de Hölder). *Se $u \in L^p$ e $v \in L^q$ então $uv \in L^1$ e tem-se a desigualdade*

$$\int |uv| \leq ||u||_p \, ||v||_q \,, \tag{4.6}$$

onde $1 < p < \infty$.

Demonstração: Seja $m = ||u||_p$, $n = ||v||_q$, $a(t) = \frac{|u(t)|}{m}$ e $b(t) = \frac{|v(t)|}{n}$ · Então, para cada t tem-se, pela desiguldade de Young que

$$\frac{|u(t)v(t)|}{mn} \leq \frac{1}{p}\left(|u(t)|\frac{1}{m}\right)^p + \frac{1}{q}\left(|v(t)|\frac{1}{n}\right)^q. \tag{4.7}$$

Como $|u|^p$ e $|v|^q$ são integráveis e uv é mensurável segue-se da Proposição 2.24 que uv é integrável e portanto $|uv|$ também. Por integração obtém-se de (4.7) que

$$\frac{1}{mn}\int |uv| \leq \frac{1}{p}\left(\frac{1}{m}||u||_p\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{1}{n}||v||_q\right)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4.8}$$

De (4.8) obtém-se (4.6). □

4.6 Proposição (Desigualdade de Minkowski). *Se $u, v \in L^p$ então*

$$|u+v||_p \leq ||u||_P + ||v||_p\,, \tag{4.9}$$

onde $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: O caso $p = 1$ é uma conseqüência direta da desigualdade $|u + v| \leq |u| + |v|$. Suponhamos $p > 1$ e consideremos a desigualdade

$$|u+v|^p = |u+v|\,|u+v|^{p-1} \leq (|u| + |v|)|u+v|^{p-1}. \tag{4.10}$$

Como L^p é espaço vetorial, $u+v \in L^p$ e portanto $\left(|u+v|^{p-1}\right)^q = |u+v|^p$ é integrável. Logo, $|u + v|^{p-1} \in L^q$. Consideremos $h = |u + v|^{p-1}$. Então, pela Proposição 4.5, uh e vh são integráveis. Além disso (4.10) pode ser escrita na forma:

$$|u+v|^p \leq |uh| + |vh| \tag{4.11}$$

e portanto, por integração obtemos

$$\int |u+v|^p \leq \int |uh| + \int |vh| \tag{4.12}$$

e pela desigualdade de Hölder tem-se

$$\int |u+v|^p \leq \big(||u||_p + ||v||_p\big)||h||_q\,. \tag{4.13}$$

Se $||h||_q = 0$, tem-se $||u+v||_p = 0$ e a desigualdade (4.9) é trivial. Se $||h||_q \neq 0$, dividimos ambos os membros de (4.13) por $||h||_q = \big(\int |h|^q\big)^{1/q} = \big[|u+v|^{q(p-1)}\big]^{1/q} = \big(\int |u+v|^p\big)^{1/q}$ e obtemos $\big(\int |u+v|^p\big)^{1-(1/q)} \leq ||u||_p + ||v||_p$ e daí segue-se da desigualdade (4.9) uma vez que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}\cdot$ □

Sendo L^p um espaço vetorial normado podemos introduzir em L^p uma métrica definindo a distância entre duas funções u e v de L^p por $||u-v||_p$. Com isto, L^p torna-se um espaço métrico e, desse modo, tem sentido falar de convergência de uma sucessão (u_k) de funções de L^p. Explicitamente, uma sucessão (u_k) de funções de L^p *converge* para uma função $u \in L^p$ se $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_k - u||_p = 0$. Este tipo de convergência é conhecido como *convergência na norma* de L^p ou *convergência em média de ordem* p ou *convergência forte* em L^p.

Se (u_ν) converge forte $L^p(a,b)$, então ela converge em medida para a mesma função u. Isto é uma simples conseqüência da desigualdade

$$\int_a^b |u_\nu(x) - u(x)|^p\,dx \geq \int_{A_{\nu,\varepsilon}} |u_\nu(x) - u(x)|^p\,dx \geq \varepsilon^p\,\mu(A_{\nu,\varepsilon}),$$

sendo $A_{\nu,\varepsilon}$ os conjuntos da Definição 3.21. Portanto, da Proposição 3.27, existe uma subsucessão de (u_ν) que converge quase sempre em (a,b) para o mesmo limite.

Simples é mostrar que toda sucessão convergente em L^p é uma sucessão de Cauchy em L^p (ver Exercício 4.8). A recíproca deste resultado é verdadeira e será demonstrada a seguir.

4.7 Teorema (Riesz-Fischer). *Se (u_k) é uma sucessão de Cauchy em L^p então (u_k) é convergente em L^p.*

Demonstração: Seja (u_k) uma sucessão de Cauchy em L^p. Devemos provar que existe uma função $u \in L^p$ tal que (u_k) converge para u na norma de L^p.

Sendo (u_k) uma sucessão de Cauchy em L^p, existe um índice k_1 tal que $||u_k - u_s||_p < 1/2$ para todo $k, s \geq k_1$. Pela mesma razão existe um outro índice k_2, que pode ser escolhido de modo que $k_1 < k_2$, tal que $||u_k - u_s||_p < 1/4$ para todo $k, s \geq k_2$ e assim, sucessivamente, obteremos uma sucessão de índices (k_n) tais que $k_{n+1} > k_n$ e $||u_k - u_s||_p < \frac{1}{2^n}$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ e todo $k, s \geq k_n$, onde, por conveniência de notação, definimos $k_0 = 1$. Deste modo temos uma subsucessão $\left(u_{k_n}\right)$ de (u_k) tal que para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ tem-se

$$||u_{k_{n+1}} - u_{k_n}||_p < \frac{1}{2^n} \cdot \tag{4.14}$$

Se $E \subset \mathbb{R}$ é o intervalo onde estão definidas as u_k, seja $I \subset E$ um intervalo de amplitude finita. Então, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_I |u_{k_{n+1}} - u_{k_n}| = \int_I |u_{k_{n+1}} - u_{k_n}|\chi_I \leq (\text{amp}(I))^{1/q} \, ||u_{k_{n+1}} - u_{k_n}||_p \, .$$

Levando em conta (4.14) tem-se

$$\int_I |u_{k_{n+1}} - u_{k_n}| \leq \left[\text{amp}(I)\right]^{1/q} \frac{1}{2^n} \cdot \tag{4.15}$$

Da desigualdade (4.15) e do teorema de Beppo Levi conclui-se que a série de funções integráveis $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_{k_{n+1}} - u_{k_n}|$ é convergente quase sempre em I e portanto a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (u_{k_{n+1}} - u_{k_n})$ é convergente quase sempre em I. Como a $(n-1)$-ésima soma parcial desta série é $u_{k_n} - u_{k_0}$ e como o intervalo E é uma união enumerável de intervalos de amplitude finita (mesmo que E seja não limitado), concluímos que a sucessão (u_{k_n}) converge quase sempre em E para uma função mensurável u.

Portanto, para cada k fixo, a sucessão (w_n), onde $w_n = |u_k - u_{k_n}|^p$, converge quase sempre em E para a função $|u_k - u|^p$. Se $r \in \mathbb{N}$, quando $k > k_r$ e $n > r$ obtemos, pela própria construção dos índices k_n que

$$\int w_n = \int |u_k - u_{k_n}|^p = ||u_k - u_{k_n}||_p^p \leq \left(\frac{1}{2^r}\right)^p = \frac{1}{2^{pr}} \,. \tag{4.16}$$

Logo, pelo Lema de Fatou (Teorema 2.19) aplicado à sucessão (w_n), tem-se que $|u_k - u|^p$ é integrável e

$$\int |u_k - u|^p \leq \frac{1}{2^{pr}} \quad \text{para todo} \quad k > k_r \,. \tag{4.17}$$

Portanto $(u_k - u) \in L^p$ e conseqüentemente $u = u_k - (u_k - u)$ é uma função de L^p. Além disso, de (4.17) obtém-se que $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_k - u||_p = 0$. $\square$

Um espaço métrico é dito completo quando toda sucessão de Cauchy nesse espaço for convergente. Um espaço vetorial normado que é completo, relativamente à métrica induzida pela norma, chama-se *espaço de Banach*. Portanto, o Teorema 4.7 nos diz que L^p é um espaço de Banach.

Mostraremos agora que toda função de L^p pode ser aproximada por uma sucessão de funções escada na norma de L^p. Antes, porém, demonstraremos o seguinte:

4.8 Lema. *Se u é uma função integrável limitada então u pertence a L^p, onde $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: De fato se M é uma constante tal que $|u| \leq M$, tem-se $|u|^p = |u|^{p-1} \leq M^{p-1}|u|$. Logo, pela Proposição 2.24 segue-se que $|u|^p$ é integrável. $\square$

4.9 Proposição. *Se $u \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe uma função escada φ tal que $||u - \varphi||_p < \varepsilon$.*

Demonstração: Observemos que em virtude do lema anterior toda função escada é uma funçao de L^p, qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.

Seja $u \in L^p$, então u^+ e u^- também pertencem a L^p, pois $u^+ = \frac{1}{2}(u + |u|)$ e $u^- = u^+ - u$. Em vista disto podemos supor, sem perda de generalidade, que u seja não negativa. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $v_n(x) = (n \wedge nu^p \wedge u)(x) = \min\{n, n[u(x)]^p, u(x)\}$ é integrável porque $0 \leq v_n \leq nu^p$ e também $v_n \in L^p$ pois $v_n^p \leq u^p$. Além disso a sucessão (w_n), onde $w_n = (u - v_n)^p$, converge quase sempre para zero e é uma sucessão decrescente. Logo, pelo teorema de Beppo Levi temos que

$$\lim_{n\to\infty} ||u - v_n||_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |u - v_n|^p = 0. \tag{4.18}$$

Assim, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u - v_k||_p < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{4.19}$$

Uma vez que $0 \leq v_k \leq k$, o Exercício 2.1 nos garante a existência de uma função escada φ, tal que

$$|v_k - \varphi| \leq k \quad \text{e} \quad \int |v_k - \varphi| < \frac{\varepsilon^p}{2^p\, k^{p-1}} \cdot \tag{4.20}$$

Em vista de (4.20) temos:

$$||v_k - \varphi||_p^p = \int |v_k - \varphi|^p = \int |v_k - \varphi|^{p-1}\, |v_k - \varphi| \leq k^{p-1} \int |v_k - \varphi| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

E portanto,

$$||v_k - \varphi||_p < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{4.21}$$

De (4.19) e (4.21) e da desigualdade de Minkowski temos:

$$||u - \varphi||_p \leq ||u - v_k||_p + ||v_k - \varphi||_p < \varepsilon.$$

$\square$

A proposição anterior nos diz que o espaço das funções escada é denso em L^p relativamente à norma $||\ ||_p$, qualquer que seja

$1 \leq p < \infty$. Com este resultado pode-se demonstrar que o espaço $C(a,b)$ das funções contínuas no intervalo (a,b) é denso em $L^p(a,b)$ relativamente à norma $|| \; ||_p$ qualquer que seja $1 \leq p < \infty$. (Veja Exercícios 4.9 e 4.10).

A Proposição 4.9 também nos permite demonstrar o seguinte resultado que nos será útil futuramente.

4.10 Proposição. *Seja $u \in L(a,b)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $E \subset (a,b)$ é mensurável e $\mu(E) < \delta$ tem-se $\left| \int_E u \right| < \varepsilon$. Isto é, $\int_E u$ tende a zero quando $\mu(E)$ tende a zero, E variando na família dos subconjuntos mensuráveis de (a,b).*

Demonstração: A existência da integral $\int_E u$ já foi estabelecida na Proposição 3.12. Consideremos uma função escada φ tal que $\int_a^b |u - \varphi| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Isto é possível em virtude da Proposição 4.9. Seja $M > 0$ tal que $|\varphi| < M$ e seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}\cdot$ Então, teremos:

$$\left| \int_E u \right| \leq \int_E |u| \leq \int_a^b |u - \varphi|_{\chi_E} + \int_a^b |\varphi| \chi_E < \frac{\varepsilon}{2} + M\,\mu(E) < \varepsilon$$

se $\mu(E) < \delta$. □

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Um produto interno sobre V é uma aplicação $a \colon V \times V \to R$ satisfazendo as seguintes condições:

i) $a(u+v,w) = a(u,w) + a(v,w), \quad \forall\, u,v,w \in V.$

ii) $a(\lambda u, v) = \lambda a(u,v), \quad \forall\, u,v \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$

iii) $a(u,v) = a(v,u), \quad \forall\, u,v \in V.$

iv) $a(v,v) > 0 \quad \text{se} \quad v \neq 0.$

O número $a(u,v)$ é dito *produto interno* de u por v e será aqui denotado por $\langle u, v \rangle$. Um exemplo de espaço vetorial com produto interno é o espaço $\mathbb{R}^n$ das n-uplas ordenadas de números reais munidos do produto escalar usual.

Num espaço vetorial V com produto interno pode-se definir uma norma mediante a fórmula

$$||u|| = \langle u, u \rangle^{1/2}. \tag{4.22}$$

Um espaço vetorial normado V denomina-se espaço de Hilbert se V é um espaço de Banach e está definido em V um produto interno tal que a norma de V é obtida mediante a fórmula (4.22).

4.11 Observação: Os espaços L^2 são espaços de Hilbert. Pois em L^2 podemos definir um produto interno por $\langle u, v \rangle = \int uv$. Portanto, em L^2 pode ser usada toda teoria concernente aos espaços de Hilbert. Em L^2 a desigualdade de Hölder é conhecida como *desigualdade de Schwarz.*

Está fora dos propósitos deste texto, entrar em detalhes sobre a teoria dos espaços de Hilbert. O leitor interessado em iniciar-se neste importante assunto poderá consultar [10].

4.2 Os Espaços L^∞

Até aqui tomamos conhecimento dos espaços L^p com $1 \leq p < \infty$. Nesta seção iremos estudar o caso $p = \infty$ que num certo sentido, como iremos ver, é um caso limite.

Um número real λ é dito *majorante essencial* de uma função u quando $u(x) \leq \lambda$ quase sempre, isto é, quando o conjunto dos pontos x para os quais $u(x) > \lambda$ tem medida nula. É claro que se λ é um majorante essencial de u então qualquer número maior que λ também o é.

Seja A o conjunto de todos os majorantes essenciais de uma função u. Define-se o *supremo essencial* de u, e denota-se por supess u, como sendo o ínfimo do conjunto A, isto é,

$$\text{supess } u = \inf A. \tag{4.23}$$

Observemos que supess u pode não ser finito; basta para isto que se tenha $A = \varnothing$ ou $A = \mathbb{R}$. Se $A = \varnothing$ convencionaremos que supess $u = +\infty$ e se $A = \mathbb{R}$ escreveremos que supess $u = -\infty$.

4.12 Proposição. *Seja u uma função real e $L = \operatorname{supess} u$. Então L possui as seguintes propriedades:*

i) *$u(x) \leq L$ quase sempre.*

ii) *Se L é finito, para cada $\varepsilon > 0$ existe um conjunto B de medida positiva tal que $u(x) > L - \varepsilon$ para todo $x \in B$.*

Demonstração: Seja A como definido acima. Então $L = \inf A$. Se $L = +\infty$ então $u(x) \leq L$ para todo x e portanto $u(x) \leq L$ quase sempre. Se $L \neq +\infty$ então $A \neq \varnothing$ e por definição de ínfimo existe uma sucessão (λ_n) de elementos de A tal que $L = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$ (mesmo no caso $L = -\infty$). Para cada n seja F_n o conjunto dos pontos x para os quais $u(x) > \lambda_n$. Pela definição de majorante essencial tem-se que a medida de F_n é nula e portanto $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ também tem medida nula. Se x não pertence a F então $u(x) \leq \lambda_n$ para todo n e portanto $u(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = L$. Portanto $u(x) \leq L$ quase sempre, ficando provado o item (i). Suponhamos, agora, que não exista um conjunto B nas condições do item (ii). Neste caso a coleção dos pontos x tais que $u(x) > L - \varepsilon$ teria medida nula e conseqüentemente $L - \varepsilon$ seria um elemento de A. Como $L > L - \varepsilon$ seguir-se-ia que $L \neq \inf A$ o que contradiz a definição de L. $\square$

Diz-se que uma função u é *essencialmente limitada* quando supess $|u|$ é finito.

4.13 Proposição. *Seja u uma função mensurável, essencialmente limitada, definida num intervalo limitado (a,b). Então*

i) $u \in L^p(a,b)$ *para todo* $p \geq 1$.

ii) $\text{supess}\,|u| = \lim_{p\to\infty} ||u||_p$.

Demonstração: Seja $M =$ supess $|u|$. Então $|u(x)| \leq M$ quase sempre (pela proposição anterior). Portanto, para cada $p \geq 1$, tem-se $|u(x)|^p \leq M^p$ quase sempre, e pelo Corolário 2.26 segue-se que $|u|^p$ é integrável e como u é mensurável (por hipótese) conclui-se que $u \in L^p(a,b)$, ficando provado o item (i). Do fato de que $|u(x)|^p \leq M^p$ quase sempre em (a,b) decorre ainda que

$$(4.24) \qquad ||u||_p = \Big[\int_a^b |u|^p\Big]^{1/p} \leq \big[M^p(b-a)\big]^{1/p} = M(b-a)^{1-p}.$$

Como $\lim_{p\to\infty}(b-a)^{1/p} = 1$ decorre de (4.24) que

$$(4.25) \qquad \limsup_{p\to\infty} ||u||_p \leq M.$$

Por outro lado, pela Proposição 4.12, existe, para cada $\varepsilon > 0$, um conjunto B tal que $r = \mu(B) > 0$ e $|u(x)| > M - \varepsilon$ para todo x em B. Portanto

$$(4.26) \qquad ||u||_p = \Big[\int_a^b |u|^p\Big]^{1/p} \geq \Big[\int_B |u|^p\Big]^{1/p} \geq \big[(M-\varepsilon)^p\, r\big]^{1/p} = (M-\varepsilon)r^{1/p}.$$

Decorre de (4.26) que $\liminf_{p\to\infty} ||u||_p \geq M - \varepsilon$ e conseqüentemente, como ε é arbitrário,

$$(4.27) \qquad \liminf_{p\to\infty} ||u||_p \geq M.$$

De (4.25) e (4.27) obtém-se que $M = \lim_{p\to\infty} ||u||_p$. □

4.14 Definição. O conjunto de todas as funções mensuráveis u essencialmente limitadas em (a,b) é representado por $L^\infty(a,b)$ e para todo $u \in L^\infty(a,b)$ define-se a norma de u por

$$||u||_\infty = \text{ supess } |u|. \tag{4.28}$$

Naturalmente, esta notação é motivada pela Proposição 4.13. Simples é verificar que $L^\infty(a,b)$ é um espaço vetorial e a expressão (4.28) define, realmente, uma norma sobre $L^\infty(a,b)$, desde que identifiquemos as funções que diferem apenas nos pontos de um conjunto de medida nula. Também não apresentam dificuldades as demonstrações das desigualdades de Hölder e Minkowski para o caso $p = \infty$. O teorema de Riesz-Fischer também é válido em $L^\infty(a,b)$ e portanto $L^\infty(a,b)$ é um espaço de Banach.

4.3 Convergência fraca nos espaços L^p

Suponhamos que (u_n) seja uma sucessão de funções em L^p que converge em média para uma função $u \in L^p$, onde $1 \leq p < \infty$. Então (u_n) satisfaz as seguintes condições:

i) Para toda função $v \in L^{q'}$ tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \int u_n v = \int uv$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n||_p = ||u||_p$.

A demonstração destas condições não apresenta dificuldade e deixaremos a cargo do leitor. (Ver Exercício 4.13).

Diremos que a sucessão (u_n) *converge fracamente* para u em L^p se (u_n) satisfaz a condição (i) acima. Portanto as sucessões que convergem em média (ou fortemente) em L^p são sucessões fracamente convergentes. Porém, a recíproca não é verdadeira, conforme mostra o seguinte exemplo.

4.15 Exemplo. Seja $1 \leq p < +\infty$ e consideremos em $L^p(0,2)$ a sucessão (u_n) onde $u_n = \sqrt[p]{n}\chi_{(1/n,2/n)}$. Então, $u_n \to 0$ fracamente em

$L^p(0,2)$, conforme Exercício 4.15. No entanto, a convergência não é forte, pois, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$||u_n||_p^p = \int_{1/n}^{2/n} \left(\sqrt[p]{n}\right)^p dx = 1 \quad \text{e portanto} \quad ||u_n||_p = 1.$$

Todavia, se uma sucesão (u_n) de funções de L^p satisfaz as condições (i) e (ii) ela converge fortemente para u em L^p, conforme foi demonstrado por F. Riesz em [15].

Mostra-se que o limite fraco em L^p é único, no sentido de que se (u_n) é uma sucessão de funções de L^p que converge fracamente para as funções v e w de L^p, então $v = w$ quase sempre.

Um outro resultado útil é o seguinte: se (u_n) é uma sucessão de funções de L^p $(1 < p < \infty)$ limitada na norma de L^p, isto é, tal que existe uma constante C para a qual $||u_n||_p \leq C$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então (u_n) contém uma subsucessão fracamente convergente em L^p.

Os resultados acima e muitos outros a respeito da convergência fraca em L^p podem ser obtidos como casos particulares dentro de uma teoria mais geral (sem, no entanto, ser muito mais difícil) a respeito de convergência fraca em espaços de Banach. Devido ao caráter introdutório deste texto, limitamo-nos apenas em citar aqui os resultados principais. O leitor interessado no assunto poderá consultar [10] ou [16], por exemplo, a este respeito.

Encerraremos esta seção com a demonstração de um teorema devido a W.A. Strauss [20], que tem aplicação no estudo das equações diferenciais parciais não lineares e que pode ser encontrado, numa forma um pouco mais geral que aqui, em [11].

4.16 Teorema (Strauss). *Seja (u_n) uma sucessão de funções reais mensuráveis num intervalo limitado (a,b). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam F_n e G_n funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que as funções compostas $F_n \circ u_n$ e $G_n \circ u_n$ sejam mensuráveis em (a,b). Suponhamos que:*

(a) $(F_n \circ u_n)$ *converge quase sempre em* (a, b) *para uma função* v.

(b) *Existe uma constante* C *tal que* $\int_a^b (|F_n \circ u_n|\, |G_n \circ u_n|)\, dx < C$ *para todo* n.

(c) *Para cada* $M > 0$ *existe um* $N > 0$ (*independente de* n) *tal que para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde se verifica a desigualdade* $|G_n(x)| \leq M$, *tem-se necessariamente* $|F_n(x)| \leq N$, *exceto por um número finito de índices* n.
Então

(d) $v \in L^1(a, b)$.

(e) $(F_n \circ u_n)$ *converge para* v *na norma de* $L^1(a, b)$.

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos o conjunto Ω_n definido do seguinte modo:

$$\Omega_n = \big\{x \in (a, b);\ |G_n(u_n(x))| \leq 1\big\}.$$

Seja $\Omega_n' = (a, b) - \Omega_n$. Então, para todo $x \in \Omega_n'$ tem-se $|G_n(u_n(x))| > 1$ e portanto,

$$|F_n(u_n(x))| \leq |G_n(u_n(x))|\, |F_n(u_n(x))|,$$

donde se obtém, pela hipótese (b), que

$$\int_{\Omega_n'} |F_n(u_n(x))|\, dx < C \tag{4.29}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela hipótese (c) existe um $N > 0$, independente de n, tal que para todo $x \in \Omega_n$ tem-se $|F_n(u_n(x))| \leq N$, exceto por um número finito de índices n. Portanto,

$$\int_{\Omega_n} |F_n(u_n(x))|\, dx \leq N\mu(\Omega_n) \leq N(b - a). \tag{4.30}$$

De (4.29) e (4.30) resulta que

$$\int_a^b |F_n(u_n(x))|\, dx \le C + N(b-a), \tag{4.31}$$

exceto para um número finito de índices n, isto é, a sucessão das integrais de $|F_n \circ u_n|$ é limitada. Como, pela hipótese (a), $|v|$ é limite quase sempre de $(|F_n \circ u_n|)$, obtém-se pelo lema de Fatou que $|v|$ é integrável em (a,b), ficando provado (d), uma vez que v é mensurável (pois é limite quase sempre de uma sucessão de funções mensuráveis). Para completar a demonstração, observemos que para cada $\delta > 0$ o Teorema de Egoroff nos assegura a existência de um conjunto fechado $E \subset (a,b)$ tal que $\mu(CE) < \delta$ e $(F_n \circ u_n)$ converge uniformemente para v em E. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |F_n(u_n(x)) - v(x)|\, dx = 0.$$

Resta-nos demonstrar que $\int_{CE} |F_n(u_n(x)) - v(x)|\, dx$ também converge para zero quando $n \to \infty$. Inicialmente observemos que

$$\int_{CE} |F_n(u_n(x)) - v(x)|\, dx \le \int_{CE} |F_n(u_n(x))|\, dx + \int_{CE} |v(x)|\, dx. \tag{4.32}$$

Sendo v integrável e $\mu(CE) < \delta$ resulta que, dado $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\int_{CE} |v(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.33}$$

se δ é suficientemente pequeno (ver Proposição 4.10). Consideremos $M = \frac{4C}{\varepsilon}$, onde C é a constante da hipótese (b). Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos o conjunto

$$E_n = \big\{x \in CE;\ |G_n(u_n(x))| \le M\big\}$$

e denotemos por $E'_n = CE - E_n$. Sobre E'_n tem-se

$$\int_{E'_n} |F_n(u_n(x))|\, dx \leq \int_{E'_n} \frac{|G_n(u_n(x))|}{M} |F_n(u_n(x))|\, dx =$$

$$= \frac{1}{M} \int_{E'_n} |G_n(u_n(x)) F_n(u_n(x))|\, dx < \frac{C}{M} = \frac{\varepsilon}{4} \cdot \tag{4.34}$$

Sobre E_n tem-se, pela hipótese (c), que $|F_n(u_n(x))| \leq N$ para algum $N > 0$ (independente de n), exceto por um número finito de índices n. Logo, tomando-se $\delta < \frac{\varepsilon}{4N}$ e n suficientemente grande, tem-se

$$\int_{E_n} |F_n(u_n(x))|\, dx \leq N\mu(E_n) < N\delta < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \tag{4.35}$$

De (4.33), (4.34) e (4.35) resulta que

$$\int_{CE} |F_n(u_n(x)) - v(x)|\, dx < \varepsilon$$

para $\delta < \frac{\varepsilon}{4N}$ e n suficientemente grande. □

4.17 Corolário. *Seja $1 < p < \infty$ e (u_n) uma sucessão de funções em $L^p(a,b)$ tais que $||u_n||_p \leq C$ para todo n, onde C é uma constante e (a,b) é um intervalo limitado. Se $u_n \to u$ quase sempre em (a,b) então $u \in L^p(a,b)$ e $u_n \to u$ fracamente em $L^p(a,b)$. Além disso, se $1 \leq r < p$ tem-se que $u_n \to u$ fortemente em $L^r(a,b)$.*

Demonstração: Como $u_n \to u$ quase sempre e as u_n são mensuráveis por pertencerem a $L^p(a,b)$ decorre que u é mensurável. Além disso $|u_n|^p \to |u|^p$ quase sempre. Mas, por hipótese, $\int_a^b |u_n|^p = ||u_n||_p^p \leq C^p$. Segue-se, então, do lema de Fatou que $|u|^p$ é integrável e portanto $u \in L^p(a,b)$. Pela desigualdade de Minkowski temos que

$$||u_n - u||_p \leq ||u_n||_p + ||u||_p \leq C + ||u||_p = K \tag{4.36}$$

onde K é uma constante independente de n.

Se $1 \leq r < p$, então $u \in L^r(a,b)$ uma vez que estamos supondo (a,b) limitado (veja Exercício 4.5). Provemos que $u_n \to u$ fortemente em $L^r(a,b)$. Para isto, consideremos $F_n(x) = x$ e $G_n(x) = x^{(p-r)/r}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. As funções F_n e G_n são mensuráveis e se definirmos, para cada n, $v_n = |u_n - u|^r$ teremos que as v_n são mensuráveis e

(a) $F_n \circ v_n = |u_n - u|^r \to 0$ quase sempre em (a,b).

(b) $\int_a^b |F_n \circ v_n|\,|G_n \circ v_n| = \int_a^b |u_n - u|^p = ||u_n - u||_p^p \leq K^p$.

(c) Se $|G_n(x)| = |x|^{(p-r)/r} < M$ então $|F_n(x)| = |x| < M^{r/(p-r)} = N$.

Resulta do teorema de Strauss que $|u_n - u|^r \to 0$ em $L^1(a,b)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |u_n(x) - u(x)|^r\, dx = 0.$$

Isto equivale a dizer que $(u_n - u) \to 0$ em $L^r(a,b)$ ou seja $u_n \to u$ fortemente em $L^r(a,b)$. Resta-nos provar que $u_n \to u$ fracamente em $L^p(a,b)$. Observemos inicialmente que como $u_n \to u$ fortemente em $L^r(a,b)$ se $1 \leq r < p$, tem-se que $u_n \to u$ fracamente em $L^r(a,b)$. Fixemos r tal que $1 < r < p$ e sejam s e q os índices conjugados de r e p, respectivamente. Seja v uma função arbitrária em $L^q(a,b)$. Devemos provar que $\int_a^b v(u_n - u) \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma função escada $w \in L^q(a,b)$ tal que

$$||v - w||_q < \frac{\varepsilon}{2K}, \tag{4.37}$$

de acordo com a Proposição 4.9. Mas sendo w uma função escada tem-se que $w \in L^s(a,b)$ e portanto

$$\left| \int_a^b w(u_n - u) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.38}$$

para todo n suficientemente grande, porque $u_n \to u$ fracamente em $L^r(a,b)$. Como

$$\int_a^b v(u_n - u) = \int_a^b (v - w)(u_n - u) + \int_a^b w(u_n - u),$$

tem-se

$$\left|\int_a^b v(u_n - u)\right| \leq \left|\int_a^b (v-w)(u_n-u)\right| + \left|\int_a^b w(u_n-u)\right|. \tag{4.39}$$

Pela desigualdade de Hölder e levando-se em conta (4.36) e (4.37) tem-se

$$\left|\int_a^b (v-w)(u_n-u)\right| \leq ||v-w||_q \, ||u_n-u||_p < K\,\frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}\,\cdot \tag{4.40}$$

De (4.38), (4.39) e (4.40) obtém-se, finalmente, que

$$\left|\int_a^b v(u_n-u)\right| < \varepsilon,$$

para todo n suficientemente grande. □

O corolário acima tem aplicação no estudo das soluções fracas de diversos tipos de equações diferenciais parciais não lineares.

Um caso particular interesssante do Teorema de Strauss, é quando se faz $G_n(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, mantendo-se as demais hipóteses. Neste caso a hipótese (c) equivale a dizer que (F_n) é uniformemente limitada para intervalos limitados de R. Aliás, esta é a forma do teorema que foi demonstrada por Strauss em [20], cf. também a referência bibliográfica [12].

4.4 Funções de várias variáveis; o Teorema de Fubini

Para se construir a teoria da integração de Lebesgue para as funções de várias variáveis tudo o que se tem a fazer é repetir, com as adequações devidas, as definições e os métodos utilizados para o caso das funções de uma única variável.

No que se segue iremos nos restringir apenas ao estudo das funções de duas variáveis não só por amor à simplicidade como também porque isto é o suficiente para termos uma boa compreensão do caso geral de várias variáveis.

Se I e J são intervalos da reta (limitados ou não) o seu produto cartesiano $G = I \times J$ é dito *retângulo* do R^2. Se ambos os intervalos I e J forem limitados, o retângulo G é dito *limitado* e sua *área* é definida por $a(G) = \operatorname{amp}(I) \operatorname{amp}(J)$, isto é, a área de G é o produto das amplitudes dos seus lados. Se um dos intervalos I ou J é reduzido a um só ponto (e portanto tem amplitude nula) diremos que o retângulo tem *área nula*, mesmo que o outro intervalo não seja limitado. Assim, um retângulo não limitado pode ter área nula, bastando para isto que um dos seus lados seja reduzido a um só ponto. Diz-se que o retângulo tem *área infinita* se um dos seus lados é não limitado e o outro não é reduzido a um só ponto.

Fixado um referencial cartesiano ortogonal, todos os retângulos que iremos considerar terão os lados paralelos aos eixos coordenados e terão área não nula e para garantir isto todos os intervalos que consideraremos serão abertos.

4.18 Definição. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ tem *medida nula* quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe um recobrimento enumerável de E, por retângulos, cuja soma das áreas é inferior a ε. Equivalentemente, podemos dizer que E tem medida nula quando existe um recobrimento de E, por retângulos, cuja soma das áreas é finita e tal que cada ponto de E pertence a um número infinito de tais retângulos (reveja Exercício 1.7).

Observe que, em virtude desta definição, uma reta, pensada como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, tem medida nula (ver Exercício 4.16). Conseqüentemente todo subconjunto da reta tem medida nula em $\mathbb{R}^2$. Assim, ao lidarmos com subconjuntos da reta devemos ter o cuidado, no que diz respeito à medida, de explicitarmos se as medidas consideradas são em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{R}^2$. Isto, aliás, está de acordo com os conceitos elementares de área e comprimento que temos. Assim como a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ generaliza a noção de comprimento, em $\mathbb{R}^2$ ela generaliza a noção de área. Neste contexto, dizer que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ tem medida nula significa dizer que o mesmo tem área nula.

4.19 Definição. Seja $G \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo limitado. Diz-se que $u\colon G \to \mathbb{R}$ é uma *função escada* em G quando existe uma decomposição de G em um número finito de subretângulos $G_1, G_2, \dots, G_\nu$ tal que u assume um valor constante b_j em cada retângulo G_j, $j = 1, 2, \dots, \nu$. A integral da função escada u em G é definida por

$$\int_G u(x,y)d(x,y) = \sum_{j=1}^{\nu} b_j\, a(G_j). \tag{4.41}$$

4.20 Observações:

i) Se $G = I \times J$, onde I e J são intervalos da reta, uma decomposição de G em subretângulos é obtida considerando-se uma decomposição de cada intervalo I e J em subintervalos e fazendo-se os produtos cartesianos de cada subintervalo de I por cada subintervalo de J.

ii) A extensão do conceito de função escada para o caso de retângulos não limitados é feita de modo análogo ao que é feito na Seção 2.3 para intervalos não limitados.

iii) Se $u\colon G \to \mathbb{R}$ é uma função definida no retângulo $G = I \times J$ então, para cada $x_0 \in I$ podemos definir uma função $v_{x_0}\colon J \to \mathbb{R}$ dada por $v_{x_0}(y) = u(x_0, y)$. Se u é uma função escada em G então v_{x_0} é uma função escada em J, exceto para um número finito de valores de x_0 (verifique!). Considerações análogas podem ser feitas com relação à função dada por $w_{y_0}(x) = u(x, y_0)$, para y_0 em J.

De posse dos conceitos de *conjunto de medida nula* e *função escada* em $\mathbb{R}^2$ podemos repetir toda a construção feita nas seções e capítulos anteriores sem maiores modificações. Assim, os intervalos são substituídos por retângulos e passa-se a pensar em R^2. Desta forma constróem-se as classes $S_0(G)$, $S_1(G)$, $L(G)$, $L^p(G)$ de modo inteiramente análogo ao caso unidimensional.

A integral de uma função $u\colon G \to \mathbb{R}$ é representada pela notação $\int_G u(x,y)d(x,y)$ ou simplesmente $\int_G u$, quando não houver possibilidade de confusão.

Um problema que surge, ao se considerar integrais para funções de várias variáveis, é o de verificar as relações entre integrais em diferentes dimensões. Há um importante resultado, o Teorema de Fubini, que permite o cálculo da integral de uma função definida e integrável num certo $\mathbb{R}^n$, mediante o cálculo da integral da mesma função em dimensões inferiores. O nosso próximo objetivo é demonstrar o teorema de Fubini em $\mathbb{R}^2$. A extensão para o caso geral é feita sem dificuldade.

4.21 Lema. *Seja $E \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^2$. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ seja $E_{x_0} = \{y \in R; (x_0, y) \in E\}$. Então E_{x_0} tem medida nula em $\mathbb{R}$ para quase todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Dito de outra forma, se $F = \{x_0 \in \mathbb{R};\ \mu(E_{x_0}) > 0\}$ então F tem medida nula em $\mathbb{R}$* (ver Figura 4.1).

Obviamente, este lema é válido se permutarmos x por y.

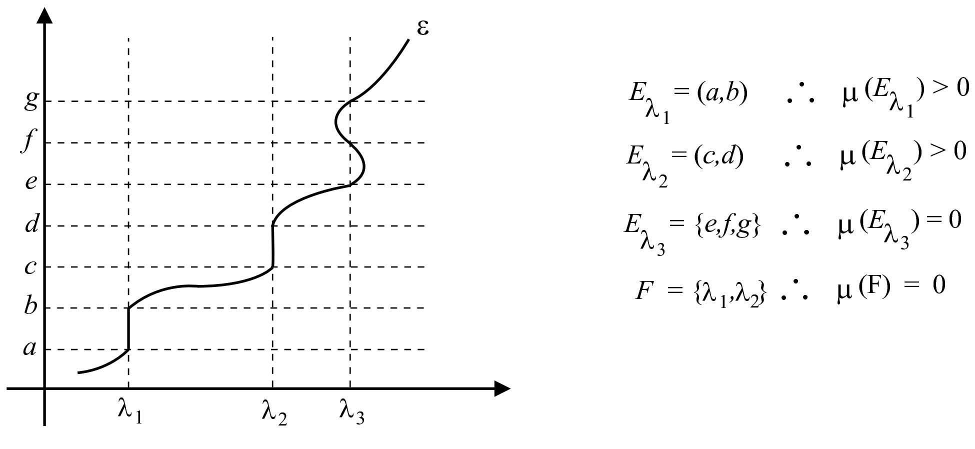


Fig. 4.1

Demonstração: Seja $\{G_\nu\}$ um recobrimento enumerável de E por retângulos tal que cada ponto de E pertence a um número infinito de tais retângulos e existe $M > 0$ tal que $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a(G_\nu) < M$. Seja $G = I \times J$ um retângulo (podendo ser não limitado) que contém todos os retângulos G_ν. Para cada ν seja g_ν a função característica do retângulo G_ν. Então, teremos, obviamente que

$$a(G_\nu) = \int_G g_\nu(x,y)d(x,y) = \int_I \Big[\int_J g_\nu(x,y)dy \Big]\, dx.$$

Portanto a série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \int_I \big[\int_J g_\nu(x,y)dy \big]\, dx$ é convergente. Decorre do teorema de Beppo Levi que a série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_J g_\nu(x,y)\, dy \tag{4.42}$$

converge quase sempre em I, isto é, se A é o conjunto dos pontos de I tais que (4.42) não converge, então A tem medida nula em $I \subset \mathbb{R}$. Se $F = \{x \in \mathbb{R};\, \mu(E_x) > 0\}$, devemos provar que F tem medida nula em $\mathbb{R}$. Para isto vamos provar que $F \subset A$.

Se $x_0 \in I - A$ tem-se a série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \int_J g_\nu(x_0,y)\, dy$ converge. Uma nova aplicação do teorema de Beppo Levi nos permite concluir que a série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x_0,y) \tag{4.43}$$

converge quase sempre em J, isto é, se B é o conjunto dos pontos y de J tais que (4.43) não converge, então B tem medida nula em $J \subset \mathbb{R}$. Mas, nos pontos $y \in E_{x_0}$ a série (4.43) certamente diverge porque para tais y, os pontos (x_0, y) estão em E e portanto estão contidos em um número infinito de retângulos G_ν e, conseqüentemente, há uma infinidade de termos iguais a 1 na série (4.43). Resulta daí que

$E_{x_0} \subset B$ e portanto tem medida nula. Logo $x_0 \notin F$. Como $F \subset I$ e x_0 é arbitrário em $I - A$, segue-se finalmente que $F \subset A$. $\square$

4.22 Teorema (Fubini). *Seja $G = I \times J$ um retângulo e $u\colon G \to \mathbb{R}$ uma função de $L(G)$, isto é, u é integrável em G. Então*

$$(4.44)\qquad \int_G u(x,y)d(x,y) = \int_I \Big[\int_J u(x,y)dy\Big]\,dx = \int_J \Big[\int_I u(x,y)dx\Big]\,dy.$$

Demonstração: É evidente que o teorema é válido para funções características de retângulos. Portanto, segue-se facilmente a sua validade para as funções escada (pois estas são combinações lineares finitas de funções características de retângulos). Em vista disto, é suficiente provarmos o teorema supondo $u \in S_1(G)$ uma vez que, por definição, as funções de $L(G)$ são representáveis por diferenças de funções de $S_1(G)$. Seja (u_ν) uma sucessão crescente de funções de $S_0(G)$ convergindo quase sempre para u em G e tal que

$$(4.45)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \int_G u_\nu(x,y)d(x,y) = \int_G u(x,y)d(x,y).$$

Como o teorema é válido para as funções escada, temos que para cada ν a função $w_\nu\colon I \to \mathbb{R}$ dada por

$$w_\nu(x) = \int_J u_\nu(x,y)\,dy$$

é integrável em I e tem-se

$$(4.46)\qquad \int_I w_\nu(x)\,dx = \int_G u_\nu(x,y)d(x,y).$$

Segue-se de (4.45) e (4.46) que

$$(4.47)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \int_I w_\nu(x)\,dx = \int_G u(x,y)d(x,y).$$

Desta forma, (w_ν) é uma sucessão crescente de funções integráveis em I e, em vista de (4.47), a sucessão das integrais das w_ν é convergente. Segue-se do teorema de Beppo Levi que (w_ν) converge quase sempre em I para uma função integrável w, definida quase sempre em I, isto é,

$$\lim_{\nu\to\infty} w_\nu(x) = w(x) \tag{4.48}$$

para quase todo x em I e, tendo em vista (4.47), a integral de w é dada por

$$\int_I w(x)\,ds = \lim_{\nu\to\infty} \int_I w_\nu(x)\,dx = \int_G u(x,y)d(x,y). \tag{4.49}$$

Seja A o conjunto dos pontos x de I nos quais (w_ν) não converge para w e seja E o conjunto dos pontos (x, y) de G nos quais (u_ν) não converge para u. Então A tem medida nula em $\mathbb{R}$ e E tem medida nula em $\mathbb{R}^2$. Fixemos $x_0 \in I$ tal que $x_0 \notin A$ e $E_{x_0} = \{y \in J;\ (x_0, y) \in E\}$ tenha medida nula em $\mathbb{R}$. Isto é possível para quase todo $x_0 \in I$, em virtude do Lema 4.21. Portanto,

$$\lim_{\nu\to\infty} u_\nu(x_0, y) = u(x_0, y) \tag{4.50}$$

quase sempre em J (precisamente para todo $y \notin E_{x_0}$). Mas, pela escolha de x_0 em (4.48) temos que

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_J u_\nu(x_0, y)\,dy = \lim_{\nu\to\infty} w_\nu(x_0) = w(x_0). \tag{4.51}$$

Uma nova aplicação do teorema de Beppo Levi nos assegura que a função $v_{x_0}\colon J \to \mathbb{R}$ dada por $v_{x_0}(y) = u(x_0, y)$ é integrável em J e tem-se

$$\int_J v_{x_0}(y)\,dy = \int_J u(x_0, y)\,dy = \lim_{\nu\to\infty} \int_J u_\nu(x_0, y)\,dy = w(x_0). \tag{4.52}$$

Como isto é válido para quase todo x_0 em I, temos que a função integrável w, dada por (4.48), é definida quase sempre em I por

$$w(x) = \int_J u(x,y)\,dy.$$

Decorre de (4.49) que

$$\int_G u(x,y)d(x,y) = \int_I \Big[\int_J u(x,y)\,dy \Big]\,dx. \tag{4.53}$$

De modo análogo, permutando-se x por y na argumentação anterior, concluiremos que

$$\int_G u(x,y)d(x,y) = \int_J \Big[\int_I u(x,y)dx \Big]\,dy. \tag{4.54}$$

De (4.53) e (4.54) obtém-se (4.44). $\square$

4.23 Exemplo. Considere a função $u\colon (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot$ Um cálculo elementar mostra-nos que $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \big[\int_0^1 u(x,y)dy \big]\,dx \neq \int_0^1 \big[\int_0^1 u(x,y)dx \big]\,dy = -\frac{\pi}{4}\cdot$ Decorre do teorema de Fubini que u não é integrável à Lebesgue no quadrado $(0,1) \times (0,1)$.

4.24 Observação. Se $G = I \times J$ é um retângulo e $u\colon G \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$\int_I \Big[\int_J u(x,y)dy \Big]\,dx = \int_J \Big[\int_I u(x,y)dx \Big]\,dy$$

não podemos assegurar que u é integrável em G, mesmo que u seja mensurável (veja Exercício 4.17). Todavia vale o seguinte resultado conhecido como teorema de Tonelli.

4.25 Teorema (Tonelli). *Se $u\colon G = I \times J \to \mathbb{R}$ é mensurável e existe uma das integrais repetidas*

$$\int_I \Big[\int_J |u(x,y)|\,dy \Big]\,dx, \qquad \int_J \Big[\int_I |u(x,y)|\,dx \Big]\,dy, \tag{4.55}$$

então u é integrável em G (e conseqüentemente vale, para u, o teorema de Fubini).

Demonstração: Sendo u mensurável existe (cf. Definição 2.21) uma sucessão (u_ν) de funções escada que converge para u quase sempre em G. Para cada ν considere a função $g_\nu(x,y) = \min\{|u_\nu(x,y)|, |u(x,y)|\}$. Então, as g_ν estão definidas quase sempre em G. Além disso, as g_ν são mensuráveis e tem-se $g_\nu \le |u_\nu|$ quase sempre em G. Como as u_ν são integráveis em G, por serem funções escada, segue-se que as g_ν são integráveis em G (ver Proposição 2.24). Pelo teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned} \int_G g_\nu(x,y)d(x,y) &= \int_I \Big[\int_J g_\nu(x,y)dy\Big]dx \\ &= \int_J \Big[\int_I g_\nu(x,y)dx\Big]dy. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Admitindo a existência de uma das integrais (4.55) e levando em conta que $g_\nu \le |u|$ quase sempre em G, resulta de (4.56) que, para todo ν,

$$\int_G g_\nu(x,y)d(x,y) \le C,$$

onde C é uma constante igual a uma das integrais (4.55). Mas, por sua própria definição as g_ν convergem quase sempre em G para a função $|u|$. Decorre então, do lema de Fatou, que $|u|$ é integrável em G e como u é mensurável resulta (Corolário 2.25) que u é integrável. $\square$

Exercícios

4.1 Provar que $L^p(a,b)$ é um espaço vetorial $(1 \leq p < \infty)$.
Sugestão: $|u+v| \leq 2\max\{|u|,|v|\}$.

4.2 Seja $F \subset (a,b)$ um conjunto não mensurável e defina $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ por $u(x) = 1$ se $x \in F$ e $u(x) = -1$ se $x \notin F$. Mostre que $u \notin L(a,b)$ embora $|u|$ seja integrável.

4.3 Os espaços L^p também podem ser definidos no caso $0 < p < 1$ e são ainda espaços vetoriais (o mesmo argumento usado no Exercício 4.1 ainda é válido neste caso). O leitor interessado nestes espaços poderá consultar [4]. Prove que no caso $0 < p < 1$ a desigualdade de Young (Proposição 4.4) tem o seu sentido invertido. O que dizer das desigualdades de Hölder e de Minkowski?

4.4 Seja $1 \leq p < \infty$. Para cada $u \in L^p(a,b)$ e cada $\lambda > 0$ prove que $\mu(E) \leq \frac{||u||_p^p}{\lambda^p}$ (desigualdade de Chebychev), onde $E = \{x \in (a,b);\ |u(x)| > \lambda\}$.
Sugestão: $||u||_p^p = \int_a^b |u|^p \geq \int_E |u|^p$.

4.5 Se E tem medida finita e $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ então $L^{p_2}(E) \subset L^{p_1}(E)$. Dê um contra-exemplo para o caso em que E tem medida infinita.

4.6 Sejam $1 \leq p < \infty$, e (u_n), (v_n) sucessões de funções.

a) Se (u_n) converge em média para u em $L^p(a,b)$ e converge quase sempre para w, então $u = w$ quase sempre.

b) Se (u_n) converge para u em L^p e (v_n) converge para v em L^q, onde $q = p/(p-1)$, então, $\lim \int u_n v_n = \int uv$.

4.7 Se $1 \leq p < \infty$ e (u_n) converge em L^p, então (u_n) é uma sucessão de Cauchy na norma de L^p.

4.8 Seja φ uma função escada definida em (a, b). Prove que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua u tal que $||u - \varphi||_p < \varepsilon$, qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.

4.9 Prove que o espaço das funções contínuas em (a, b) é denso em $L^p(a, b)$, qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.

4.10 Se $1 \leq p < \infty$ e (u_n) converge em média para u em $L^p(a, b)$, então (u_n) converge em medida para u, mas não podemos garantir que (u_n) converge quase sempre para u. Como contra-exemplo, considere a sucessão (v_n) das funções características dos intervalos $I_1 = (0, 1/2]$, $I_2 = [1/2, 1)$, $I_3 = (0, 1/3]$, $I_4 = [1/3, 2/3]$, $I_5 = [2/3, 1)$, $I_6 = (0, 1/4]$, $I_7 = [1/4, 2/4]$, $I_8 = [2/4, 3/4]$, $I_9 = [3/4, 1), \ldots$; a sucessão (v_n) converge em média para zero em $L^p(0, 1)$ mas não converge quase sempre para zero.

4.11 Mostre que $L^\infty(a, b)$ é um espaço vetorial e que $|| \; ||_\infty$, como definido no texto é realmente uma norma.

4.12 Que dizer das desigualdades de Hölder, Minkowski e do teorema de Riesz-Fischer para $L^\infty(a, b)$?

4.13 Se $1 \leq p < \infty$ e (u_n) converge para u em $L^p(a, b)$, então, para todo $v \in L^q(a, b)$ tem-se $\lim \int v u_n = \int v u$, onde $q = p/(p - 1)$; além disso $\lim ||u_n||_p = ||u||_p$.

4.14 Mostre que a sucessão (u_n) do Exemplo 4.15 converge fracamente para zero em $L^p(0, 2)$. Mostre ainda que, se $1 < p < +\infty$ e $1 \leq r < p$ então $u_n \to 0$ fortemente em $L^r(0, 2)$. Observe, também, que $u_n \to 0$ quase sempre em $(0, 2)$. [Tente resolver este exercício usando diretamente as definições de convergência. Depois, observe que ele é trivial se aplicarmos o Corolário 4.17].

4.15 Mostre que uma reta, pensada como subconjunto do $\mathbb{R}^2$, tem medida nula.

Sugestão: Considere a reta como sendo o eixo dos x e os retângulos $R_\nu = I_\nu \times J_\nu$ onde $I_\nu = (-2^{\nu-1}, 2^{\nu-1})$ e $J_\nu = \left(-\frac{\varepsilon}{2^{\nu+2}}, \frac{\varepsilon}{2^{2\nu+2}}\right)$, sendo $\varepsilon > 0$ escolhido arbitrariamente.

4.16 Considere a função $u(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ definida em $G = (-1,1) \times (-1,1)$, exceto em $(0,0)$. Mostre que $\int_{-1}^{1} \big[\int_{-1}^{1} u(x,y)dx\big] dy = \int_{-1}^{1} \big[\int_{-1}^{1} u(x,y)dy\big] dx = 0$, no entanto u não é integrável em G.

Sugestão: Considere o subretângulo $G_1 = (0,1) \times (0,1)$. Então $\int_G |u(x,y)| d(x,y) \geq \int_{G_1} u(x,y) d(x,y)$. No entanto u não é integrável em G_1 pois $\int_0^1 \big[\int_0^{2\pi} \frac{|\operatorname{sen}\theta \cos\theta|}{r} d\theta\big] dr$ não existe.

5

Derivação

5.1 Primitivas

Consideremos uma função $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e retornemos ao problema de estudar as soluções da equação

$$u' = u, \tag{5.1}$$

isto é, queremos estudar as primitivas de u no sentido da Definição 1.10.

Tivemos ocasião de verificar, na Seção 1.2, que se u é integrável à Riemann então as integrais indefinidas de u, isto é, as funções v dadas pela fórmula

$$v(x) = \int_a^x u(t)\,dt + C, \tag{5.2}$$

onde C é uma constante, são primitivas de u. Verificamos ainda, naquele contexto, que nem toda primitiva de u é necessariamente uma integral indefinida de u (cf. Exemplo 1.11). Surgiu, então, o problema de caracterizar as primitivas de u que são integrais indefinidas de u e vimos que a integral de Riemann não nos conduz a bons resultados nesta direção (a não ser sobre a restrita classe das funções contínuas com o conhecido Teorema Fundamental do Cálculo).

O nosso objetivo principal neste capítulo é estudar o Teorema Fundamental do Cálculo no contexto da integral de Lebesgue. Para melhor conduzir o nosso estudo formularemos as questões seguintes:

(Q1) As funções v, dadas por (5.2), são soluções de (5.1)?

(Q2) Existem soluções de (5.1) que não são obtidas mediante a fórmula (5.2)?

(Q3) Como caracterizar as soluções de (5.1) que são dadas pela fórmula (5.2).

As questões (Q1) e (Q2) já foram estudadas na Seção 1.2 à luz da integral de Riemann.

Neste capítulo, suporemos a função u integrável à Lebesgue, reestudaremos as questões (Q1), (Q2) e procuraremos responder a questão (Q3).

5.2 Funções monótonas

Uma das razões pelas quais a obra de Lebesgue foi recebida com certa dose de desconfiança por alguns matemáticos de sua época é que para eles as funções descontínuas e as funções sem derivada eram consideradas monstruosidades ou anormalidades e, precisamente tais funções têm um papel importante no trabalho de Lebesgue.

A maioria das funções usualmente utilizadas no cálculo elementar são diferenciáveis, a menos de alguns pontos excepcionais que, via de regra, são isolados (por exemplo, funções do tipo $u(x) = |x|$). É concebível pois pensar-se que se uma função é contínua, os pontos onde ela não é derivável formam um conjunto insignificante num certo sentido. Este era o pensamento matemático no início do século XIX e muitas foram as tentativas de provar tal conjectura. Coube a Weierstrass o mérito de (em 1860) exibir o famoso exemplo de uma função contínua que não é diferenciável em ponto algum, encerrando definitivamente as esperanças que haviam de caracterizar os pontos onde uma função contínua é diferenciável (ver, por exemplo, [22]).

Assim, se estamos interessados em encontrar uma propriedade que nos assegure a diferenciabilidade quase sempre de uma função não é a continuidade da função que resolve nosso problema.

Observando que se uma função u é derivável num ponto x_0 e $u'(x_0) > 0$ então existe uma vizinhança de x_0 onde u é crescente, cabe perguntar se a monotonicidade de uma função implica na diferenciabilidade. A resposta a esta questão é dada por um teorema devido a Lebesgue, que oportunamente veremos. (Aqui os resultados em que intervêm funções crescentes são estendidos às funções decrescentes u tomando-se as funções $-u$, como se faz usualmente).

Antes de enunciarmos o teorema de Lebesgue necessitamos de alguns conceitos e resultados que não são familiares aos cursos introdutórios de Análise.

5.1 Definição. Seja $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e x um ponto interior de $[a,b]$. As derivadas laterais (ou de Dini) de u no ponto x são definidas por

$$D^+ u(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\,[u(x+h) - u(x)] \tag{5.3}$$

$$D_+ u(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\,[u(x+h) - u(x)] \tag{5.4}$$

$$D^- u(x) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\,[u(x+h) - u(x)] \tag{5.5}$$

$$D_- u(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\,[u(x+h) - u(x)] \tag{5.6}$$

As derivadas de Dini acima definidas podem assumir valores infinitos. De (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6) obtém-se que para todo $x \in [a,b]$

$$D_- u(x) \le D^- u(x), \tag{5.7}$$

$$D_+ u(x) \leq D^+ u(x). \tag{5.8}$$

A Figura 5.1 dá-nos uma idéia geométrica das quatro derivadas de Dini.

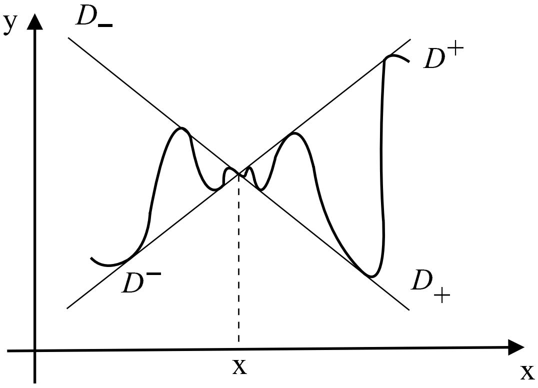


Fig. 5.1

Se $D_+ u(x)$ e $D^+ u(x)$ são finitas e iguais, este valor é a derivada à direita da função u no ponto x. Analogamente com $D_- u(x)$ e $D^- u(x)$, dando-nos a derivada à esquerda. Assim, u é derivável em x se e só se são finitas e coincidem todas as suas derivadas de Dini no ponto x e este valor comum é a derivada de u no ponto x. Observemos ainda que se u é uma função crescente então todas as suas derivadas de Dini são não negativas.

5.2 Definição. Diz-se que uma família $\mathcal{V}$ de intervalos *cobre* o conjunto E no *sentido de Vitali* se, para cada $x \in E$ e cada $\varepsilon > 0$, existe um $I \in \mathcal{V}$ tal que $x \in I$ e $\text{amp}(I) < \varepsilon$.

5.3 Lema (Vitali). *Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $m_e(E) < +\infty$ e $\mathcal{V}$ uma família de intervalos que cobre E no sentido de Vitali. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma família finita $I_1, \ldots, I_N$ de intervalos de $\mathcal{V}$, disjuntos dois a dois e tal que*

$$m_e\big(E - \bigcup_{j=1}^{N} I_j\big) < \varepsilon. \tag{5.9}$$

Demonstração: Podemos supor que os intervalos de $\mathcal{V}$ são fechados porque se $I_1, \ldots, I_N$ são intervalos fechados, disjuntos dois a dois e satisfazem (5.9), o mesmo acontece se alguns de seus extremos são excluídos. Seja G um conjunto aberto, de medida finita e tal que $E \subset G$. A hipótese $m_e(E) < +\infty$ assegura a existência de G. Como a família dos intervalos de $\mathcal{V}$ contidos em G ainda cobre E no sentido de Vitali podemos supor que $I \subset G \quad \forall I \in \mathcal{V}$. Observe-se que se $\mathcal{F}$ é uma família finita de intervalos de $\mathcal{V}$ e x é um ponto de E que não pertence à união dos intervalos de $\mathcal{F}$, então existe um intervalo de $\mathcal{V}$ que contém x e é disjunto de todos os de $\mathcal{F}$. Isto se dá porque a união dos intervalos de $\mathcal{F}$ é um conjunto fechado que não contém x e $\mathcal{V}$ cobre E no sentido de Vitali. Isto posto, se existe uma família finita de intervalos de $\mathcal{V}$, disjuntos dois a dois e cuja união contém E, nada há a demonstrar porque a diferença em (5.9) é vazia. Caso contrário, essa observação permite escolher, por indução, uma sucessão (I_n) de intervalos de $\mathcal{V}$ do seguinte modo: I_1 é qualquer elemento de $\mathcal{V}$ e, suposto escolhidos $I_1, \ldots, I_n$, então I_{n+1} é qualquer intervalo de $\mathcal{V}$ disjunto dos intervalos $I_1, \ldots, I_n$ e tal que

$$\operatorname{amp}(I_{n+1} > \frac{\alpha_n}{2}\,,$$

onde α_n é o supremo das amplitudes dos intervalos de $\mathcal{V}$ disjuntos de cada um dos I_j, $j = 1, \ldots, n$ (observe-se que $\alpha_n < \mu(G) < +\infty$). Os intervalos de (I_n) são, pois, disjuntos dois a dois e $I_n \subset G$, $n = 1, \ldots$. Segue-se daí que $\sum_i^\infty \operatorname{amp}(I_n) \leq \mu(G)$, i.e., a série $\sum \operatorname{amp}(I_n)$ é convergente, donde existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}\,\cdot$$

Seja $\mathcal{S} = E - \bigcup_{j=1}^{N} I_j$. Vamos mostrar que $m_e(\mathcal{S}) < \varepsilon$. Seja, para isto, $x \in \mathcal{S}$. Pela observação feita inicialmente, existe $I \in \mathcal{V}$ disjunto dos intervalos $I_1, \ldots, I_N$ e tal que $x \in I$. Observe-se, agora, que se $I \cap I_n = \varnothing$, para $n = 1, \ldots, m$, então

$$\operatorname{amp}(I) \leq \alpha_m \leq 2 \operatorname{amp}(I_{m+1}).$$

Logo, como $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{amp}(I_n) = 0$, existe um menor inteiro k tal que $I \cap I_k \neq \varnothing$. Obviamente $k > N$ e

$$\operatorname{amp}(I) \leq \alpha_{k-1} \leq 2 \operatorname{amp}(I_k).$$

Como $x \in I$ e $I \cap I_k \neq \varnothing$, a distância de x ao ponto médio de I_k é no máximo igual a

$$\operatorname{amp}(I) + 1/2 \operatorname{amp}(I_k) \leq 2 \operatorname{amp}(I_k) + 1/2 \operatorname{amp}(I_k) \leq 5/2 \operatorname{amp}(I_k).$$

Deste modo, cada x de $\mathcal{S}$ pertence a um intervalo J_k cujo ponto médio coincide com o de I_k e cuja amplitude é cinco vezes a de I_k. Logo,

$$m_e(\mathcal{S}) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{amp}(J_n) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 5 \operatorname{amp}(I_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_n) < \varepsilon.$$

5.4 Teorema (Lebesgue). *Se $u \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então u é derivável quase sempre em $[a,b]$.*

Demonstração: Vamos supor que u seja crescente e demonstrar inicialmente que o conjunto E dos pontos x de $[a,b]$ tais que $D^- u(x) > D_+ u(x)$ tem medida nula. Seja, para isto,

$$E_{r,s} = \big\{x \in [a,b];\ D^- u(x) > r > s > D_+ u(x)\big\}, \tag{5.10}$$

onde r e s são números racionais. Como $E = \cup E_{r,s}$ e a família dos conjuntos $E_{r,s}$ é numerável é bastante demonstrar que $m_e(E_{r,s}) = 0$. Ponhamos $m_e(E_{r,s}) = t$. Seja $\varepsilon > 0$ e G um conjunto aberto tal que $E_{r,s} \subset G$ e $\mu(G) < t + \varepsilon$. Como $D_+ u(x) < s$ para todo $x \in E_{r,s}$, a família dos intervalos $[x, x+h]$, $x \in E_{r,s}$ e $h > 0$, contidos em G e tais que

$$u(x+h) - u(x) < sh, \tag{5.11}$$

cobre $E_{r,s}$ no sentido de Vitali. Segue-se, pelo Lema de Vitali, que existem intervalos $I_1, \ldots, I_n$ dessa família, disjuntos dois a dois e tais que $m_e\big(E_{r,s} - \bigcup_{j=1}^{n} I_j\big) < \varepsilon$. Conseqüentemente, $m_e\big(E_{r,s} \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j\big) > t - \varepsilon$ e, se A é o conjunto dos pontos de $E_{r,s} \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ situados no interior dos intervalos $I_1, \ldots, I_n$, então $m_e(A) > t - \varepsilon$. Pondo $I_j = [x_j, x_j + h_j]$, $j = 1, \ldots, n$, fazendo $x = x_j$ e $h = h_j$ em (5.11) e somando membro a membro as n desigualdades obtidas tem-se

$$\begin{aligned}
(5.12) \qquad \sum_{j=1}^{n} (u(x_j + h_j) - u(x_j)) &\leq \sum_{j=1}^{n} sh_j \\
&= s \sum_{j=1}^{n} h_j \leq s\mu(G) < s(t + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Como $D^- u(x) > r$ para todo $x \in E_{r,s}$, a família dos intervalos $[y - k, y]$, $y \in A$, $k > 0$, $[y - k, y] \subset I_j$ para algum j, $1 \leq j \leq n$, e tais que

$$(5.13) \qquad u(y) - u(y - k) > rk$$

cobre A no sentido de Vitali. Logo, pelo Lema de Vitali, existem intervalos $J_1, \ldots, J_m$ dessa família, disjuntos dois a dois e tais que $m_e\big(A - \bigcup_{i=1}^{m} J_i\big) < \varepsilon$. Conseqüentemente,

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{amp}(J_i) \geq m_e\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{m} J_i\Big) > t - 2\varepsilon.$$

Pondo $J_i = [y_i - k_i, y_i]$, fazendo $y = y_i$ e $k = k_i$ em (5.13) e somando as m desigualdades obtidas tem-se, pois,

$$(5.14) \qquad \sum_{i=1}^{m} (u(y_i) - u(y_i - k_i)) \geq \sum_{i=1}^{m} rk_i = r \sum_{i=1}^{m} k_i > r(t - 2\varepsilon).$$

Cada J_i está contido em algum I_j. Somando em relação aos J_i contidos em I_j tem-se, visto que u é crescente,

$$\sum_{J_i \subset I_j} (u(y_i) - u(y_i - k_i)) \leq u(x_j + h_j) - u(x_j).$$

Logo,

$$\begin{aligned} s(t+\varepsilon) &> \sum_{j=1}^{n} (u(x_j + h_j) - u(x_j)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{m} (u(y_i) - u(y_i - k_i)) > r(t - 2\varepsilon), \end{aligned}$$

donde $s(t+\varepsilon) > r(t-2\varepsilon)$ e, pela arbitrariedade de ε, $st \geq rt$. Mas $s < r$; logo $t = 0$.

Analogamente, demonstra-se que tem medida nula o conjunto dos pontos de $[a,b]$ onde $D^- u(x) < D_+ u(x)$. Logo, $D^- u(x) = D_+ u(x)$ quase sempre em $[a,b]$. Com o mesmo argumento demonstram-se análogas relações para as demais combinações das derivadas de Dini. Logo, as quatro derivadas de Dini são iguais quase sempre em $[a,b]$.

Para completar a demonstração vamos agora demonstrar que uma das derivadas de Dini é finita quase sempre. Demonstremos, por exemplo, que $D^+ u < +\infty$ quase sempre em $[a,b]$. Seja, para isto, $E = \{x \in [a,b]; D^+ u(x) = +\infty\}$ e mostremos que $\mu(E) = 0$. Seja $t = m_e(E)$ e α um real positivo qualquer. De $D^+ u(x) = +\infty$ para todo $x \in E$, resulta que a família dos intervalos $[x, x+h]$, $x \in E$, $h > 0$, tais que $[x, x+h] \subset [a,b]$ e

$$u(x+h) - u(x) > \alpha h, \tag{5.15}$$

cobre E no sentido de Vitali. Logo, pelo Lema de Vitali, existem intervalos $I_1, \ldots, I_n$ dessa família, disjuntos dois a dois e tais que

$m_e\big(E - \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j\big) < \varepsilon$ e, portanto, tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{amp}(I_j) \geq m_e\big(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j\big) > t - \varepsilon,$$

Pondo $I_j = [x_j, x_j + h_j]$, $j = 1, \ldots, n$, fazendo $x = x_j$ e $h = h_j$, $j = 1, \ldots, n$, em (5.15) e somando membro a membro as n desigualdades obtidas tem-se

$$\sum_{j=1}^{n} (u(x_j + h_j) - u(x_j)) > \sum_{j=1}^{n} \alpha h_j = \alpha \sum_{j=1}^{n} h_j > \alpha(t - \varepsilon).$$

Logo,

$$u(b) - u(a) \geq \sum_{j=1}^{n} (u(x_j + h_j) - u(x_j)) > \alpha(t - \varepsilon)$$

donde, pela arbitrariedade de ε, $u(b) - u(a) \geq \alpha t$ e, pela arbitrariedade de α, $t = 0$. $\square$

Encerramos esta Seção com um teorema de Fubini para séries de funções monótonas.

5.5 Teorema (Fubini). *Seja* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ *uma série de funções monótonas crescentes que converge pontualmente em* $[a, b]$ *para uma função* u. *Então* u *é derivável quase sempre em* $[a, b]$ *e vale a derivação termo a termo quase sempre, isto é,* $u'(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u'_\nu(x)$ *quase sempre em* $[a, b]$.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que todas as funções u_ν são não negativas e se anulam no ponto $x = a$. Caso contrário bastaria considerar $u_\nu(x) - u_\nu(a)$ em lugar de $u_\nu(x)$. Seja $s_n(x)$ a n-ésima soma parcial da série, isto é, $s_n(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu(x)$; portanto $s_n(x) \to u(x)$. Evidentemente as funções s_n e u são crescentes e pelo teorema de Lebesgue são deriváveis exceto nos pontos de um conjunto E_0 de medida nula, precisamente a união dos conjuntos nos quais cada uma das funções mencionadas não é derivável. As funções $u_\nu(x)$ sendo crescentes, podemos escrever que, para $h > 0$

$$0 \leq \frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} \leq \frac{s_{n+1}(x+h) - s_{n+1}(x)}{h} \leq \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

e portanto para cada $x \notin E_0$ tem-se

$$0 \leq s'_n(x) \leq s'_{n+1}(x) \leq u'(x).$$

Esta relação nos mostra que a seqüência (s'_n) é crescente não negativa e para cada $x \notin E_0$ ela é definida por $u'(x)$. Assim, a série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u'_\nu(x)$ é convergente quase sempre em $[a, b]$. Resta provar que a sua soma é precisamente $u'(x)$. Como a seqüência (s'_n) é crescente, basta provar que ela contém uma subseqüência (s'_{n_k}) tal que $s'_{n_k} \to u'$. Para isto consideremos a reduzida $s_n(b)$ da série numérica $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(b)$. Como por hipótese $s_n(b) \to u(b)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um n_k tal que $u(b) - s_{n_k}(b) < \frac{1}{2^k}\cdot$ Daí conclui-se, levando em conta que as funções são crescentes,

$$0 \leq u(x) - s_{n_k}(x) = \sum_{\nu > n_k} u_\nu(x) \leq \sum_{\nu > n_k} u_\nu(b) = u(b) - s_{n_k}(b) < \frac{1}{2^k}\cdot$$

Portanto a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} [u(x) - s_{n_k}(x)]$ é convergente em todo ponto do intervalo $[a, b]$. Esta série está nas condições da hipótese do teorema e pelo que já provamos até aqui ela pode ser diferenciada termo a termo (quase sempre) dando como resultado uma série convergente quase sempre. Portanto a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} [u'(x) - s'_{n_k}(x)]$$

é convergente e conseqüentemente $u'(x) - s'_{n_k}(x) \to 0$, ou seja, $s'_{n_k}(x) \to u'(x)$ quase sempre $[a,b]$. $\square$

5.3 Funções de variação limitada

O conjunto das funções monótonas crescentes é um cone convexo, como é imediato. Os elementos do espaço vetorial gerado por esse cone são ditos *funções de variação limitada* e, pelo que se sabe acerca dos espaços vetoriais gerados por cones convexos (Observação 1.35), são as funções que podem ser escritas como diferença de duas funções monótonas crescentes. Assim, u é de variação limitada se $u = v - w$, onde v, w são funções monótonas crescentes. A denominação "variação limitada" é justificada por meio da seguinte caracterização de tais funções.

5.6 Proposição. *Seja $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *A função u é de variação limitada.*

(ii) *Existe uma constante C tal que para toda decomposição do intervalo $[a,b]$ pelos pontos*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \textit{tem-se} \quad \sum_{k=0}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| \leq C.$$

Demonstração: Se u satisfaz (i), sejam v, w crescentes tais que $u = v - w$. Assim, para qualquer decomposiçáo de $[a,b]$ tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} [v(x_{k+1}) - v(x_k) + w(x_{k+1}) - w(x_k)] \\ &= v(b) - v(a) + w(b) - w(a) = C\end{aligned}$$

e portanto u satisfaz (ii). Reciprocamente, seja u uma função satisfazendo (ii). Para uma dada decomposição seja p a soma das diferenças $u(x_{k+1}) - u(x_k)$ que não são negativas e seja $-r$ a soma daquelas diferenças que são negativas. Assim, se $s = \sum_{k=0}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)|$ tem-se

$$s = p + r, \quad u(b) = u(a) + p - r.$$

Resulta daí que, sendo $s < C$ independentemente da decomposição escolhida, p e r também serão limitados. Sejam S, P, R os supremos de s, p, r respectivamente, quando variamos as decomposição de $[a, b]$. Então tem-se

$$S = P + R \quad \text{e} \quad u(b) = u(a) + P - R.$$

Procedento da mesma maneira, no intervalo $[a, x]$, onde $x \in [a, b]$, obtemos os três números $S(x)$, $P(x)$, $R(x)$. Assim, S, P, R definem funções de $[a, b] \to \mathbb{R}$ que são evidentemente crescentes e para cada $x \in [a, b]$ tem-se

$$S(x) = P(x) + R(x) \qquad \text{e} \qquad u(x) = u(a) + P(x) - R(x).$$

Esta última igualdade mostra que u satisfaz (i). $\square$

A função $S(x)$ acima é dita *variação total* de u em $[a, x]$ e é usualmente denotada por $V_a^x[u]$.

5.7 Observação: Decorre imediatamente do teorema de Lebesgue que toda função de variação limitada é derivável quase sempre.

5.8 Proposição. *Se* $u \in L(a, b)$ *então as integrais indefinidas de* u (ver Seção 5.1) *são funções contínuas deriváveis quase sempre em* $[a, b]$.

Demonstração: Seja $v(x) = \int_a^x u(t)\,dt + C$. A continuidade de v é uma conseqüência imediata da Proposição 4.10 (verifique!). Desta maneira, pela Observação 5.7, basta provar que v é de variação limitada.

De fato

$$\sum_{k=0}^{n-1} |v(x_{k+1} - v(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)\,dt \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u(t)\,dt = \int_a^b |u(t)|\,dt.$$

□

5.9 Teorema (Lebesgue). *Se* $u \in L(a,b)$ *então* $v(x) = \int_a^x u(t)\,dt$ *é diferenciável quase sempre em* $[a,b]$ *e* $v' = u$ *quase sempre.*

Demonstração: A derivabilidade de v já foi vista na Proposição 5.8. Resta-nos provar que $v' = u$ quase sempre em $[a,b]$. Sem perda de generalidade podemos supor que $u \in S_1$. (Ver Seção 1.3). Seja (u_n) uma sucessão crescente de funções escada convergindo quase sempre para u. Para cada n, seja $U_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,dt$. Como as u_n são funções escada, U_n é derivável quase sempre e $U_n' = u_n$, uma vez que as funções escada são integráveis à Riemann. Por definição $\int_a^x u(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^x u_n(t)\,dt$, isto é, $v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$, ou seja $v(x) = U_1(x) + \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} [U_{k+1}(x) - U_k(x)]$, ou ainda

$$v(x) = U_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [U_{k+1}(x) - U_k(x)], \tag{5.16}$$

isto é, a série $\sum [U_{j+1}(x) - U_j(x)]$ converge em todo ponto x de $[a,b]$ a $v(x) - U_1(x)$. Além disto, as funções $U_{n+1} - U_n$ são monótonas crescentes uma vez que $(U_{n+1} - U_n)' = u_{n+1} - u_n$ e (u_n) é crescente. Pelo Teorema 5.7 (Fibini) podemos, pois, derivar (5.16) termo a termo, quase sempre em $[a,b]$ e temos $v'(x) = u_1(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} [u_{k+1}(x) - u_k(x)]$, isto é, $u_n(x) \to v'(x)$ quase sempre em $[a,b]$ e, portanto, $u = v'$ quase sempre. □

Com este teorema fica resolvida a questão (Q1) proposta na Seção 5.1. Vamos passar agora ao estudo das outras questões.

5.4 Determinação de uma função a partir de sua derivada

Consideremos a função $u(x) \equiv 0$ em $(0,1)$ e seja v a função definida por $v(x) = 0$ se $0 \leq x < 1/2$ e $v(x) = 1$ se $1/2 \leq x \leq 1$. Então $v' = u$ quase sempre em $(0,1)$ mas v não é uma integral indefinida de u. Este exemplo nos mostra que a questão (Q2) da Seção 5.1 tem resposta afirmativa. Sendo assim passaremos a considerar a questão (Q3). Isto é, passaremos ao problema de caracterizar as funções v tais que v' seja uma função integrável u e para as quais seja válida a conhecida fórmula de Newton-Leibniz:

$$v(x) = v(a) + \int_a^x u(t)\,dt = v(a) + \int_a^x v'(t)\,dt. \tag{5.17}$$

Naturalmente devemos iniciar nossa procura entre as funções que possuem derivada quase sempre em (a,b). Como já vimos as funções de variação limitada são deste tipo. Por outro lado a integral da fórmula (5.17) é uma função de variação limitada. Portanto é inútil estender a nossa procura para uma classe de funções mais ampla. Como toda função de variação limitada se representa por meio de uma diferença de funções monótonas crescentes, devemos começar nossa procura entre as funções monótonas crescentes.

O exemplo dado no início desta Seção nos mostra, no entanto, que a igualdade (5.17) não é válida em geral para funções crescentes. Poder-se-ia conjecturar que o defeito no exemplo citado é que ali a função v apesar de ser crescente não é contínua. No entanto existem exemplos de funções monótonas crescentes contínuas para as quais não é válida a fórmula (5.17) (ver [8] pag. 383), cfr. Complemento 1, pg. 140.

Todavia, para as funções monótonas crescentes vale o seguinte resultado

5.10 Proposição. *Se* $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *é monótona crescente então sua derivada* v' *é integrável e* $\int_a^b v'(t)\,dt \le v(b) - v(a)$.

Demonstração: Já vimos que a derivada v' está definida quase sempre em $[a,b]$. Mostremos que v' é integrável. Para evitar o aparecimento de pontos onde v não é definida prolonguemos v definindo $v(x) = v(b)$ se $x \ge b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$\varphi_n(x) = \frac{v(x+h) - v(x)}{h}, \quad \text{onde} \quad h = 1/n. \tag{5.18}$$

É claro que as funções φ_n são integráveis e $\varphi_n \to v'$ quase sempre em $[a,b]$. Além disso, as φ_n são não negativas. Vamos provar que para todo n, tem-se $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx \le v(b) - v(a) = C$ e pelo Lema de Fatou (Teorema 2.19) ter-se-á o resultado desejado. De (5.18) tem-se

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx &= \frac{1}{h}\int_a^b v(x+h)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^b v(x)\,dx\\ &= \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} v(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^h v(x)\,dx.\end{aligned}$$

Daí podemos escrever que

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = {}& \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b} v(x)\,dx + \frac{1}{h}\int_b^{b+h} v(x)\,dx\\ & - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} v(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b} v(x)\,dx\\ = {}& \frac{1}{h}\int_b^{b+h} v(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} v(x)\,dx \le v(b) - v(a),\end{aligned}$$

uma vez que v é crescente e $v(x) = v(b)$ para os valores de x superiores a b. □

Voltando à discussão da questão (Q3) verificamos que as funções monótonas contínuas não resolvem o nosso problema. Necessitamos de uma condição mais forte que a continuidade a qual passaremos a descrever.

5.11 Definição. Uma função $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita *absolutamente contínua* quando para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)$ de subintervalos de $[a,b]$ dois a dois disjuntos satisfazendo a condição

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

tem-se, necessariamente,

$$\sum_{k=1}^{n}|u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon. \tag{5.19}$$

É claro que toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua e portanto é contínua. No entanto a recíproca não é verdadeira pois existe funções uniformemente contínuas que não são absolutamente contínuas (ver [8]).

As funções lipschitzianas são absolutamente contínuas. Diz-se que u é *lipschitziana* quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|u(x) - u(y)| \le C|x-y|$ para todo par x, y de $[a,b]$. Conseqüentemente, se u é lipschitziana, para todo coleção finita de subintervalos $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ $,\dots,(a_n,b_n)$ de $[a,b]$ dois a dois disjuntos tem-se

$$\sum_{k=1}^{n}|u(b_k) - u(a_k)| \le C\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k).$$

Portanto dado $\varepsilon > 0$, basta considerar $\delta = \varepsilon/C$ para se ter a condição de continuidade absoluta satisfeita.

5.12 Proposição. *Se $u \in L(a,b)$ então as integrais indefinidas de u são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração: Seja $v(x) = \int_a^x u(t)\,dt + C$ uma integral indefinida de u e seja $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ subintervalos de $[a, b]$ dois a dois disjuntos. Então

$$\sum_{k=1}^{n} |v(b_k) - v(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} u(t)\,dt \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |u(t)|\,dt \; - \!\!\!\!\int_E |u(t)|\,dt,$$

onde

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} \{(a_k, b_k)\}.$$

Mas, pela Proposição 4.10, tem-se que $\int_E |u(t)| dt \to 0$ quando $\mu(E) \to 0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\mu(E) < \delta$ então $\int_E |u(t)| dt < \varepsilon$. Observando que $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$, fica provada a proposição.

5.13 Proposição. *Toda função absolutamente contínua é de variação limitada.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Da continuidade absoluta de u decorre que podemos escolher um $\delta > 0$ de modo que em cada subintervalo de $[a, b]$ com comprimento inferior de δ a variação total de u é inferior a ε e portanto limitada. Como o intervalo $[a, b]$ pode ser dividido em um número finito de subintervalos de comprimentos inferiores a δ, segue-se que a variação total de u em $[a, b]$ será limitada. □

5.14 Observação. Como conseqüência deste resultado, conclui-se que toda função absolutamente contínua é derivável quase sempre em $[a, b]$, conforme Observação 5.7.

5.15 Observação. O conjunto das funções absolutamente contínuas é fechado para a soma e para o produto por escalares; assim é um subespaço do espaço das funções de variação limitada.

5.16 Lema. *Seja $v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínua. Se a derivada de v é nula quase sempre em $[a, b]$, então v é uma função constante.*

Demonstração: Seja $a < c \leq b$. Vamos mostrar que $u(c) = u(a)$. Designemos, para isto, por E o conjunto dos pontos de (a, c) onde a derivada de v se anula. Por hipótese tem-se $\mu(E) = c - a$. Seja $\varepsilon > 0$ dado e $\delta > 0$ o correspondente de ε na definição de função absolutamente contínua. Os intervalos $[x, x+h]$, $x \in E$, $h > 0$, tais que $[x, x+h] \subset (a, c)$ e

$$(5.20) \qquad |u(x+h) - u(x)| < \frac{\varepsilon h}{c-a},$$

cobrem E no sentido de Vitali. Logo, pelo Lema de Vitali, uma família finita $I_1 = [x_1, x_1 + h_1], \ldots, I_n = [x_n, x_n + h_n]$, desses intervalos, $I_1, \ldots, I_n$ disjuntos dois a dois, é tal que $m_e\big(E - \bigcup_{j=1}^{n} I_j\big) < \delta$. Sem quebra da generalidade podemos supor que $x_j + h_j < x_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$. Temos, por hipótese, $(a, c) = E \cup F$ onde $\mu(F) = 0$. Daí vem

$$(x_1 - a) + (x_2 - x_1 - h_1) + \cdots + (c - x_n - h_n) = m_e\Big((a, c) - \bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big)$$

$$= m_e\Big[(a, c) \cap C\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big)\Big] = m_e\Big[(E \cup F) \cap C\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big)\Big]$$

$$\leq m_e\Big(E \cap C\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big)\Big) + m_e\Big(F \cap C\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big)\Big) = m_e\Big(E \cap C\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big)\Big) < \delta$$

donde, pela escolha de δ,

$$(5.21) \qquad |u(x_1) - u(a)| + \sum_{j=1}^{n-1} |u(x_{j+1}) - u(x_j + h_j)| \\ + |u(c) - u(x_n + h_n)| < \varepsilon.$$

Fazendo $x = x_j$ e $h = h_j$, $j = 1, \ldots, n$, em (5.20) e somando membro a membro tem-se

$$(5.22) \qquad \sum_{j=1}^{n} |u(x_j + h_j) - u(x_j)| < \frac{\varepsilon \sum h_j}{c - a} \leq \varepsilon.$$

De (5.21) e (5.22) vem, somando membro a membro, $|u(c)-u(a)| < 2\varepsilon$, donde $u(c) = u(a)$.

5.17 Teorema (Lebesgue). *A derivada u de uma função v, absolutamente contínua em $[a,b]$, é integrável em $[a,b]$ e para cada $x \in [a,b]$ tem-se*

$$v(x) = \int_a^x u(t)\,dt + v(a).$$

Em outras palavras, toda função absolutamente contínua é uma integral indefinida de sua derivada.

Demonstração: Seja v uma função absolutamente contínua em $[a,b]$. Pela Proposição 5.13 v é de variação limitada, donde $v = v_1 - v_2$, onde v_1 e v_2 são funções monótonas crescentes. Daí vem $u = v' = v_1' - v_2'$ e, como pela Proposição 5.10, v_1' e v_2' são integráveis, u é integrável. Seja, então, w a função definida em $[a,b]$ por

$$w(x) = \int_a^x u(t)\,dt.$$

Pelo Teorema 5.9, w é derivável quase sempre em $[a,b]$ e $w' = u$ quase sempre em $[a,b]$. Pela Proposição 5.12 w é absolutamente contínua. Logo a função $g = v - w$ é absolutamente contínua e $g' = v' - w' = 0$ quase sempre, donde g é uma função constante, pelo Lema 5.16. Portanto,

$$v(x) = w(x) + g(x) = \int_a^x u(t)\,dt + g(a)$$

e como daí vem $v(a) = g(a)$,

$$v(x) = \int_a^x u(t)\,dt + v(a).$$

□

5.18 Corolário. *Uma função v é integral indefinida de sua derivada se e só se v é absolutamente contínua. Em outros termos, uma primitiva v de u é uma integral indefinida de u se e só se v é absolutamente contínua.*

Demonstração: Conseqüência trivial do Teorema 5.17 e da Proposição 5.12.

O Corolário 5.18 responde à questão (Q3) proposta no início deste capítulo.

5.19 Observação. Consideremos ainda a equação $v' = u$. Já vimos que se u é integrável à Lebesgue esta equação pode ter dois tipos de solução (no sentido quase sempre):

(i) Aquelas que são integrais indefinidas de u;

(ii) Aquelas que não são.
Se u não é integrável à Lebesgue a referida equação ainda pode ter solução só que uma tal solução é obrigatoriamente do tipo (ii). Na grande maioria dos casos práticos as soluções do tipo (i) são as que interessam e neste caso a teoria de Lebesgue nos fornece um estudo completo de tais soluções, o que não ocorria com a teoria de Riemann, conforme tivemos oportunidade de constatar. Porém, a integral de Lebesgue não se presta ao estudo das soluções do tipo (ii). Para isto pode-se recorrer à teoria da Totalização ou integral de Denjoy em homenagem ao seu criador Arnaud Denjoy (1915) e também à integral de Perron, idealizada por Oskar Perron (1914). Todavia, tais teorias estão fora dos objetivos deste texto e por isso limitamo-nos apenas a citá-las. O leitor interessado poderá encontrá-las em textos mais avançados sobre a teoria da integração.

5.5 Integração por partes e mudança de variáveis

As fórmulas clássicas de integração por partes e mudança de variáveis são ainda válidas para as funções integráveis à Lebesgue com ligeiras adaptações ao novo contexto.

Antes de demonstrarmos a fórmula de integração por partes, provaremos o seguinte lema:

5.20 Lema. *O produto de duas funções absolutamente contínuas é uma função absolutamente contínua.*

Demonstração: Sejam u e v funções absolutamente contínuas definidas em $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$ escolhamos um $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ de subintervalos de $[a, b]$ dois a dois disjuntos satisfazendo a condição

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

se tenha

$$\sum_{k=1}^{n} |u(b_k) - u(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.23}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |v(b_k) - v(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{5.24}$$

Sendo u, v absolutamente contínuas elas são contínuas em $[a, b]$ e portanto existe uma constante $M > 0$ tal que se tem $|u(x)| \leq M$ e $|v(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Levando isto em conta e as desigualdades (5.23), (5.24) obtemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} |u(b_k)v(b_k) - u(a_k)v(a_k)| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |u(b_k)[v(b_k) - v(a_k)] + v(a_k)[u(b_k) - u(a_k)]| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{n} |v(b_k) - v(a_k)| + M \sum_{k=1}^{n} |u(b_k) - u(a_k)| \leq M\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto uv é absolutamente contínua. □

5.21 Proposição. *Sejam u, v funções integráveis em $[a, b]$ e sejam F, G integrais indefinidas de u, v, respectivamente. Então Fv e Gu são integráveis em $[a, b]$ e tem-se*

$$\int_a^b Fv + \int_a^b Gu = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Demonstração: Pela Proposição 5.12 as funções F e G são absolutamente contínuas logo contínuas. Se M é tal que $|F(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, obtemos que

$$|F(x)v(x)| \leq M|v(x)|$$

para todo $x \in [a, b]$ e portanto Fv é integrável. De modo análogo prova-se que Gu é integrável. Sendo absolutamente contínuas, as funções F e G são deriváveis quase sempre em $[a, b]$; portanto FG é derivável quase sempre e tem-se, naturalmente,

$$(FG)' = FG' + F'G. \tag{5.25}$$

Pelo teorema de Lebesgue (Teorema 5.17), obtém-se de (5.25) que

$$\int_a^b Fv + \int_a^b Gu = F(b)G(b) - F(a)G(a),$$

uma vez que $G' = v$ e $F' = u$. $\square$

Para encerrar a Seção, demonstraremos a fórmula de mudança de variáveis.

5.22 Proposição. *Seja u uma função crescente e absolutamente contínua no intervalo $[a, b]$. Seja f uma função integrável no intervalo $[u(a), u(b)]$. Então a função $(f \circ u)u'$ é integrável em $[a, b]$ e tem-se*

$$\int_a^b (f \circ u)u' = \int_{u(a)}^{u(b)} f. \tag{5.26}$$

Demonstração: Inicialmente suponhamos que f é a função característica de um intervalo $[\alpha, \beta] \subset [u(a), u(b)]$. Como u é contínua existem pontos de $[a, b]$ onde u assume os valores α e β. Sejam

$$\begin{aligned} c &= \inf\{x \in [a, b]; \quad u(x) = \alpha\} \\ d &= \sup\{x \in [a, b]; \quad u(x) = \beta\}. \end{aligned}$$

Portanto $u(c) = \alpha$ e $u(d) = \beta$ pela continuidade da u. Além disso $c \leq d$ porque u é crescente. Como $f \circ u$ é a função característica de $[c, d]$, obtemos que

$$\int_a^b (f \circ u)u' = \int_c^d u' = u(d) - u(c) = \beta - \alpha = \int_{u(a)}^{u(b)} f.$$

Portanto, a fórmula (5.26) é válida quando f é a função característica de um intervalo contido em $[u(a), u(b)]$ e conseqüentemente será válida quando f é uma função escada neste mesmo intervalo. Suponhamos agora que f é uma função pertencente à classe S_1 no intervalo $[u(a), u(b)]$ (conforme definição dada na Seção 1.3). Então existe uma sucessão crescente de funções escada (φ_n) convergindo quase sempre para f em $[u(a), u(b)]$. Como $u'(t) \geq 0$ quase sempre em $[a, b]$ uma vez que u é crescente, a sucessão de funções $([\varphi_n \circ u]u')$ é também crescente. Além disso ela converge quase sempre em $[a, b]$ para $(f \circ u)u'$. Para ver isto, seja E o conjunto dos pontos em $[u(a), u(b)]$ para os quais φ_n não converge para f. É claro que $(\varphi_n \circ u)u'$ converge para $(f \circ u)u'$ nos pontos t de $[a, b]$ onde $u'(t) = 0$ e também naqueles pontos t para os quais $u(t) \notin E$. Se denotarmos por A o conjunto dos pontos de $[a, b]$ onde $(\varphi_n \circ u)u'$ não converge para $(f \circ u)u'$ então se $t \in A$ devemos ter necessariamente $u(t) \in E$ e $u'(t) > 0$ (aqui estamos omitindo os pontos de $[a, b]$ onde u' não existe uma vez que eles formam um conjunto de medida nula). Devemos provar que A tem medida nula. Seja $\{I_n\}$ um recobrimento enumerável de E por intervalos tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{amp}(I_n)$ seja finita, e cada ponto de E está contido num número infinito de tais intervalos. Isto é possível porque E tem medida nula. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja ψ_k a soma das funções características dos intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_k$ (que são subintervalos de $[u(a), u(b)]$). Logo (Ψ_k) é uma sucessão crescente de funções escada que tende para $+\infty$ em cada ponto de E. Desta forma a sucessão de funções $([\Psi_k \circ u]u')$ é também crescente e tende para $+\infty$ nos pontos de A. Como a sucessão das integrais

$$\int_a^b (\Psi_k \circ u)u' = \int_{u(a)}^{u(b)} \Psi_k = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{amp}(I_k)$$

é limitada, segue-se do Teorema de Beppo Lei que o conjunto A tem medida nula. Assim $(\varphi_n \circ u)u'$ converge para $(f \circ u)u'$ quase sempre em $[a, b]$. Além disso, tem-se

$$\int_a^b (\varphi_n \circ u)u' = \int_{u(a)}^{u(b)} \varphi_n \to \int_{u(a)}^{u(b)} f \quad \text{(porque } f \in S_1\text{)}.$$

Ainda pelo Teorema de Beppo Levi teremos que $(f \circ u)u'$ é integrável e vale a fórmula (5.26). Para se obter a validade da fórmula no caso em que f é integrável é só notar que f é, por definição, diferença de duas funções de S_1. $\square$

Bibliografia

[1] Asplund, E. and Bungart, L. A First Course in Integration, Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1966).

[2] Bartle, R.G. The Elements of Integration, John Willey & Sons, Inc. (1966).

[3] Cotlar, M. and Cignoli, R. An Introduction to Functional Analysis, North-Holland Publ. Co. (1974).

[4] Day, M.M. The Spaces L^p with $0 < p < 1$. Bulletin of Amer. Math. Soc. 46 (1940), pp. 816-823.

[5] Dixmier, J. L'Integrale de Lebesgue, Centre de Documentation Universitaire Sorbone (1967).

[6] Figueiredo, D.G. Análise na Reta, IMPA, 9º Colóquio Brasileiro de Matemática (1973).

[7] Hönig, C.S. A Integral de Lebesgue e suas Aplicações, IMPA, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática (1977).

[8] Kolmogorov, A.N. y Fomin, S.V. Elementos de la Teoria de Funciones y del Análisis Funcional, Editorial Mir (1972).

[9] Lebesgue, H. Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives, 3rd Ed. Chelsea (1973).

[10] Liusternik, L.A. and Sobolev, V.J. Elements of Functional Analysis, Frederic Ungar Publ. Co. (1961).

[11] Medeiros, L.A. Semilinear Wave Equations, in Partial Differential Equations and Related Topics, Lectures Notes in Mathematics nº 446, Springer-Verlag, N.Y. (1975). Edited by Jerome Goldstein.

[12] Medeiros, L.A.; Malta, S.M.; Limaco, J.; Clark, H.R. Lições de Análise Matemática – IM-UFRJ (2005), Rio de Janeiro, RJ.

[13] Munroe, M.E. Introduction to Measure and Integration, Addison Wesley Publ. Co. Cambridge 42, Mass. USA (1953).

[14] Natanson, I.P. Theory of Functions of a Real Variable, Vol. I, Frederic Ungar Publ. Co. (1961).

[15] Riesz, F. Sur l'Integrale de Lebesgue, Acta Math., 42 (1919/1920), pp. 191-205.

[16] Riesz, F. Sur la Convergence en Moyene, Acta Sci. Math., 4 (1928), pp. 58-64, 182-185.

[17] Riesz, F. and Sz-Nagy, B. Functional Analysis, Frederic Ungar Publ. Co. (1955).

[18] Shilov, G.Y. Mathematical Analysis (A Special Course), Pergamon Press, 1st Ed. (1965).

[19] Solovay, R.M. A model of set-theory in which every sets of reals is Lebesgue measurable, Annals of Math. (2) 92, 1 (1970), pp. 1-56.

[20] Spivak, M. Calculus, Addison Wesley (1973).

[21] Strauss, W.A. On weak solutions of semi-linear hyperbolic equations, Anais da Academia Brasileira de Ciências, 42 (4) 1972, pp. 645-651.

[22] Sz-Nagy, B. Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions, Oxford University Press, N.Y. (1965).

[23] Titchmarsh, E.C. The Theory of Functions, Oxford University Press, 2nd Ed. (1939).

[24] Ulam, S.M. What is measure? Amer. Math. Monthly 50 (1943), pp. 597-602.

[25] Van Daley, D. and Monna, A.F. Sets and Integration an Outline of the Development, Wolters-Noordhoff Publ. Gröningen (1972).

[26] Verley, J.L. Théorie Élémentaire de l'Intégration, Centre de Documentation Universitaire Sorbone, 2e Ed. (1968).

[27] Weir, A.J. Lebesgue Integration & Measure, Cambridge University Press, (1973).

Índice

COMPLEMENTOS

1.

Exemplo de Função não Absolutamente Contínua

No Capítulo 5 foi estudada a validade do Teorema Fundamental do Cálculo na classe $L(a,b)$ concluindo-se sua validade na subclasse de $L(a,b)$ constituída pelas funções Absolutamente Contínuas. A seguir, será estudado um exemplo significativo e educativo de uma função não absolutamente contínua. Trata-se de uma função contínua, não decrescente, não constante com derivada nula quase sempre. Este exemplo foi mencionado por H. Lebesgue em 1904. Na esperança de tornar clara a exposição, será feita a construção do conjunto de Cantor. (E. Hille-J.D. Tamarkin, *Remarks on a known example of monotone continuous function*, Amer. Math. Monthly, 36 (1929), pp. 255-264).

• Considere-se o intervalo $(0,1)$ da reta real $\mathbb{R}$. Será feita uma sucessão de trisecções e remoções dos intervalos intermediários, pelo processo seguinte:

Etapa 1. Divide-se $[0,1]$ em três subintervalos iguais, $\big(0,\frac{1}{3}\big)$, $\big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\big)$, $\big(\frac{2}{3},1\big)$, removendo-se de $(0,1)$ o subintervalo aberto intermediário, $\big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\big)$. Assim, restam em (0,1) os pontos $\big(0,\frac{1}{3}\big)$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\big(\frac{2}{3},1\big)$.

Etapa 2. Divide-se cada um dos subintervalos restantes: $\big(0,\frac{1}{3}\big)$ e $\big(\frac{2}{3},1\big)$ em três subintervalos iguais, obtendo-se:

$$(0,\frac{1}{3^2}),\ \ (\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}),\ \ (\frac{2}{3^3},\frac{1}{3})$$

e

$$\Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\Big), \quad \Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\Big), \quad \Big(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}, 1\Big).$$

Removendo-se os intervalos intermediários:

$$\Big(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\Big) \quad \text{e} \quad \Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\Big),$$

restam em $(0,1)$ os pontos:

$$\Big(0, \frac{1}{3}\Big), \ \frac{1}{3}\,, \ \frac{2}{3^2}\,, \ \Big(\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\Big)$$

e

$$\Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\Big), \ \ \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\,, \ \ \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\,, \ \ \Big(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}, 1\Big).$$

Repete-se, indefinidamente, este processo de trisecção e remoção dos intervalos intermediários. O número de intervalos removidos na etapa n é igual a 2^{n-1}. Estes intervalos, em cada etapa, serão ordenados, da esquerda para a direita, representados por

$$\delta_{nk}\,, \ \ k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}.$$

A amplitude de cada δ_{nk} é $\frac{1}{3^n}\cdot$

Etapa 1. Removeu-se

$$\delta_{11} = \Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big).$$

Etapa 2. Foram removidos

$$\delta_{21} = \Big(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\Big), \qquad \delta_{22} = \Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\Big).$$

Etapa 3. Foram removidos os 2^2 intervalos

$$\begin{aligned}
\delta_{31} &= \Big(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\Big),\\
\delta_{32} &= \Big(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3}\Big),\\
\delta_{33} &= \Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^3}\Big),\\
\delta_{34} &= \Big(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}\Big).
\end{aligned}$$

O número total de subintervalos removidos de $(0,1)$, ao final de n etapas, é:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Representa-se por E o subconjunto de $(0,1)$ constituído pelos pontos não removidos no processo anterior. Representando-se por D o complemento de E relativamente a $(0,1)$, obtém-se:

$$D = \bigcup \delta_{nk}\,.$$

Note-se que na união anterior são considerados, somente os pontos interiores dos δ_{nk}. O conjunto E consiste de todos os pontos de $(0,1)$ que são extremos dos intervalos δ_{nk} e de seus limites. Representando-se por $\alpha_{nk} < \beta_{nk}$ os extremos de δ_{nk}, obtém-se para δ_{34} os extremos:

$$\alpha_{34} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} \quad \text{e} \quad \beta_{34} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}\,.$$

Os extremos β_{34} representa-se pelo número triádico

$$\beta_{34} = 0,22200\ldots$$

enquanto

$$\alpha_{34} = 0,22100\ldots\,.$$

Para o que se tem em mente considerar, é necessário que apareça na parte fracionária do número triádico apenas os algarismos 0 ou 2.

Note-se que

$$\frac{1}{3^3} = \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots$$

ou, no sistema triádico:

$$\frac{1}{3^2} = 0,00022\dots ,$$

com os algarismos 0 ou 2. Observe-se que obtém-se, de fato,

$$\frac{1}{3^3} = \lim_{p\to\infty} \Big(\frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots + \frac{2}{3^{4+p}}\Big) \cdot$$

Consegüintemente,

$$\alpha_{34} = 0,22022\dots$$

com algarismos 0 ou 2, na base triádica.

De modo geral, os extremos α_{nk} e β_{nk} de δ_{nk} são da forma:

$$\alpha_{nk} = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}$$

e

$$\beta_{nk} = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \cdot$$

Sendo

$$\frac{1}{3^n} = \frac{0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \dots ,$$

obtém-se, na representação em números triádicos

$$\alpha_{nk} = 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1}\, 0222\dots$$

e

$$\beta_{nk} = 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1}\, 2000\dots$$

sendo os a_i iguais a 0 ou 2.

Portanto, os pontos de E são representados pelas frações triádicas

$$0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

com os a_i iguais a 0 ou 2.

Com o objetivo de deduzir algumas propriedades simples do conjunto E, representa-se por η_{nk} os k subintervalos não removidos de $(0,1)$ na Etapa n sendo $k = 2, 2^2, \ldots, 2^n$. A amplitude de η_{nk} é $\frac{1}{3^n} \cdot$ O número total de η_{nk} na Etapa n é 2^n, logo a soma das amplitudes dos η_{nk} na Etapa n é $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, que tende a zero quando n tende para o infinito. Portanto estando E contido na união dos η_{nk}, conclui-se que E possui medida de Lebesgue zero.

Note-se que os pontos de abcissas representados no sistema triádico por $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, com os a_i iguais a zero ou dois, são aproximados por números do mesmo tipo. Por conseguinte, E possui todos os seus pontos de acumulação, concluindo-se que E é um conjunto perfeito.

Observe-se que há subintervalos de $(0,1)$ contidos nos subintervalos removidos, os quais não possuem pontos de E. Conclui-se, daí, que E é não denso em $(0,1)$.

Outro resultado significativo do conjunto E é que seu número cardinal é igual ao do intervalo $(0,1)$. (Veja G. Birkoff–S. Mac Lane, *A survey of modern algebra*, Mac Millan Co. (1948), N.Y., pp. 338-339).

ESCOLIUM. Pelo processo de trisecção do intervalo $(0,1)$ e remoção dos subintervalos intermediários, construiu-se um subconjunto E de $(0,1)$, de medida de Lebesgue nula, perfeito, não denso em $(0,1)$ e com cardinal igual ao cardinal do intervalo $(0,1)$. O conjunto E foi idealizado por Cantor e por isto é denominado Conjunto de Cantor. $\square$

A seguir será definida em $(0,1)$ com valores em $(0,1)$ uma função contínua, derivável mas não absolutamente contínua. Este exemplo foi idealizado por H. Lebesgue em 1904.

De fato, como foi visto anteriormente, todo ponto de E é da forma:

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots ,$$

no sistema triádico, sendo os a_i zero ou dois. Sob a forma de série, obtém-se:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots .$$

Considere-se a função ξ definida em E por

$$\xi(x) = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} + \ldots$$

sendo $b_i = \frac{a_i}{2}$, os b_i serão 0 ou 1. Logo $\xi(x)$ leva x triádico na base diádica. Ela está bem definida em E com valores em $(0,1)$.

- Cálculo de ξ nos extremos dos δ_{nk}.

Como visto anteriormente, os extremos α_{nk} e β_{nk} de δ_{nk} são da forma:

$$\alpha_{nk} = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \ldots$$

e

$$\beta_{nk} = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n},$$

com os a_i iguais a zero ou dois.

Na definição de ξ, obtém-se:

$$\begin{aligned}\xi(\alpha_{nk}) &= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{0}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots = \\ &= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \xi(\beta_{nk}).\end{aligned}$$

Portanto, ξ toma valores iguais nos extremos dos intervalos δ_{nk}. Estende-se a definição aos pontos interiores a δ_{nk}, definido ξ constante igual ao valor comum nos extremos.

Sendo

$$0 = 0,000\ldots \qquad \text{e} \qquad 1 = 0,222\ldots,$$

na base triádica, calcula-se $\xi(0) = 0$ e $\xi(1) = 1$.

Portanto ξ está definida em todos os pontos do intervalo $(0,1)$ com valores em $(0,1)$, mesmo nos extremos.

- ξ é monótona não decrescente.

É suficiente provar para os pontos de E porque ela é constante nos outros pontos. Considere dois pontos $x'' \geq x'$ de E. Tem-se

$$x' = 0, a_1' a_2' \dots a_n' \dots \qquad \text{e} \qquad x'' = a, a_1'' a_2'' \dots a_n'' \dots ,$$

e para algum n tem-se

$$a_1' = a_1'', \dots, a_{n-1}' = a_{n-1}'' \quad \text{mas} \quad a_n'' \geq a_n' .$$

Logo pela definição de ξ obtém-se $\xi(x'') \geq \xi(x')$. □

Assim ξ cresce de 0 a 1, permanecendo constante nos intervalos δ_{nk} .

- ξ é contínua em $(0,1)$.

É suficiente restringir-se aos pontos de E. De fato, sejam

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad \text{e} \quad x' = 0, a_1' a_2' \dots a_n' \dots$$

pontos de E sendo $x' \to x$. Logo, há valores de n, quando n cresce, tais que

$$a_m' = a_m \quad \text{para todo} \quad m < n.$$

Resulta que

$$\xi(x') = 0, b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n \to 0, b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n = \xi(x).$$

□

Logo ξ contínua e monótona é derivável quase sempre em $(0,1)$ e $\xi'(x) = 0$ quase sempre. Não vale o Teorema Fundamental do Cálculo para ξ, porque

$$\int_0^1 \xi'(x)\, dx \neq \xi(1) - \xi(0).$$

- ξ não é absolutamente contínua.

Deduz-se do último argumento. Será feita uma demonstração direta.

Considere-se a decomposição $(\alpha_{nk}, \beta_{nk})$ de $(0,1)$ sendo α_{nk}, β_{nk} os extremos de δ_{nk}. Tem-se

$$\xi(\alpha_k) = 0, b_1 \dots b_{n-1}\, 0111 \dots$$

e

$$\xi(\beta_{nk}) = 0, b_1 \dots b_{n-1}\, 1000 \dots$$

no sistema diádico. A função é não decrescente. Logo

$$\sum_k |\xi(\beta_{nk}) - \xi(\alpha_{nk})| = \sum_k \{\xi(\beta_{nk}) - \xi(\alpha_{nk})\} = \xi(1) - \xi(0) = 1.$$

Tem-se

$$\sum_k (\beta_k - \alpha_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo ξ não é absolutamente contínua.

É simples obter-se uma imagem gráfica da função ξ no sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no plano $\mathbb{R}^2$. Relembrando-se os intervalos δ_{nk}, obtém-se:

$$\xi(x) = \frac{1}{2} \text{ em } \delta_{11}\,; \qquad \xi(x) = \frac{1}{4} \text{ em } \delta_{21}\,; \qquad \xi(x) = \frac{3}{4} \text{ em } \delta_{22} \dots .$$

Colocando estes números no sistema de coordenadas obtém-se uma idéia do gráfico de ξ. (A. Kolmogorov–S. Fomin, *Éléments de la Théorie des Fonctions et d'Analyse Fonctionelle* – Éditions Mir-Moscou (1974), p. 336). □

2.
Henri Lebesgue (1875-1941)

Em 1901 Lebesgue publicou uma pequena nota no "C.R. Acad. Sci. Paris, 132, (1901) pp. 86-88", completando um século em 2001. Aliás, o conteúdo desta nota não ocuparia mais de uma página. Nela, Lebesgue muda de modo profundo a maneira de definir a integral idealizada por Riemann-Darboux.

Dada a relevância para o desenvolvimento da Análise Matemática, por ocasião do centenário da nota de Lebesgue, op. cit., J.M. Bony, G. Choquet, G. Lebeau, publicaram: "Le centenaire de l'integrale de Lebesgue, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, (2001) pp. 85-90", salientando a profunda mudança na Análise Matemática motivada pelas idéias de Lebesgue.

Para definir seu novo conceito de integral, Lebesgue faz a observação que é repetida a seguir.

Supõe $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada, crescente, sendo m, M, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f em $[a,b]$, veja Figura 1.

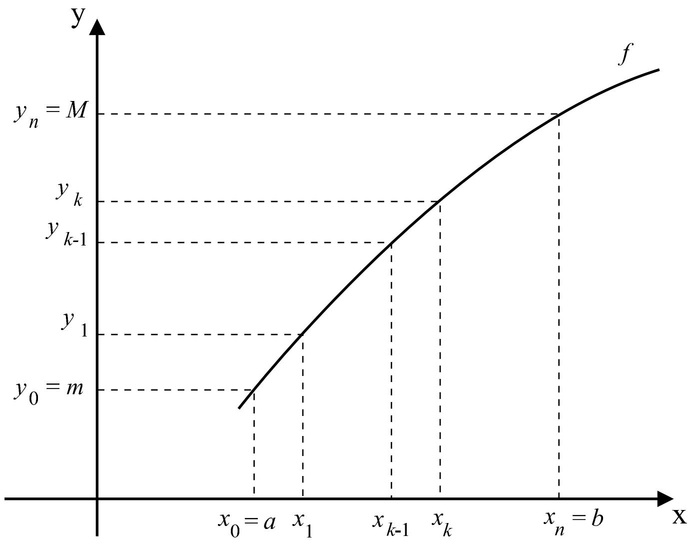


Fig. 1

Considere-se uma partição P de $[a,b]$ em intervalos $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\ldots,n$. Esta determina uma partição em intervalos $[y_{k-1},y_k]$, $k=1,\ldots,n$, de $[m,M]$. Reciprocamente, em face de ser f crescente em $[a,b]$, uma partição de $[m,M]$ em intervalos $[y_{k-1},y_k]$, $k=1,\ldots,n$, determina uma partição de $[a,b]$ em intervalos $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\ldots,n$. Portanto, no caso crescente, qualquer método de partição de $[a,b]$ ou $[m,M]$ conduz a um mesmo conceito de integral, considerando-se:

$$(1) \qquad s_P=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})y_{k-1} \quad \text{e} \quad S_P=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})y_k\,.$$

Conclui Lebesgue que no caso em que f é crescente, limitada, obtém-se as integrais inferior e superior de Riemann-Darboux com partições de $[a,b]$ ou $[m,M]$, conduzindo ao mesmo conceito de integral. O caso decrescente limitado é análogo.

Suponha $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ limitada mas não necessariamente monótona, cf. Figura 2.

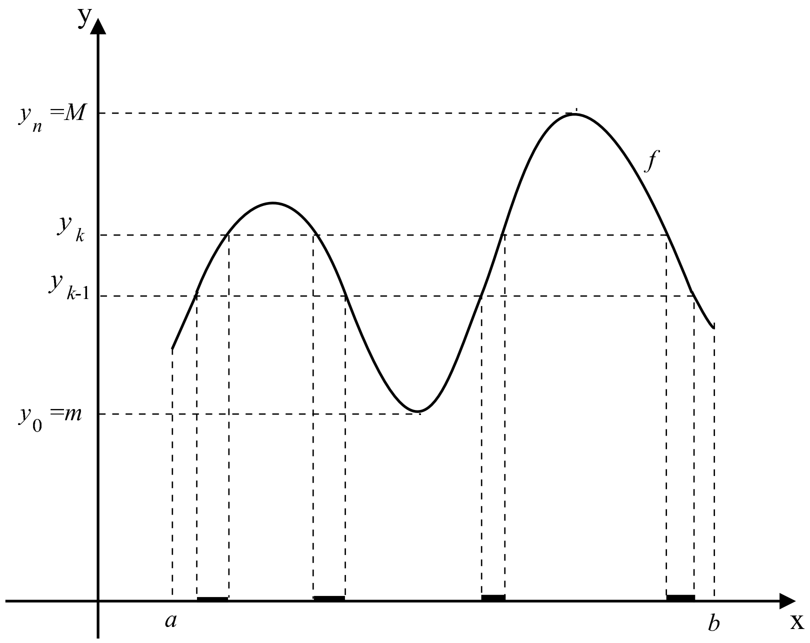


Fig. 2

Uma partição em $[a,b]$ em intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, permite definir as somas de Darboux conduzindo a um conceito de integral de Riemann.

Entretanto, fazendo-se uma partição $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \dots, n$, $y_0 = m$, $y_n = M$, *conclui-se que em* $[a,b]$ *não se tem uma partição em intervalos, veja* Fig. 4, *para um caso simples.* Em $[a,b]$ obtém-se os conjuntos:

$$\{x \in [a,b];\ y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\},$$

que, no caso Fig. 2, compõe-se da união de quatro intervalos, sem ponto comum. *Se* f *for muito oscilante em* $[a,b]$ *a partição de* $[m,M]$ *determina subconjuntos bem gerais em* $[a,b]$.

Assim, segue-se um método heurísitco para concluir a nova definição proposta por Lebesgue.

De fato, da partição $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \dots, n$, $y_0 = m$, $y_n = M$, de $[m, M]$, resulta em $[a,b]$ a partição

$$E_k = \Big\{x \in [a,b];\, y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\,,\ k = 1, \dots, n\Big\}, \tag{2}$$

mas em subconjuntos E_k.

Desejando-se manter as somas (1) para obter o novo conceito de Lebesgue, surgem os problemas:

(i) Como atribuir aos E_k dados por (2) um número positivo que corresponda a "medida" dos E_k como $x_k - x_{k-1}$ mede o comprimento dos intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$?

Suponha resolvido este problema. A cada E_k, dado por (2), atribui-se um número positivo representado por $\mu(E_k)$, que se lê "medida do conjunto E_k", generalizando o conceito de amplitude do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. A estes conjuntos E_k aos quais atribui-se uma medida, *Lebesgue denominou mensuráveis. Os intervalos* $[x_{k-1}, x_k]$ *são mensuráveis.*

Desta forma, as somas (1) são reescritas, no caso de partição em $[m, M]$ em intervalos $[y_{k-1}, y_k]$, $y_0 = m$, $y_n = M$, $k = 1, \dots, n$, sob a forma:

$$s_P = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,\mu(E_k) \quad \text{e} \quad S_P = \sum_{k=1}^{n} y_k\,\mu(E_k). \tag{3}$$

Resolvida esta etapa, surge um problema crucial:

(ii) Para quais funções limitadas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é possível atribuir uma "medida" $\mu(E_k)$ aos conjuntos E_k, da partição de $[a,b]$? Dito de modo equivalente, para quais funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitadas, os conjuntos E_k de $[a,b]$ são "mensuráveis"?

Deste modo, para responder a questão (ii) *Lebesgue restringe as funções limitadas à classe que ele denominou "funções mensuráveis."* Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada, denominou "mensurável" quando para todo par de números $\alpha < \beta$, o conjunto

$$\big\{x \in [a,b];\, \alpha < f(x) < \beta\big\},$$

for "mensurável".

Conclui-se que tudo fica em ordem para as funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitadas e mensuráveis. Ele observa que as funções contínuas a menos de conjunto de medida nula são exemplos de funções mensuráveis.

Conclusão. Aceitando-se as noções de conjunto e função mensurável, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for limitada e mensurável as somas s_P e S_P definidas em (3) estão bem definidas. Assim, define-se as integrais inferior e superior, respectivamente, por $\sup\limits_P\{s_P\}$ e $\inf\limits_P\{S_P\}$. Quando estas integrais forem iguais, a este valor comum denomina-se integral de Lebesgue da função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, representada por

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lebesgue provou que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for limitada e mensurável, então f é integrável.

Suponha que se deseja ensinar a integral como idealizou Lebesgue, por exemplo para funções

$$u\colon (a,b) \to \mathbb{R}.$$

As etapas seriam as seguintes:

(i) definir a noção de medida e conjunto mensurável para os subconjuntos de (a,b),

(ii) definir a noção de função mensurável para as $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$,

(iii) de posse destas noções tudo fica em ordem sendo possível seguir corretamente o processo heurístico.

Há uma vasta bibliografia com a construção da integral de Lebesgue pelo processo original de Lebesgue. Entre estes, veja por exemplo Natanson [13], Titchmarsh [22].

Note-se que a criação de Lebesgue modificou a Análise Matemática a partir de sua nota de 1901. Todos os cursos básicos de matemática incluem uma disciplina denominada Integral de Lebesgue, imprescindível na formação dos estudantes de matemática.

3.

Conjuntos Não Mensuráveis à Lebesgue

Será apresentado um exemplo de conjunto não mensurável à Lebesgue. A idéia aqui exposta vimos, pela primeira vez, no livro de John Von Neumann, Functional Operators, Vol. I, Measures and Integrals, página 38, Princeton, USA, 1954. Posteriormente encontramos em outros textos, sendo reproduzida a idéia no presente apêndice.

Representando por $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e por $\mathbb{Q}$ o dos racionais, considere-se em $\mathbb{R}$ a relação binária "$\sim$", definida do modo seguinte: para $x, y \in \mathbb{R}$ diz-se que $x \sim y$, lendo-se x equivalente a y, se $x - y$ for um número racional. Demonstra-se que a relação "$\sim$"

assim definida em $\mathbb{R}$ é uma relação de equivalência, isto é, reflexiva, simétrica e transitiva. Como conseqüência, o corpo $\mathbb{R}$ fica decomposto em classes de equivalência do tipo

$$K(x) = \{x + r;\ r \in \mathbb{Q}\},$$

para x variando em $\mathbb{R}$. Resulta que $x \not\sim y$ então $K(x) \cap K(y) = \varnothing$, isto é, as classes $K(x)$ e $K(y)$ são disjuntas. Cada classe $K(x)$ contém pontos do intervalo $[0, 1]$. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$ toma-se $r \in \mathbb{Q}$ tal que $-x \leq r \leq 1 - x$, ou seja, $0 \leq x + r \leq 1$. Por meio do axioma de Zermelo, considera-se o conjunto $E \subseteq [0, 1]$ definido pela escolha de um ponto em cada classe de equivalência $K(x)$.

Represente-se por $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a sucessão de todos os racionais de $[-1, +1]$. Defina-se $E_i = E + r_i$, a translação do conjunto E por meio do racional $r_i \in [-1, +1]$.

Temos as seguintes propriedades:

i. $[0, 1]$ é parte de $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$:
De fato, seja $x \in [0, 1]$, existe $e \in E \subseteq [0, 1]$ tal que $x - e$ é racional. Tem-se $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq e \leq 1$, logo $x - e$ é um racional de $[-1, +1]$, isto é, $x - e = r_i$, r_i membro da sucessão dos racionais de $[-1, +1]$. Resulta que $x = e + r_i$ pertence a algum E_i, ou seja, $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. $\square$

ii. $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ é parte de $[-1, 2]$:
De fato, se $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ resulta que $x \in E_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Pela definição de E_i, conclui-se que se $x = e + r_i$ com $e \in [0, 1]$ e $r_i \in [-1, +1]$. Resulta que $-1 \leq e + r_i \leq +2$, isto é, $x \in [-1, +2]$. $\square$

iii. Das inclusões (i) e (ii) obtém-se que $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq [-1, +2]$.

iv. O conjunto E não é mensurável:
Observe-se, inicialmente, que se e, $\hat{e}$ são elementos distintos de E, não pode ser $e \sim \hat{e}$, isto é, $e - \hat{e}$ racional, pois as classes $K(x)$ são disjuntas. Prova-se que esta propriedade de E implica $E_i \cap E_j = \varnothing$ se $i \neq j$. De fato, se assim não fosse, resultaria que existiria $x \in E_i \cap E_j$, isto é, $x = e + r_i = \hat{e} + r_j$, logo $e - \hat{e} = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$, provando que $e \sim \hat{e}$, contradição.

Suponha E mensurável. Resulta que suas translações $E_i = E + r_i$ são mensuráveis e possuem a mesma medida de E, isto é, $\mu(E) = \mu(E_i)$. De (iii) e da σ-aditividade da medida de Lebesgue μ resulta,

$$1 \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E) \leq 3,$$

contraditório, pois a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E)$ ou é nula ou não converge. Logo E não é mensurável. $\square$

Observação 1: Esta versão do exemplo de Von Neumann pode ser vista em: Russel A. Gordon - The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock - AMS - 1995. Ver também I.P. Natanson - Theory of Functions of a Real Variable - Fred Ungar Publishing Co. NY, 1995.

4.

Integral de Kurzweil-Henstock

1. Nos capítulos um e cinco, do texto, foram investigados os problemas de reconstrução de uma função por meio do conhecimento de sua derivada. Constatou-se que na classe $\mathcal{R}(a,b)$, das funções integráveis a Riemann em (a,b), o problema é bem posto na subclasse de $\mathcal{R}(a,b)$ constituída pelas funções contínuas em $[a,b]$. Também válido na classe

das $u \in \mathcal{R}(a,b)$ tais que $u' \in \mathcal{R}(a,b)$. Na classe $L(a,b)$ o problema da reconstrução de uma função por meio do conhecimento de sua derivada, seria bem resolvido na subclasse de $L(a,b)$ formada pelas funções absolutamente contínuas. Assim, se u for a derivada de v em (a,b) a igualdade

$$v(x) = v(a) + \int_a^x u(s)\, ds,$$

para todo $a \leq x \leq b$ será obtida para as funções contínuas em $\mathcal{R}(a,b)$ e para as absolutamente contínuas em $L(a,b)$.

Daí, surgiu o problema, no início do século XX, de obter um conceito de integral para funções u definidas em (a,b), representada por $I_a^b(u)$, de modo que na classe $H(a,b)$ das funções integráveis com este processo, fosse resolvido o problema da reconstrução de uma função por meio do conhecimento de sua derivada. De modo preciso, se uma função v de $H(a,b)$ possui derivada u finita quase sempre em $[a,b]$, então $u \in H(a,b)$ e vale a igualdade:

$$v(b) - v(a) = I_a^b(u).$$

Inicialmente este problema central da Análise Matemática, da época, foi abordado por A. Denjoy, matemático francês, 1912, obtendo um conceito de integral, contendo o de Lebesgue, segundo o qual o problema acima é resolvido.

Simultaneamente, O. Perron, matemático alemão, em 1914, imaginou um processo de integração segundo o qual o problema da reconstrução da função por meio de sua derivada é resolvido, O processo de Perron contém o de Lebesgue e foi demonstrado que é equivalente ao de Denjoy e mais simples. Várias outras construções foram feitas na esperança de resolver o problema da reconstrução de uma função.

Os processos acima mencionados tiveram origens na integral segundo Lebesgue. Em 1960 foi investigado por R. Henstock, um processo de integração com o objetivo de reconstrução da função, porém baseado nas idéias de Riemann. Ele obteve, o que denominou Integral de Riemann Generalizada ou Integral de Kurzweil-Henstock. (R. Henstock, *A Riemann type integral with Lebesgue power*, Canadian J. of Math. 20 (1968), pp. 79-87, e R.G. Bartle, *Return to the Riemann Integral*, Amer. Math. Monthly (out. 1996), pp. 625-632). Tendo em vista a simplicidade do processo de Henstock, será feito um resumo das idéias no parágrafo que se segue.

2. Integral de Riemann Generalizada. Considere-se um intervalo (a, b) da reta real $\mathbb{R}$ e funções reais definidas em (a, b).

Considere-se a distribuição de pontos de (a, b) como segue:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{j-1} < x_j < \cdots < x_n = b.$$

Os intervalos fechados $([x_{j-1}, x_j])_{1 \leq j \leq n}$ são dois a dois sem ponto interior comum e sua união é igual a $[a, b]$. Uma família de intervalos com estas propriedades denomina-se uma partição de $[a, b]$.

Uma partição de $[a, b]$ na qual escolhe-se, em cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$, um ponto t_j, diz-se indexada. Assim, uma partição indexada é uma coleção ordenada de pares $[x_{j-1}, x_j]$ e t_j, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Representa-se por

$$P = \left\{ [x_{j-1}, x_j];\ t_j \right\}_{1 \leq j \leq n},$$

uma partição indexada de (a, b).

Considere-se uma função $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Denomina-se Soma de Riemann de u, correspondente à partição indexada,

$$P = \left\{ [x_{j-1}, x_j];\ t_j \right\}_{1 \leq j \leq n},$$

ao número

$$S(u, P) = \sum_{j=1}^{n} u(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Integral de Riemann. Diz-se que um número real I é a integral de Riemann de $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $\delta_\varepsilon > 0$ tal que se

$$P = \big\{[x_{j-1}, x_j];\ t_j\big\}_{1\leq j\leq n}\,,$$

para qualquer partição indexada de (a,b) com

$$0 < x_j - x_{j-1} < \delta_\varepsilon\,,\ \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

então

$$|S(u,P) - I| < \varepsilon.$$

Observação 1: Admitir que $\delta_\varepsilon > 0$ é constante, traz grande restrição à definição de integral de Riemann. Assim, obtém-se uma integral mais geral quando δ_ε é uma função de (a,b) em $\mathbb{R}$, estritamente positiva. A integral assim obtida resolve o problema da reconstrução de uma função por meio de sua derivada, no contexto de Riemann.

Calibre sobre (a,b). Denomina-se um calibre sobre (a,b) a uma qualquer função $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ estritamente positiva.

Partição δ-fina. Considere-se um calibre $\delta\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e seja $P = \{[x_{j-1}; x_j]; t_j\}_{1\leq j\leq n}$ uma partição indexada de (a,b). Diz-se que P é δ-fina quando

$$0 < x_j - x_{j-1} < \delta(t_j),\ \text{para}\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstra-se que conhecido um calibre δ sobre (a,b) existe uma partição δ-fina de (a,b). (R.A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, AMS, 1995, RI, USA).

Integral de Riemann Generalizada. Um número real H denomina-se integral de Riemann Generalizada da função $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ_ε sobre (a,b) tal que

$$|S(u,P) - H| < \varepsilon,$$

para toda partição $P = \{[x_{j-1}, x_j]; t_j\}_{1 \leq j \leq n}$ de (a, b) que seja δ_ε-fina.

Diz-se que u possui H para sua Integral de Riemann Generalizada e escreve-se

$$H = \int_a^b u.$$

Representa-se por $\mathcal{R}^*(a, b)$ a classe de todas as funções $u\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, que possuem Integral de Riemann Generalizada.

Exemplos

- As funções integráveis à Riemann em (a, b), isto é, $\mathcal{R}(a, b)$ pertencem a $\mathcal{R}^*(a, b)$. É suficiente considerar calibres δ constantes em (a, b). Resulta que as funções contínuas em $[a, b]$ pertencem a $\mathcal{R}^*(a, b)$. $\square$

- Considere a função característica dos racionais do intervalo $(0, 1)$, conhecida, também, sob a denominação de função de Dirichlet. Representando-a por χ, tem-se $\chi(x) = 1$ se x for um racional de $(0, 1)$ e $\chi(x) = 0$ nos irracionais de $(0, 1)$. Sabe-se que χ não pertence a $\mathcal{R}(0, 1)$. Será demonstrado que χ pertence a $\mathcal{R}^*(0, 1)$ e $\int_0^1 \chi = 0$.

De fato, o problema principal é definir, para cada $\varepsilon > 0$, um calibre δ_ε sobre $(0, 1)$. Para tal considere-se todos os racionais de $(0, 1)$ indexados na sucessão $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Dado $\varepsilon > 0$, define-se a função δ_ε em $(0, 1)$ do modo seguinte:

$$\left| \begin{array}{l} \delta_\varepsilon(x) = 1 \quad \text{se} \quad x \quad \text{for irracional} \\ \delta_\varepsilon(r_j) = \dfrac{\varepsilon}{2^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \ldots . \end{array} \right.$$

A função δ_ε assim definida é, de fato, um calibre em $(0, 1)$. Considere-se uma partição indexada

$$P = \{[x_{j-1}, x_j]; t_j\}_{1 \leq j \leq n},$$

que seja δ_ε fina, sendo δ_ε definida acima. Isto significa que $x_{j-1} \leq t_j \leq x_j$ e

$$[x_{j-1}, x_j] \subset \left(t_j - \frac{1}{2}\,\delta_\varepsilon(t_j),\, t_j + \frac{1}{2}\,\delta_\varepsilon(t_j) \right).$$

Note-se que há no máximo dois subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$ possuindo r_j para índice cuja amplitude de cada um é menor ou igual a $\varepsilon/2^{j+1}$. Logo, a contribuição para $S(\chi, P)$ dos intervalos $[x_{j-1}, x_j]$, com $t_j = r_j$ para índice, é menor ou igual a $\varepsilon/2^j$. A contribuição para $S(\chi, P)$ das parcelas com índice t_j irracional é zero, pois nestes $\chi(t_j) = 0$. Conseqüintemente:

$$0 \leq S(\chi, P) = \sum_{j=1}^{n} \chi(t_j)(x_j - x_{j-1}) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon,$$

provando que χ possui Integral de Riemann Generalizada igual a zero. $\square$

Não é verdade que se $u \in \mathcal{R}^*(a, b)$ resulte que seu valor absoluto pertença a $\mathcal{R}^*(a, b)$. Isto não acontece à integração segundo Lebesgue. Todavia, a reconstrução de $u \in L(a, b)$ por meio de sua derivada não vale em geral em $L(a, b)$ mas sim na subclasse das funções absolutamente contínuas. Entretanto, na classe $\mathcal{R}^*(a, b)$ das Integrais de Riemann Generalizadas, vale o resultado geral sem recorrer à subclasses, pois este foi o objetivo para a criação deste processo que elimina o defeito da Integral de Riemann, como foi o de Perron, por exemplo, para suprir a falha da integral de Lebesgue.

Teorema Fundamental. Suponha-se $v \in \mathcal{R}^*(a, b)$ diferenciável em todo ponto. Então sua derivada $u = v'$ possui Integral de Riemann Generalizada e

$$v(b) - v(a) = \int_a^b u.$$

Prova: Seja $t \in [a,b]$. Sendo $v'(t) = u(t)$ obtém-se:

$$\lim_{z \to t} \left[\frac{v(z) - v(t)}{z - t} - u(t) \right] = 0.$$

Portanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon(t) > 0$ em $[a,b]$, tal que

$$\left| \frac{v(z) - v(t)}{z - t} - u(t) \right| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad z \in [a,b]$$

tal que $|z - t| < \delta_\varepsilon(t)$. Assim, $\delta_\varepsilon(t)$ é um calibre em $[a,b]$.

Da desigualdade acima, obtém-se:

$$|v(z) - v(t) - (z - t)u(t)| < \varepsilon |z - t|$$

para todo $z \in [a,b]$ tal que $|z - t| < \delta_\varepsilon(t)$.

Portanto, se $a \leq \xi \leq t \leq \eta \leq b$ e $0 < \eta - \xi < \delta_\varepsilon(t)$, resulta que:

$$\begin{gathered} |v(\eta) - v(\xi) - (\eta - \xi)u(t)| \leq \\ \leq |v(\eta) - v(t) - (\eta - t)u(t)| + |v(t) - v(\xi) - (t - \xi)u(t)| \leq \\ \varepsilon(\eta - t) + \varepsilon(t - \xi) = \varepsilon(\eta - \xi). \end{gathered}$$

Considere-se a partição indexada

$$P = \big\{ [x_{j-1}, x_j];\ t_j \big\} \text{ de } [a,b],$$

com calibre $\delta_\varepsilon(t)$. Obtém-se:

$$v(b) - v(a) = \sum_{j=1}^{n} \big\{ v(x_j) - v(x_{j-1}) \big\}.$$

Logo,

$$|v(b) - v(a) - S(u, P)| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \{v(x_j) - v(x_{j-1})\} - \sum_{j=1}^{n} u(t_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |v(x_j) - v(x_{j-1}) - u(t_j)(x_j - x_{j-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon(b - a),$$

para todo $\varepsilon > 0$. Isto implica que $u \in \mathcal{R}^*(a, b)$ e que

$$\int_a^b u = v(b) - v(a).$$

□

Conclui-se que concernente à reconstrução de uma função por meio de sua derivada, a Integral de Riemann Generalizada supera a integral de Lebesgue. □

3. Aspectos Históricos. Prefere-se fixar como início do estabelecimento do conceito de integral as investigações de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1712). Estas concepções são sintetizadas nas duas seguintes linhas de idéias:

- Idealizada por Newton como integral indefinida, na nomenclatura atual ou como função primitiva. Denomina-se *método descritivo.*

- Concebido por Leibniz como integral definida, isto é, como uma área. Será chamado *método construtivo.*

Segundo Newton, uma função real de variável real v denomina-se uma integral indefinida ou uma primitiva de Newton, quando v possui uma derivada finita igual a u, isto é

$$v' = u.$$

A função u diz-se integrável no sentido de Newton e a variação de v em $[a, b]$, isto é, $v(b) - v(a)$ denomina-se integral de Newton da função u em $[a, b]$. Toda função integrável no sentido de Newton é finita.

A teoria da integral desenvolveu-se, inicialmente, segundo as idéias de Newton, processo bem natural por ser o inverso da derivação. A teoria de Newton cresceu razoalvemente na época com aplicações à Mecânica e à Física em geral. As idéias de Leibniz, entretanto, permaneceram estáticas. Cauchy (1789-1857) retornou às idéias de Leibniz com o estudo do conceito de integral na classe das funções reais contínuas no intervalo $[a, b]$. Definiu a noção de integral para uma função contínua u em $[a, b]$, representado-a por

$$\int_a^b u(x)\, dx.$$

Para este conceito de integral segundo Cauchy para as funções contínuas, ele provou que os conceitos de Newton e Leibniz se equivalem: Ele demonstrou que se u for uma função real contínua em $[a, b]$ e $a < x < b$, então

$$v(x) = \int_a^x u(s)\, ds$$

é uma primitiva de u em $[a, b]$, isto é, $v' = u$ e que

$$v(b) - v(a) = \int_a^b u(s)\, ds.$$

Este resultado da reconstrução de uma função por meio do conhecimento de sua derivada denomina-se, atualmente, teorema fundamental do cálculo.

Cauchy desenvolveu suas idéias estendendo o conceito para o caso de uma semireta em vez de um intervalo compacto $[a, b]$, obtendo o que denominou integrais impróprias. Definiu o conceito de valor principal de uma integral imprópria que é uma concepção bem geral neste contexto. (Augustin Louis Cauchy – *Le Calcul Infinitésimal* – Tome Premier, 1823, Ellipses Ed., Paris, France).

Supondo-se, ainda, o caso compacto $[a, b]$, deseja-se estender o conceito de integral para uma classe mais ampla que a das contínuas. Neste ponto Riemann e Darboux idealizaram um processo para definir a integral de uma função u definida em $[a, b]$, porém apenas limitada. A classe das funções integráveis em $[a, b]$ no sentido de Riemann representa-se por $\mathcal{R}(a, b)$. Esta classe que contém as funções contínuas em $[a, b]$ não possui a propriedade do teorema fundamental do cálculo. Como foi visto foi superado com o conceito de integral de Riemann generalizada de Henstock, obtendo a classe $\mathcal{R}^*(a, b)$.

A integral de Riemann não atendia a outras questões fundamentais da Análise Matemática, como por exemplo, no estudo de convergência de séries de funções, principalmente tratando-se das séries de Fourier. Seria imperativo reexaminar o conceito e procurar obter um outro mais eficiente contendo o anterior. Daí, Lebesgue (1875-1941) idealizou um conceito de integral que domina a Análise Matemática até os dias de hoje, (ver Complemento 2).

Lebesgue observou que sendo a função u definida em $[a, b]$, uma fina divisão de $[a, b]$ em subintervalos pequenos não implicaria, para funções gerais, que os valores de u estariam próximos. Então diz ele: "... il est clair alors que nous devons morceler, non pas l'intervalle où varies x, mais l'intervalle limité par les bornes inferieurs et superieurs de u. On considère valeurs des x qui correspond a

$$y_{v-1} \leq u(x) \leq y_v \,.$$

Les valeurs de x forment un ensemble E_v . Avec une fonction quelconque il peu être très compliqué, mais peut import on lui attachera une mesure $m(E_v)$." (Henri Lebesgue, *Leçons sur l'Intégration et Recherche des Fonctions Primitives* – Gauthier Villars, Paris, 1950, France).

Assim pensando, Lebesgue publicou sua primeira nota em 1901, na qual fixava a definição de medida e de integral atualmente ligada a seu nome, dando um impulso considerável ao trabalho de investigação em Análise Matemática.

No que concerne aos teoremas de convergência de séries o progresso da integral segundo Lebesgue é grande. Outro aspecto fundamental é a classe das funções integráveis a Lebesgue $L(a, b)$ ou mesmo $L^p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$ que desempenharam papéis decisivos no progresso da Análise Matemática e suas várias aplicações, principalmente às equações diferenciais parciais.

Resta examinar a reconstrução de uma função v por meio do conhecimento da derivada. Dito de outro modo, como fica o teorema fundamental do cálculo na classe $L(a, b)$ das funções integráveis à Lebesgue em (a, b). Embora muito geral, Lebesgue demonstrou que o teorema fundamental do cálculo vale apenas na subclasse de $L(a, b)$ constituída das funções absolutamente contínuas. (Veja Capítulo 5 do texto). Para suprir esta falha da integral de Lebesgue, há os processos de integração de Denjoy e Perron conforme já foi mencionado nestes complementos e outros que surgiram posteriormente.

Vários são os processos de definir a integral. Para facilitar a compreensão do leitor, vem organizado, a seguir, um quadro sinóptico contendo os métodos e os matemáticos envolvidos. O quadro foi organizado dentro das três linhas de idéias: Newton - método descritivo; Leibniz - método construtivo; Daniel - método axiomático. O quadro mostra a evolução, no tempo, destas três idéias centrais da Análise Matemática. $\square$

Método Descritivo (sem medida)

Newton
(1643-1727)

Teorema Fundamental

Perron – Denjoy – Khintchine – Riesz
(1914)
Super e Sub Funções (Perron)
Números Transfinitos (Denjoy-Khintchine)

De La Valle Poussinn
(Funções Majorantes)

Método Construtivo (com medida)

Leibniz (1646-1712)

Cauchy (1777-1855)
(Funções contínuas)

Riemannn (1826-1866)
(Funções limitadas)

Darboux (1842-1917)
(Integrais inferior e superior)

Kuzweil-Henstock(1960)
Mac Shane

Lebesgue (1875-1941)
(Mensuráveis)

Outros: Hanh; Lusin; Riesz; N.H.Young; Borel; Carateodory

Stieltjes (1856-1894)
(Cauchy-Riemann)

Stieltjes - Lebesgue
(Cuso Lebesgue – Collége de France (1904)

Método Axiomático

Daniell (1889-1946)

Haar (1885-1933)

Stone (1903-1989)

Bourbaki
(Distribuição de L. Schwartz)

L.A.Medeiros