Instituto de Matemática - UFRJ

ESPAÇOS DE SOBOLEV

(Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)

por

L. A. Medeiros
Professor Emérito UFRJ

M. Milla Miranda
Professor Titular UFRJ

Rio de Janeiro, RJ
2000

M488e

Medeiros, Luis Adauto da Justa, 1926 -

Espaços de Sobolev : iniciação aos problemas elíticos não homogêneos/ Luis Adauto da Justa Medeiros, Manuel Antolino Milla Miranda - Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

151p.

Inclui bibliografia.

1. Espaços de Sobolev. 2. Equações Diferenciais Parciais Elípticas. I. Milla Miranda, Manuel Antolino. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

ISBN: 85-87674-03-X CDD-20^a 515.782

"Que Stendhal confessasse haver escrito um de seus livros para cem leitores, cousa é que admira e consterna. O que não admira, nem provavelmente consternará é se este outro livro não tiver os cem leitores de Stendhal, nem cinqüenta, nem vinte e, quando muito, dez. Dez? Talvez cinco."

Brás Cubas

Dedicado à memória de nosso saudoso
Pedro Humberto Rivera Rodriguez
por seu talento matemático e
caráter exemplar.

Prefácio

O presente livro teve sua origem no início dos anos setenta, cujo prefácio, reproduzido a seguir traz informações históricas sobre sua origem.

Nesta edição, o Capítulo III versa sobre os problemas de Dirichlet e Neumann, para o Laplaciano, no caso não homogêneo com escolhas gerais das condições de fronteira. Este capítulo segue as idéias de Lions [8] e Lions-Magenes [11], enriquecidos com as referências da Bibliografia Complementar, particularmente Aubin [18], Brezis [19], Chavent [21], Dautray-Lions [22], Kesavan [23].

O conteúdo deste livro inclui parte dos programas de disciplinas básicas sobre equações diferenciais parciais do Instituto de Matemática da UFRJ.

Os autores agradecem aos colegas e aos seus alunos pelo estímulo para aperfeiçoar as edições anteriores que convergiram para a atual. Em particular, gostaríamos de deixar nossos agradecimentos ao Marcos Araújo, pela cuidadosa revisão do texto acrescentado modificações que o tornaram mais inteligível.

Ao Wilson Góes, agradecemos pelo perfeito trabalho de digitação.

Rio de Janeiro, maio de 1997

L.A. Medeiros – M. Milla Miranda

Prefácio ($1^{\underline{a}}$ edição)

A idéia de escrever este texto surgiu-nos quando em 1970 iniciamos um seminário sobre espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais, realizado no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, na esperança de despertar a atenção de algum estudante para o aspecto das equações diferenciais parciais formulado em termos destes espaços. Aquele seminário continuou no Instituto de Matemática da UFRJ, estimulado e fortalecido pela inclusão de novos participantes. O plano de trabalho teve como base os textos [7] e [8] do Professor J.L. Lions, complementado com alguns trabalhos mencionados na bibliografia dos mesmos. Posteriormente, foram incluídas no Curso de Pós-Graduação do IM-UFRJ, certas disciplinas fundamentadas nos espaços de Sobolev, para as quais este texto se adapta consideravelmente. Deste modo, preparamos esta monografia, baseada nas exposições feitas no seminário de equações diferenciais parciais e em nossas aulas nas disciplinas de pós-graduação do IM, tendo por objetivo introduzir estudantes interessados em linhas de pesquisa ligadas às equações diferenciais parciais não lineares, controle ótimo de sistemas governados por equações diferenciais parciais, inequações variacionais ou análise numérica de elementos finitos.

A exposição divide-se em três capítulos. O Capítulo I é um pequeno fascículo de resultados sobre distribuições a ser usado nos capítulos seguintes. O Capítulo II contém os teoremas elementares sobre os espaços de Sobolev e, com base neste, é possível entender vários aspectos do estudo de soluções fracas de equações diferenciais parciais, o que é feito no Capítulo III e nos Apêndices.

No início deste prefácio referimo-nos ao fortalecimento do Seminário de Equações Diferenciais Parciais do IM-UFRJ e retornamos a ele, deixando aqui fixada a nossa gratidão à Beatriz, Eliana, Milla e Perla, pelo entusiasmo que sempre nos transmitiram quando mencionávamos a idéia de escrever este texto, bem como por suas valiosas críticas e sugestões. Resta-nos, portanto, a esperança de que possamos de fato atrair a atenção daqueles interessados em matemática aplicada, para este aspecto das equações diferenciais parciais, lembrando, todavia que, como diz Erich From, "ter esperança, significa estar pronto a todo momento para aquilo que ainda não nasceu e, todavia, não desesperar se não ocorrer nascimento algum durante nossa existência".

Ao redigirmos este texto, recebemos apoio financeiro do Fundo Nacional de Desenvolvimento Científico (FNDCT) e do CEPG-UFRJ.

Finalizando, lembramos uma vez mais que a boa impressão dos textos de Métodos Matemáticos, deve-se à dedicação do Sr. Arlindo Coutinho de Azevedo, chefe da Seção de Reprografia do IM, bem como de seus auxiliares, enquanto a datilografia perfeita é trabalho de arte do Sr. Wilson Góes.

Rio de Janeiro, agosto de 1975

L.A. Medeiros – P.H. Rivera

Prefácio ($2^{\underline{a}}$ edição)

Esta introdução aos Espaços de Sobolev que aqui apresentamos, é uma revisão dos Capítulos I e II de nossa monografia Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais (Bibliografia número 11).

A presente edição além das correções decorrente da revisão acima mencionada, vem aumentada do estudo do traço de ordem m e do traço da derivada normal. Deste modo, a exposição fica completa, servindo de base ao estudo de uma ampla variedade de problemas relacionados aos sistemas governados por equações diferenciais parciais. Para uma exposição completa consulte Lions-Magenes número 11 da Bibliografia.

Rio de Janeiro, janeiro de 1977

L.A. Medeiros – P.H. Rivera

Sumário

Capítulo 1

Resultados Básicos Sobre Distribuições

1.1 Introdução

No presente capítulo serão fixadas terminologia, a notação e certos resultados sobre integração e teoria das distribuições, resultados estes a serem usados no desenvolver deste texto.

Com a letra $\mathbb{K}$ representa-se, simultaneamente, o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o dos números complexos $\mathbb{C}$. Por $\mathbb{N}$ representa-se o monóide dos números naturais e por $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros.

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\,, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\, z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!\,.$$

Por D^α denota-se o operador de derivação de ordem α definido por

$$\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$$

e para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ define $D^0 u = u$ para toda função u. Por D_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, representa-se a derivação parcial $\partial/\partial x_i$.

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, escreve-se $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_i \leq \alpha_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Quando u e v forem funções numéricas suficientemente deriváveis, tem-se a regra de Leibniz dada por

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha-\beta} v).$$

Sejam E e F dois espaços topológicos com $E \subset F$. Para indicar que a imersão de E em F é contínua será usada a notação $E \hookrightarrow F$.

Por Ω representa-se um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e por Γ sua fronteira. Será fixada em Ω a medida de Lebesgue dx.

1.2 Espaço de Funções Testes

Inicia-se introduzindo alguns resultados e noções prévias.

1.2.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$ e Convolução de Funções

Seja u uma função numérica definida em Ω, u mensurável, e seja $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i$ de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$. Considera-se o subconjunto aberto $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Então $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}$. Como conseqüência deste fato, o *suporte de* u, o qual é denotado por supp u, é definido como sendo o subconjunto fechado de Ω,

$$\text{supp} u = \Omega \backslash \mathcal{O}.$$

Observe que se u é contínua em Ω então

$$\text{supp } u \ \text{ é igual ao fecho em } \Omega \text{ do conjunto } \ \{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}.$$

Sejam u e v funções numéricas, mensuráveis em Ω e $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Mostra-se que

$$\text{supp } (u+v) \subset (\text{supp } u) \cup (\text{supp } v)$$

$$\text{supp } (uv) \subset (\text{supp } u) \cap (\text{supp } v)$$

$$\text{supp } (\lambda u) = \lambda \text{supp } u$$

Seja u uma função numérica, mensurável no $\mathbb{R}^n$. A função $\tau_y u$ definida por $(\tau_y u)(x) = u(x-y)$ denomina-se a translação de u por y. Mostra-se que

$$\operatorname{supp}(\tau_y u) = y + \operatorname{supp} u.$$

Representa-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das funções numéricas u definidas em Ω, mensuráveis cuja potência p, $|u|^p$, é integrável em Ω, equipado com a norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}.$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\bar{v}(x) \, dx, \quad \bar{v} \text{ complexo conjugado de } v.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço de Banach das funções numéricas u, mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω, equipado com a norma

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |u(x)|.$$

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço localmente convexo das funções numéricas u, mensuráveis em Ω, equipado com a família de semi-normas

$$\{p_{\mathcal{O}} \; ; \; \mathcal{O} \text{ subconjunto aberto limitado de } \Omega\}$$

onde

$$p_{\mathcal{O}}(u) = \Big(\int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}.$$

Diz-se que a sucessão (u_ν) de funções de $L^p_{loc}(\Omega)$ converge para zero em $L^p_{loc}(\Omega)$ se

$$\lim_{\nu \to \infty} p_{\mathcal{O}}(u_\nu) = 0 \quad \text{para todo } \mathcal{O} \text{ aberto limitado de } \Omega.$$

Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ e (u_ν) uma sucessão de funções de $L^p_{loc}(\Omega)$. Diz-se que (u_ν) converge para u em $L^p_{loc}(\Omega)$ se $(u_\nu - u)$ converge para zero em $L^p_{loc}(\Omega)$.

Proposição 1.2.1 (Desigualdade de Interpolação) *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e se tem a desigualdade*

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||^{\theta}_{L^p(\Omega)} \; ||u||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \tag{1.2.1}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q} \cdot$

Demonstração: Se $p = q$ então $\theta = 1/2$; se $r = p$, $\theta = 1$ e se $r = q$, $\theta = 0$. Nestes três casos tem-se uma igualdade em (1.2.1).

Considere-se o caso $1 \leq p < r < q < \infty$. Observe que neste caso $0 < \theta < 1$. Tem-se, pela desigualdade de Hölder:

$$\int_\Omega |u|^r \, dx = \int_\Omega |u|^{r\theta + r(1-\theta)} \, dx \leq \Big(\int_\Omega |u|^{r\theta\alpha} \, dx \Big)^{1/\alpha} \Big(\int_\Omega |u|^{r(1-\theta)\alpha'} \Big)^{1/\alpha'} \tag{1.2.2}$$

com $\alpha = p/r\theta$, $\alpha' = q/r(1-\theta)$. Observe que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$. De (1.2.2) resulta

$$\int_\Omega |u|^r \, dx \leq ||u||^{p/\alpha}_{L^p(\Omega)} \; ||u||^{q/\alpha'}_{L^q} \, .$$

Daí, notando que $\frac{1}{r} = \frac{\theta\alpha}{p}$ e $\frac{1}{r} = \frac{(1-\theta)\alpha'}{q}$, obtém-se a desigualdade (1.2.1).

No caso $1 \leq p < r < \infty$, segue-se que $p = r\theta$ e $0 < \theta < 1$. Portanto

$$\int_\Omega |u|^r \, dx = \int_\Omega |u|^{r\theta + r(1-\theta)} \, dx \leq ||u||^{r(1-\theta)}_{L^\infty(\Omega)} \; ||u||^{p}_{L^p(\Omega)}$$

implicando na desigualdade (1.2.1). ■

Sejam u e v funções numéricas definidas no $\mathbb{R}^n$. Considera-se a convolução $u * v$ das funções u e v, isto é,

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} v(y)v(x-y) \, dy.$$

Tem-se o seguinte resultado:

Desigualdade de Young. Sejam $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, e r o número real verificando $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \geq 0$. Então $u * v \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e

$$||u * v||_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \; ||v||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \, . \tag{1.2.3}$$

Além disso,

$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v. \tag{1.2.4}$$

1.2.2 Exemplos de Funções Testes

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas definidas em Ω, com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 1. Seja $\rho: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$\rho(x) = \left| \begin{array}{cl} \exp\left(-1/(1-||x||^2)\right) & \text{se } \; ||x|| < 1 \\ 0 & \text{se } \; ||x|| \geq 1 \end{array} \right.$$

sendo $||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Mostra-se que ρ pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que supp $\rho = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leq 1\}$.

Exemplo 2. Seja $k \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx$ sendo ρ a função do Exemplo 1. Para cada $\nu = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ considere a função $\rho_\nu: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definido por

$$\rho_\nu(x) = (\nu^n/k)\rho(\nu x) \;\text{ para todo }\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostra-se que ρ_ν é, para cada ν, uma função teste no $\mathbb{R}^n$ possuindo as seguintes propriedades:

a) $0 \leq \rho_\nu(x) \leq \nu^n/ke$

b) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(x)\, dx = \int_{||x|| \leq 1/\nu} \rho_\nu(x)\, dx = 1$

c) supp $\rho_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leq 1/\nu\}$

Uma sucessão (ρ_ν) de funções testes no $\mathbb{R}^n$ com as propriedades a), b), c) é denominada uma *sucessão regularizante*.

Exemplo 3. Sejam $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Então $u * v$ pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Quando v possui suporte compacto, então, por (4), $u * v$ é uma função teste no $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4. Considere-se dois subconjuntos K e F do $\mathbb{R}^n$, disjuntos, sendo K compacto e F fechado. Então existe uma função teste φ no $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(x) = 1 \text{ em } K, \;\; \varphi(x) = 0 \text{ em } F \;\text{ e }\; 0 \leq \varphi(x) \leq 1.$$

Para construir tal φ considere $\varepsilon > 0$ definido por $\varepsilon = \text{dist}(K, F)/4$ e construa os conjuntos $F_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, K) \geq 2\varepsilon\}$, $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$. Considere $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon\nu \geq 1$. Então se $v \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é definida por $v(x) = \text{dist}(x, F_0)/(\text{dist}(x, F_0) + \text{dist}(x, K_0))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, segue-se que $\varphi = \rho_\nu * v$ satisfaz todas as condições requeridas.

1.2.3 Regularização de Funções

O objetivo nesta seção é mostrar que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Inicia-se, para isto, com um resultado de continuidade.

Proposição 1.2.2 *Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Então a aplicação translação*

$$\mathbb{R}^n \to L^p(\mathbb{R}^n)$$
$$y \mapsto \tau_y u,$$

é contínua.

Demonstração: Note-se que é suficiente demonstrar que a aplicação é contínua em $y = 0$. Com efeito, seja $y \in \mathbb{R}^n$ e (y_ν) uma sucessão de vetores de $\mathbb{R}^n$ com $y_\nu \to y$. Tem-se:

$$||\tau_{y_\nu} u - \tau_y u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - y_\nu) - u(x - y)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - z_\nu) - u(x)|^p \, dx$$

onde $z_\nu = y_\nu - y \to 0$.

Provar-se-á, portanto, que a translação é contínua em $y = 0$. Seja (y_ν) uma sucessão de vetores do $\mathbb{R}^n$ com $y_\nu \to 0$. Primeiro mostra-se a continuidade para $u = \chi_\mathcal{O}$ onde $\chi_\mathcal{O}$ é a função característica de um subconjunto aberto limitado $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$. Tem-se:

$$||\tau_{y_\nu} u - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_\mathcal{O}(x - y_\nu) - \chi_\mathcal{O}(x)|^p \, dx. \tag{1.2.5}$$

Observe que $\chi_{\mathcal{O}}(x-y_\nu) \to \chi_{\mathcal{O}}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \partial\mathcal{O}$ ($\partial\mathcal{O}$ fronteira de $\mathcal{O}$), logo

$$\chi_{\mathcal{O}}(x-y_\nu) \to \chi_{\mathcal{O}}(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^n. \tag{1.2.6}$$

Por outro lado

$$|\chi_{\mathcal{O}}(x-y_\nu) - \chi_U(x)|^p \leq \chi_U(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{1.2.7}$$

onde U é o conjunto $U = \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{O} + y_\nu \right) \cup \mathcal{O}$, U aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue à integral da direita de (1.2.5), decorre de (1.2.6) e (1.2.7) que

$$\tau_{y_\nu} u \to u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ quando } \nu \to \infty.$$

Resulta da primeira parte que a translação é contínua em $y = 0$ para u função escada de $\mathbb{R}^n$, isto é, para u igual a uma combinação linear finita de funções características de subconjuntos abertos limitados de $\mathbb{R}^n$.

Note-se que o conjunto das funções escadas do $\mathbb{R}^n$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$. Então existe uma função escada ψ de $\mathbb{R}^n$ tal que $||u-\psi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Tem-se:

$$\begin{aligned} ||\tau_{y_\nu} u - u||_{L^p} &\leq ||\tau_{y_\nu} u - \tau_{y_\nu}\psi||_{L^p} + ||\tau_{y_\nu}\psi - \psi||_{L^p} + ||\psi - u||_{L^p} = \\ &= 2||\psi - u||_{L^p} + ||\tau_{y_\nu}\psi - \psi||_{L^p} < 3\varepsilon \text{ para } \nu \geq \nu_0 \end{aligned}$$

que prova, finalmente, o resultado desejado. ■

Teorema 1.2.1 *Seja (ρ_ν) a sucessão regularizante dada no Exemplo 2. Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, então a sucessão $(\rho_\nu * u)$ converge para u em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Tem-se:

$$(\rho_\nu * u)(x) - u(x) = \int_{||y|| \leq 1/\nu} \rho_\nu(y)\{u(x-y) - u(x)\}\, dy \tag{1.2.8}$$

pois $\int_{||y|| \leq 1/\nu} \rho_\nu(y)\, dy = 1$. Se $p = 1$, do Teorema de Fubini, resulta

$$||\rho_\nu * u - u||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{||y|| \leq 1/\nu} \rho_\nu(y) ||\tau_y u - u||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\, dy,$$

e o Teorema 1.2.1 é uma conseqüência da continuidade da translação $\tau_y u$ demonstrada na Proposição 1.2.2.

No caso $1 < p < \infty$, considere q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De (1.2.8) e da desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$|(\rho_\nu * u)(x) - u(x)|^p \leq \left\{ \int_{||y|| \leq 1/\nu} \rho_\nu(y)^q \right\}^{p/q} \int_{||y|| \leq 1/\nu} |u(x-y) - u(x)|^p \, dx. \tag{1.2.9}$$

Note que

$$\int_{||y|| \leq 1/\nu} \rho_\nu(y)^q \, dy \leq \frac{\nu^{nq}}{k^q e^q} \int_{||y|| \leq 1/\nu} dy = \frac{\nu^{nq}}{k^q e^q} \, w_n \, \frac{1}{\nu^n}$$

onde w_n é o volume da esfera unitária do $\mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\Big(\int_{||y|| \leq 1/\nu} \rho_\nu(y)^q \, dy \Big)^{p/q} \leq \frac{w_n^{p/q}}{k^p e^p} \, \nu^{(nq-n)p/q} = C \, \nu^{np(1-\frac{1}{q})} = C \, \nu^n \tag{1.2.10}$$

onde $C = w_n^{p/q} / k^p e^p$. Considerando (1.2.10) em (1.2.9) e aplicando o Teorema de Fubini, resulta

$$||\rho_\nu * u - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \nu^n \int_{||y|| \leq 1/\nu} ||\tau_y u - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, dy \leq C \, w_n \sup_{||y|| \leq 1/\nu} ||\tau_y u - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, .$$

Esta expressão e a continuidade da translação acarretam o Teorema 1.2.1. ∎

Observação 1 *Para o conjunto aberto Ω do $\mathbb{R}^n$, pode-se construir uma sucessão de conjuntos compactos $\{K_\nu\}$ tal que*

$$K_\nu \subset K_{\nu+1}, \ \ \forall \, \nu, ; \ e \ \ \Omega = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu \, .$$

Com efeito, é suficiente considerar K_ν como sendo

$$K_\nu = \{x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \Gamma) \geq \frac{1}{\nu}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leq \nu\}$$

onde Γ é a fronteira de Ω.

Corolário 1 *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Seja $\{K_\nu\}$ a sucessão de subconjuntos compactos de Ω dada na Observação 1. Se $u \in L^p(\Omega)$, para cada $\nu = 1, 2, \ldots$ seja χ_K_ν a função característica de K_ν e considere a função $u_\nu = u\,\chi\_K_\nu$. Segue-se que $u_\nu \in L^p(\Omega)$ para cada ν e a sucessão (u_ν) é convergente para u na norma $L^p(\Omega)$, convergência que decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Desde que as funções u_ν possuem suporte compacto, para provar o corolário é suficiente aproximar as funções u_ν por funções de $C_0^\infty(\Omega)$.

De fato, seja $u \in L^p(\Omega)$, u com suporte compacto, e considere $r = \text{dist}(\text{supp} u, \Gamma)$, que é um número positivo. Defina $\tilde{u}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}$ por

$$\tilde{u}(x) = \left| \begin{array}{ll} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathcal{C}\Omega \end{array} \right.$$

Diz-se que $\tilde{u}$ é a extensão de u por zero fora de Ω. Tem-se $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e supp $\tilde{u} =$ supp u é um compacto de $\mathbb{R}^n$. Portanto, $(\rho_\nu * \tilde{u})$ é uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$ que converge para $\tilde{u}$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Represente por v_ν a restrição a Ω da função $\rho_\nu * \tilde{u}$. Resulta que v_ν é uma função teste em Ω para cada $\nu \geq 2/r$ e a sucessão (v_ν) converge para u em $L^p(\Omega)$. ■

1.2.4 Convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$

Diz-se que uma sucessão (φ_ν) de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:

a) Os suportes de todas as funções testes φ_ν, da sucessão dada, estão contidos num compacto fixo K.

b) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sucessão $(\mathcal{D}^\alpha \varphi_\nu)$ converge para zero uniformemente em K.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, diz-se que a sucessão (φ_ν) de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando a sucessão $(\varphi_\nu - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado *espaço das funções testes em* Ω.

1.3 Distribuições sobre um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$

Define-se como *distribuição sobre* Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que para toda sucessão (φ_ν) de $\mathcal{D}(\Omega)$, convergente para zero no sentido definido em 1.2.4, então a sucessão $(\langle T, \varphi_\nu\rangle)$ converge para zero em $\mathbb{K}$. (Note que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\langle T, \varphi_\nu\rangle$ é o valor de T em φ_ν). O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão (T_ν) de vetores de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para zero em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a sucessão $(\langle T, \varphi_\nu\rangle)$ converge para zero em $\mathbb{K}$. Neste caso escreve-se $\lim\limits_{\nu\to\infty} T_\nu = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Diz-se que

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando $\lim\limits_{\nu\to\infty} (T_\nu - T) = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Considere a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por:

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Mostra-se sem dificuldades que T_u é uma distribuição sobre Ω.

Proposição 1.3.1 (Lema de Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Claramente se $u = 0$ quase sempre em Ω então $T_u = 0$. Mostra-se, então, que a condição $T_u = 0$ implica $u = 0$ quase sempre em Ω. Com efeito, considere-se um subconjunto aberto limitado $\mathcal{O}$ de Ω. Sabe-se pelo Corolário 1 que $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ é denso em $L^1(\mathcal{O})$. Conseqüentemente, como $u \in L^1(\mathcal{O})$, vem que para cada $\varepsilon > 0$ existe $v \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ tal que

$$\int_{\mathcal{O}} |u - v|\, dx < \varepsilon.$$

Da hipótese e desta última desigualdade, resulta:

$$\left|\int_{\mathcal{O}} v\varphi\, dx\right| = \left|\int_{\mathcal{O}} (v\varphi - u\varphi)\, dx\right| \leq \varepsilon \ \max|\varphi| \tag{1.3.11}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Considere-se os conjuntos

$$K_1 = \{x \in \mathcal{O}; v(x) \geq \varepsilon\} \ \text{ e } \ K_2 = \{x \in \mathcal{O}; v(x) \leq -\varepsilon\},$$

que são subconjuntos compactos disjuntos de $\mathcal{O}$. Do Exemplo 4 da Seção 1.2.2, vem que existem φ_1, φ_2 em $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ tais que:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = 1 \text{ em } K_1 & \mathcal{D}\varphi_1 = 0 \text{ em } K_2 & 0 \leq \varphi_1 \leq 1 \\ \varphi_2 = 0 \text{ em } K_1 & \varphi_2 = 1 \text{ em } K_2 & 0 \leq \varphi_2 \leq 1 \end{array}$$

Tomando-se $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, obtém-se:

$$\psi = 1 \text{ em } K_1\,, \quad \psi = -1 \text{ em } K_2\,, \quad -1 \leq \psi \leq 1.$$

Resulta, portanto,

$$\int_{\mathcal{O}} v\psi\, dx = \int_{\mathcal{O}\backslash K} v\psi\, dx + \int_K v\psi\, dx,$$

onde $K = K_1 \cup K_2$. Observando-se que $|v| \leq \varepsilon$ em $\mathcal{O}\backslash K$ e levando em consideração (1.3.11) obtém-se:

$$\left|\int_K v\psi\, dx\right| \leq \left|\int_{\mathcal{O}} v\psi\, dx\right| + \left|\int_{\mathcal{O}\backslash K} v\psi\, dx\right| \leq \varepsilon + \varepsilon \ \mathrm{med}(\mathcal{O}).$$

Da definição de ψ e desta última desigualdade, encontra-se:

$$\int_K |v|\, dx = \int_K |v\psi|\, dx \leq \varepsilon + \ \mathrm{med}(\mathcal{O})\varepsilon.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{O}} |u|\, dx \leq \int_{\mathcal{O}} |u - v|\, dx + \int_K |v|\, dx + \int_{\mathcal{O}\backslash K} |v|\, dx \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon \ \mathrm{med}(\mathcal{O}).$$

Fazendo-se ε tender para zero obtém-se que $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}$. Sendo $\mathcal{O}$ arbitrário, resulta que $u = 0$ quase sempre em Ω.

A demonstração acima é válida para u tomando valores reais. Se u toma valores complexos, observa-se que a condição $\int_\Omega u\varphi\, dx = 0$ para toda φ em $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, implica

$$\int_\Omega (\text{Re } u)\varphi\, dx = 0, \quad \int_\Omega (\text{Im } u)\varphi = 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \varphi \text{ uma função real.}$$

A proposição segue aplicando a demonstração feita acima a cada uma destas integrais. ∎

Observação 2 *Do Lema de Du Bois Raymond segue-se que para cada* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *tem-se* T_u *univocamente determinada por* u *sobre* Ω, *quase sempre, no seguinte sentido: se* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *então* $T_u = T_v$ *se e somente se* $u = v$ *quase sempre em* Ω. *Por esta razão, identifica-se* u *com a distribuição* T_u *por ela definida e diz-se a distribuição* u *ao invés de dizer a distribuição* T_u .

É oportuno observar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, *como pode ser visto no exemplo que se segue.*

Exemplo 2. Seja x_0 um ponto de Ω e δ_{x_0} a forma linear definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ do seguinte modo:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Fácil é verificar que δ_{x_0} é uma distribuição sobre Ω, denominada distribuição de Dirac ou medida de Dirac concentrada em x_0 . Quando $x_0 = 0$ escreve-se δ_0 .

Mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função u de $L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(x_0) \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, se existisse uma tal função u, então

$$\int_\Omega u(x)||x - x_0||^2\, \varphi(x)\, dx = ||x - x_0||^2\, \varphi(x)|_{x=x_0} = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pelo Lema de Du Bois Raymond tem-se $||x - x_0||^2\, u(x) = 0$ quase sempre em Ω, mostrando que $u(x) = 0$ quase sempre em Ω, isto é, $\delta_{x_0} = 0$ o que é uma contradição.

Observação 3 *Existem sucessões (u_ν) de funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ que convergem para distribuições T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, mas o limite T não pode ser definido por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.*

De fato, seja $x_0 \in \Omega$ e $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x - x_0|| \leq r\}$ uma bola contida em Ω. Para cada $0 < \varepsilon < r$, seja θ_ε a função teste

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{k\varepsilon^n}\, \rho\Big(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\Big) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega,$$

sendo ρ a função teste definida no Exemplo 1 da Seção 1.2 e $k = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, dy$. Tem-se, para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle \theta_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{1}{k\varepsilon^n} \int_\Omega \rho\Big(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\Big)\varphi(x)dx = \frac{1}{k}\int_\Omega \rho(y)\varphi(\varepsilon y + x_0)dy \to \varphi(x_0) \text{ quando } \varepsilon \to 0^+.$$

Assim

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \theta_\varepsilon = \delta_{x_0} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Exemplo 3. Seja (u_ν) uma sucessão de funções de $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$; tal que

$$\lim_{\nu \to \infty} u_\nu = u \quad \text{em} \quad L^p_{loc}(\Omega).$$

Então resulta que

$$\lim_{\nu \to \infty} u_\nu = u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

De fato, seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto limitado de Ω tal que supp$\varphi \subset \mathcal{O}$. Se $p = 1$, tem-se:

$$|\langle u_\nu - u, \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega (u_\nu(x) - u(x))\varphi(x)dx \right| \leq \max_{x \in \mathcal{O}} |\varphi(x)|\, |\varphi(x)| \int_{\mathcal{O}} |u_\nu(x) - u(x)|\, dx,$$

e se $1 < p < \infty$, considera-se o seu conjugado q, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, obtendo-se:

$$|\langle u_\nu - u, \varphi \rangle| \leq ||u_\nu - u||_{L^p(\mathcal{O})}\, ||\varphi||_{L^q(\mathcal{O})}\,.$$

As desigualdades acima implicam nossa afirmação.

Observação 4 *Tem-se a seguinte cadeia, para* $1 \leq p < \infty$,

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

sendo cada inclusão densa na seguinte.

Com efeito, a continuidade da imersão de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^p_{loc}(\Omega)$ é fácil de verificar e a continuidade da imersão de $L^p_{loc}(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ foi mostrada no Exemplo 3. A densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ será provada posteriormente. Para mostrar que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p_{loc}(\Omega)$, procede-se como se segue. Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ e (K_ν) a sucessão de subconjuntos compactos de Ω dada na Observação 1. Para cada aberto $\mathcal{O}_\nu = \text{int } K_\nu$ determina-se $\varphi_\nu \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_\nu)$ tal que

$$||u - \varphi_\nu||_{L^p(\mathcal{O}_\nu)} < \frac{1}{\nu} \cdot$$

A sucessão (φ_ν) de funções testes em Ω converge para u em $L^p_{loc}(\Omega)$ quando $\nu \to \infty$. ■

Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A *derivada de ordem* α *de* T é, por definição, a forma linear $D^\alpha T$ definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por:

$$\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Não é difícil mostrar que $\mathcal{D}^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.

Segue-se da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim, as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$\mathcal{D}^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \mapsto \mathcal{D}'(\Omega), \quad T \mapsto D^\alpha T$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{\nu\to\infty} D^\alpha T_\nu = \mathcal{D}^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Outro resultado que vale a pena mencionar é que a derivada de uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo que vem a seguir. Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev, tendo este texto como um dos objetivos fazer um estudo introdutório destes espaços.

Exemplo 4. Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma: $u(x) = 1$ se $x > 0$ e $u(x) = 0$ se $x < 0$. Ela pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. De fato, tem-se:

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exemplo 5. Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, a derivada $D^\alpha u$ no sentido das distribuições é igual à derivada no sentido clássico, isto é, $\mathcal{D}^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$ para todo $|\alpha| \leq k$. Isto é uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

Exemplo 6. Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $k \in \mathbb{N}$. Suponha que para cada $|\alpha| \leq k$, $\mathcal{D}^\alpha u$ pertença a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então, para toda φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $|\alpha| \leq k$, tem-se:

$$\mathcal{D}^\alpha(\varphi * u) = \varphi * \mathcal{D}^\alpha u.$$

Note que $\mathcal{D}^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições. A igualdade acima é uma conseqüência da definição de derivada e do Teorema de Fubini.

A seguir serão fixados certos resultados sobre multiplicação de uma distribuição por uma função, restrição de uma distribuição, distribuição temperada e transformada de Fourier.

1.3.1 Produto de Funções por Distribuições

Se $\rho \in C^\infty(\Omega)$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tem-se $\rho\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e se $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ isto implica $\lim\limits_{\nu \to \infty} \rho\varphi_\nu = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ (segue-se da Fórmula de Leibniz para funções). Quando T é uma distribuição sobre Ω, define-se o produto ρT como a forma linear definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ do seguinte modo:

$$\langle \rho T, \varphi \rangle = \langle T, \rho\varphi \rangle \quad \text{para toda} \quad \varphi \quad \text{em} \quad \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue-se que ρT é uma distribuição sobre Ω.

Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se a fórmula de Leibniz:

$$\mathcal{D}^\alpha(\rho T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta \rho \, \mathcal{D}^{\alpha-\beta} T.$$

Verificar-se-á esta fórmula no caso $\alpha = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Para todo φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_i(\rho T), \varphi \rangle &= -\langle \rho T, D_i \varphi \rangle = -\langle T, \rho(\mathcal{D}_i \varphi) \rangle = \langle T, -\mathcal{D}_i(\rho\varphi) + (\mathcal{D}_i \rho)\varphi \rangle = \\ &= -\langle T, \mathcal{D}_i(\rho\varphi) \rangle + \langle T, (\mathcal{D}_i\rho)\varphi \rangle = \langle \mathcal{D}_i T, \rho\varphi \rangle + \langle (\mathcal{D}_i\rho)T, \varphi \rangle = \\ &= \langle \rho \mathcal{D}_i T + (\mathcal{D}_i \rho) T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

1.3.2 Restrição de Distribuições

Suponha-se Ω e U subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que $\Omega \subset U$. Para cada função φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ considere-se $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ se $x \in \Omega$ e $\widetilde{\varphi}(x) = 0$ se $x \in U \backslash \Omega$. Tem-se $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(U)$ e mais:

a) $\mathcal{D}^\alpha \widetilde{\varphi} = \widetilde{\mathcal{D}^\alpha \varphi}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$

b) Se $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, segue-se que $\lim\limits_{\nu \to \infty} \widetilde{\varphi}_\nu = 0$ em $\mathcal{D}(U)$.

Como uma conseqüência daqueles resultados, se $T \in \mathcal{D}'(U)$, a forma linear $T \mid_\Omega$ definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por $\langle T \mid_\Omega, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{\varphi} \rangle$ para todo φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, é uma distribuição sobre Ω denominada a restrição de T a Ω. De a) prova-se que $\mathcal{D}^\alpha(T \mid_\Omega) = (\mathcal{D}^\alpha T) \mid_\Omega$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $T \in \mathcal{D}'(U)$.

1.3.3 Distribuições Temperadas

Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ diz-se *rapidamente decrescente no infinito*, quando para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^k \, |D^\alpha \varphi(x)| < \infty, \tag{1.3.12}$$

que é equivalente a dizer que

$$\lim_{||x|| \to \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0 \tag{1.3.13}$$

para todo polinômio p de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Considere o espaço vetorial $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ das funções rapidamente decrescentes no infinito, no qual definiremos a seguinte noção de convergência: uma sucessão (φ_ν) de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para zero, quando para todo $k \in \mathbb{N}$ a sucessão $(p_k(\varphi_\nu))$ converge para zero em $\mathbb{K}$. A sucessão (φ_ν) converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $(p_k(\varphi_\nu - \varphi))$ converge para zero em $\mathbb{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

As formas lineares definidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, contínuas no sentido da convergência definida em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são denominadas *distribuições temperadas*. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual de sucessões será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Assim

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T \quad \text{em} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{se} \quad \lim_{\nu\to\infty} \langle T_\nu, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Tem-se $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. O espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\theta(x) = 1 \quad \text{se} \quad ||x|| \leq 1 \quad \text{e} \quad \theta(x) = 0 \quad \text{se} \quad ||x|| \geq 2. \tag{1.3.14}$$

Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, define-se $\theta_\nu(x) = \theta(x/\nu)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então a sucessão $(\theta_\nu u)$ de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge para u em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para mostrar a convergência observe que pela Fórmula de Leibniz para funções, resulta

$$\begin{aligned} D^\alpha(\theta_\nu(x)u(x)) \quad & -D^\alpha u(x) = (\theta_\nu(x)D^\alpha u(x) - D^\alpha u(x)) + \\ & + \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta>0}} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\frac{1}{\nu^{|\beta|}} D^\beta\theta(x/\nu)D^\alpha u(x). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} p_k(\theta_\nu u - u) \leq \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^k\, |\theta_\nu(x)D^\alpha u(x) - D^\alpha u(x)| + \\ + \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[(1+||x||^2)^k \sum_{\beta\leq\alpha,\, \beta>0} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\, \frac{1}{\nu^{|\beta|}}\, |D^\beta\theta(x/\nu)D^{\alpha-\beta}\, u(x)| \right] \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

A segunda parcela do segundo membro de (1.3.15) converge para zero quando $\nu \to \infty$ como pode ser visto facilmente. A primeira parcela converge para zero como conseqüência da expressão (1.3.13) e do fato que $\theta_\nu(x)D^\alpha u(x) = D^\alpha u(x)$ para $||x|| \leq \nu$.

Observe-se que $u(x) = e^{-||x||^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mas não pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Como conseqüência do exposto vem que se T é uma distribuição temperada, sua restrição a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$, a qual ainda representa-se por T. Além disto, se S é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$ tal que existe $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo a condição:

$$|\langle S, \varphi\rangle| \leq C\, p_k(\varphi) \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{1.3.16}$$

segue-se da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que S pode ser estendida como uma distribuição temperada.

Exemplo 1. Como $|\langle \delta_0, \varphi\rangle| \leq p_0(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ segue-se de (1.3.16) que $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 2. Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{(1 + ||x||^2)^k}\, dx < \infty$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Então $|\langle u, \varphi\rangle| \leq C\, p_k(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Conseqüentemente, u é uma distribuição temperada.

Como conseqüência do Exemplo 2 e notando que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + ||x||^2)^m}\, dx < \infty \quad \text{para} \quad m > n/2,$$

vem que toda $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$, define uma distribuição temperada. Para $1 < p < \infty$, tem-se:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \qquad \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big)$$

sendo cada inclusão densa na seguinte. Então por dualidade resulta

$$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}|g^n) \tag{1.3.17}$$

com cada inclusão densa na seguinte.

Exemplo 3. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então a forma linear $D^\alpha T$ definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\, \langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

é uma distribuição temperada.

Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então o produto ρT não é necessariamente uma distribuição temperada. Diz-se que ρ é *lentamente crescente no infinito*, quando para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, existe um polinômio p_α, tal que

$$|\mathcal{D}^\alpha \rho(x)| \leq p_\alpha(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, se ρ é lentamente crescente no infinito, então ρT é uma distribuição temperada.

1.3.4 Transformada de Fourier

Dada uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, define-se sua transformada de Fourier como sendo a função $\mathcal{F}u$ definida no $\mathbb{R}^n$ por

$$(\mathcal{F}u)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}\, u(y)\, dy$$

sendo $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$. A aplicação $(\widetilde{\mathcal{F}}u)(x) = (\mathcal{F}u)(-x)$ para todo x no $\mathbb{R}^n$, é denominada transformada de Fourier inversa de u. Obtém-se $\overline{\mathcal{F}u} = \widetilde{\mathcal{F}}\bar{u}$, sendo $\bar{v}$ o complexo conjugado de v.

Desde que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, estão bem definidas $\mathcal{F}\varphi$, $\widetilde{\mathcal{F}}\varphi$ e mostra-se que elas são rapidamente decrescentes no infinito. Além disto

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{F}}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$.

Observe que $\mathcal{F}\, e^{-||x||^2/2} = e^{-||x||^2/2}$.

Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D^\alpha \varphi) = i^{|\alpha|}\, x^\alpha\, \mathcal{F}\varphi, &\qquad D^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|}\, x^\alpha\, \varphi) \\ (\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = &\qquad (\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\widetilde{\mathcal{F}}\varphi, \widetilde{\mathcal{F}}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

Dada uma distribuição temperada T, define-se a sua transformada de Fourier do seguinte modo:

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \qquad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$\langle \widetilde{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{\mathcal{F}}\varphi \rangle \qquad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Da continuidade da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue-se que $\mathcal{F}T$ e $\widetilde{\mathcal{F}}T$ são distribuições temperadas. Mostra-se que

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{F}}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos sendo $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$. Também

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = i^{|\alpha|}\, x^\alpha\, \mathcal{F}T, \quad D^\alpha(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}((-i)^\alpha\, x^\alpha\, T).$$

Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}u_\nu\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots$, as funções

$$(\mathcal{F}u_\nu)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{||y|| \leq \nu} e^{-i(x,y)}\, u(y)\, dy \quad \text{para todo } x \text{ no } \mathbb{R}^n.$$

Mostra-se que $\mathcal{F}u_\nu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e que $(\mathcal{F}u_\nu)$ é uma sucessão de Cauchy no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. O limite em $L^2(\mathbb{R}^n)$ da sucessão $(\mathcal{F}u_\nu)$ é denotado por $\mathcal{F}u$. Observa-se que $\mathcal{F}u$ e a transformada de Fourier de u, u considerada como uma distribuição temperada, coincidem.

Tem-se o seguinte resultado.

Teorema de Plancherel. As aplicações

$$\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{F}}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos de espaços de Hilbert tais que

$$(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\widetilde{\mathcal{F}}u, \widetilde{\mathcal{F}}v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

para todo par u, v no $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Serão usadas, também, as notações $\widehat{u}$ e $\check{u}$ no lugar de $\mathcal{F}u$ e $\widetilde{\mathcal{F}}u$, respectivamente.

A demonstração dos resultados expostos nas duas últimas seções podem ser encontradas em K. Yosida [16]

Exercícios

1. Seja $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $P > 0$ e (ρ_ν) uma sucessão regularizante em $\mathbb{R}$. Mostre que:

i) $u_\nu = \rho_\nu * u$ é periódica com período P.

ii) $u_\nu \to u$ uniformemente em $\mathbb{R}$ quando $\nu \to \infty$.

2. Considere a sucessão de funções (u_ν), $u_\nu: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$u_\nu(x) = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{se} & ||x|| \geq 1/\nu \\ \nu^{n+1} & \text{se} & ||x|| < 1/\nu \end{array} \right.$$

Prove que $u_\nu \to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ quando $\nu \to \infty$ e que (u_ν) não converge em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

3. Seja $]a, b[$ um intervalo aberto finito da reta e A o operador d/dx com domínio $D(A) = \left\{ u \in L^2(a,b); \dfrac{du}{dx} \in L^2(a,b) \right\}$. Mostre que

$$A: D(A) \subset L^2(a,b) \to L^2(a,b)$$

não é contínuo.

4. Prove que as expressões (1.3.12) e (1.3.13) da Seção 1.3.3 são equivalentes.

Sugestão: Primeiro mostre que (1.3.12) implica $\lim\limits_{||x|| \to \infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) = 0$. Para isto observe que $|a| \leq \frac{1}{2}(1 + a^2)$, para todo $a \in \mathbb{R}$, e que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^k \, |g(x)| < \infty$ implica $g(x) \to 0$ quando $||x|| \to \infty$.

5. Seja $k \in \mathbb{N}$. Mostre que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1(1 + ||x||^2)^k \leq \sum_{|\alpha| \leq k} x^{2\alpha} \leq C_2(1 + ||x||^2)^k \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

6. Seja u a função característica do cubo U do $\mathbb{R}^n$:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Prove que $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mas $\mathcal{F}u \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

7. Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Mostre que

$$(\mathcal{F}u)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}\, u(y)\, dy.$$

Capítulo 2

Espaços de Sobolev

2.1 Introdução

Este é o capítulo fundamental deste texto, pois nele serão demonstrados os resultados básicos para aplicação às equações diferenciais parciais. Inicialmente introduz-se a noção de espaço de Sobolev e certas propriedades elementares são mencionadas. Com base nestes conceitos demonstra-se os teoremas de imersão, incluindo as imersões compactas; estuda-se o prolongamento; finalizando o capítulo com a demonstração de uma versão simples do teorema do traço e uma generalização do teorema de Green.

2.2 Propriedades Elementares dos Espaços de Sobolev

São estudadas nesta seção propriedades elementares da geometria dos espaços de Sobolev e alguns resultados simples de dualidade.

2.2.1 Geometria dos Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$, foi visto no capítulo anterior que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de u por:

$$||u||_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty$$
$$||u||_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ ess } |D^\alpha u(x)|$$

Não é difícil verificar que a função $||u||_{m,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, é uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$. Os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ são denominados *espaços de Sobolev.*

Proposição 2.2.1 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja (u_ν) uma sucessão de Cauchy de vetores de $W^{m,p}(\Omega)$. Sendo $||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{m,p}$ para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$, segue-se que $(D^\alpha u_\nu)$ é uma sucessão de Cauchy do espaço de Banach $L^p(\Omega)$, então existe um vetor v_α de $L^p(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha u_\nu \to v_\alpha \quad \text{em} \quad L^p(\Omega). \tag{2.2.1}$$

Quando $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, $u = v_\alpha$, então

$$u_\nu \to u \quad \text{em} \quad L^p(\Omega). \tag{2.2.2}$$

Para provar a proposição é suficiente mostrar que $D^\alpha u = v_\alpha$ no sentido das distribuições, para todo $0 < |\alpha| \leq m$. Com efeito de (2.2.1) e (2.2.2) resulta

$$D^\alpha u_\nu \to v_\alpha \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \qquad 0 < |\alpha| \leq m \tag{2.2.3}$$

e

$$u_\nu \to u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.2.4}$$

pois $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Como a derivação é contínua em $\mathcal{D}'(\Omega)$, obtém-se de (2.2.4):

$$D^\alpha u_\nu \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.2.5}$$

De (2.2.3), (2.2.5) e a unicidade dos limites em $\mathcal{D}'(\Omega)$ resulta $D^\alpha u = v_\alpha\,,\ 0 < |\alpha| \leq m$, que mostra a proposição. ■

O caso particular $p = 2$ é útil nas aplicações e neste caso o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$. O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar dado por:

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$, e é denominado *espaço de Sobolev de ordem* m.

2.2.2 O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Quando $m = 0$, tem-se $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e do Corolário 1 do Capítulo 1, sabe-se que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $\mathcal{D}(\Omega)$ seja sempre denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$, como será visto posteriormente. Motivado por este fato, define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Proposição 2.2.2 *Seja $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e $\tilde{u}$ a extensão de u por zero fora de Ω. Tem-se:*

a) $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

b) $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ *para todo* $|\alpha| \leq m$

c) $||u||_{m,p} = ||\tilde{u}||_{m,p}\,.$

Demonstração: Dada uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e as condições a)–c) são satisfeitas por φ. Segue-se que a função $\sigma \colon \mathcal{D}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria linear de espaços normados e pode ser estendida por continuidade a uma isometria linear $\tilde{\sigma} \colon W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ definida do seguinte modo: se $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e (φ_ν) é uma sucessão de funções testes em Ω tais que $\varphi_\nu \to u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$, então $\widetilde{\varphi}_\nu \to \tilde{\sigma} u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Mostra-se que $\tilde{\sigma} u = \tilde{u}$ para todo $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. De fato, se $\varphi_\nu \to u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$ então a sucessão $(\widetilde{\varphi}_\nu)$ converge para $\tilde{u}$ e também para $\tilde{\sigma} u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, logo $\tilde{u} - \tilde{\sigma} u$. Pelo mesmo argumento tem-se $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ para todo $|\alpha| \leq m$ o que prova a proposição. ■

Com base na proposição anterior, mostra-se que se Ω é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, pode acontecer que $W_0^{m,p}(\Omega)$ seja diferente de $W^{m,p}(\Omega)$.

Proposição 2.2.3 *Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω no $\mathbb{R}^n$, $\complement\,\Omega$, possui medida de Lebesgue igual a zero.*

Demonstração: Sejam U uma bola aberta tal que $U \cap \Omega \neq \phi$ e $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta = 1$ em $U \cap \Omega$. Considerando $u(x) = 1, \;\; x$ em Ω, então $v = \theta u \in W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$, logo $\tilde{v} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e $D_i \tilde{v} = \widetilde{(D_i v)}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tem-se:

$$\int_U (D_i \tilde{v}) \varphi \, dx = \int_{U \cap \complement \Omega} (D_i \tilde{v}) \varphi \, dx + \int_{U \cap \Omega} (D_i \tilde{v}) \varphi \, dx = \int_{U \cap \complement \Omega} (\widetilde{D_i v}) \varphi \, dx = 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é, $D_i \tilde{v} = 0$ em U para $i = 1, 2, \ldots, n$, logo $\tilde{v}|_U$ é uma distribuição definida por uma função constante. Conseqüentemente existe uma constante c tal que $A = \{x \in U; \tilde{v} \neq c\}$ é de medida zero. Como $\tilde{v}(x) = 1$ em $U \cap \Omega$, que é um aberto não vazio, tem-se $c = 1$, portanto $U \cap \complement\,\Omega \subset A$, donde $U \cap \complement\,\Omega$ tem medida zero para qualquer bola aberta U. De

$$\complement\,\Omega = \complement\,\Omega \cap \Big[\bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(0) \Big] = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} [\complement\,\Omega \cap B_\nu(0)]$$

onde $B_\nu(0)$ é a bola aberta do $\mathbb{R}^n$ de centro em $x = 0$ e raio ν, segue-se que $\operatorname{med} \complement\,\Omega = 0$ pois

$$\operatorname{med} \complement\,\Omega \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{med}[\complement\,\Omega \cap B(0, \nu)] = 0$$

e a demonstração da proposição está concluída. ■

Observe-se que a recíproca da Proposição 2.2.3 nem sempre é verdadeira, isto é, se $\mathcal{C}\,\Omega$ ter medida de Lebesgue zero não implica, necessariamente que, $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. Para um estudo das condições necessárias e suficientes sobre $\mathcal{C}\,\Omega$ para que se tenha $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ pode consultar-se J.L. Lions [8]. Segundo estes resultados observa-se que se $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \{x_0\}$, x_0 ponto de $\mathbb{R}^n$, e $mp > n$, $1 < p < \infty$, então $W_0^{m,p}(\Omega)$ está contido estritamente em $W^{m,p}(\Omega)$.

Resulta da Proposição 2.2.3 que se o complemento de Ω possui medida positiva, tem-se $W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$. Em particular, se Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, tem-se $W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$. No caso extremo $\Omega = \mathbb{R}^n$, tem-se $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, como uma conseqüência do seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso no $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: A idéia da demonstração é primeiro aproximar os elementos de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ por elementos do mesmo espaço mas com suporte compacto. A seguir, aproximar os elementos de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto por funções testes em $\mathbb{R}^n$.

De fato, seja θ uma função teste no $\mathbb{R}^n$ tal que $\theta = 1$ sobre a bola aberta $B_1(0)$ e $\theta = 0$ fora da bola aberta $B_2(0)$. Para todo $\nu \in \mathbb{N}$, suponha $\theta_\nu(x) = \theta(x/\nu)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, (θ_ν) é uma sucessão de funções testes em $\mathbb{R}^n$ com a seguinte propriedade:

a) $\theta_\nu = 1$ sobre $B_\nu(0)$ e supp $(\theta_\nu) \subset B_{2\nu}(0)$.

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \neq (0, 0, \ldots, 0)$, existe $M_\alpha > 0$ tal que:

$$|D^\alpha \theta_\nu(x)| \leq M_\alpha / \nu^{|\alpha|}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\nu \in \mathbb{N}$.

Da parte a) e do teorema de Lebesgue sobre a convergência limitada, para todo $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tem-se:

$$\theta_\nu u \to u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$(D^\alpha \theta_\nu)u \to 0 \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n), \text{ se } \alpha \neq 0.$$

Se $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, pela fórmula de Leibniz, tem-se:

$$D^\alpha(\theta_\nu u) = \theta_\nu D^\alpha u + \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} (D^\beta \theta_\nu)(D^{\alpha-\beta} u)$$

e dos limites acima, segue-se que para todo $0 < |\alpha| \leq m$ a sucessão $(D^\alpha(\theta_\nu u))$ converge para $D^\alpha u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $(\theta_\nu u)$ é uma sucessão de vetores de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ convergente para u em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e além disto, $\theta_\nu u$ possui suporte compacto contido na bola $B_{2\nu}(0)$.

Suponha agora que $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ seja tal que seu suporte seja compacto. Se (ρ_ν) é uma sucessão regularizante no $\mathbb{R}^n$, segue-se que $(\rho_\nu * u)$ é uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$. Além disto, para todo $|\alpha| \leq m$, tem-se:

$$D^\alpha(\rho_\nu * u) = \rho_\nu * D^\alpha u \quad \text{para todo} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$D^\alpha(\rho_\nu * u) \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n),$$

como uma conseqüência do Teorema 1.2.1 do Capítulo 1 o que prova ser $\rho_\nu * u \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. ■

A seguir faz-se um comentário relativo ao suporte de funções de $W^{m,p}(\Omega)$ o qual será usado na demonstração da próxima proposição.

Observação 5 *Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Então, note-se que supp $(D^\alpha u) \subset$ supp u, para todo $|\alpha| \leq m$.*

Com efeito, seja $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\,; i \in i\}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i$ de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$. Então, por definição, ver Seção 1.2.1 do Capítulo 1, supp $u = \Omega \backslash \mathcal{O}$ onde $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. A observação decorrerá se mostrarmos que $D^\alpha u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$, para todo $i \in I$, com $|\alpha| \leq m$. Tem-se, para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_i)$:

$$\int_{\mathcal{O}_i} (D^\alpha u)\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathcal{O}_i} u\, D^\alpha \varphi\, dx = 0$$

que implica, pelo Lema de Du Bois Raymond, $D^\alpha u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$. ■

Quando Ω for um aberto arbitrário do $\mathbb{R}^n$, como foi provado, tem-se em geral $W^{m,p}(\Omega) \neq W_0^{m,p}(\Omega)$. Entretanto, o seguinte resultado caracteriza os elementos de $W^{m,p}(\Omega)$ que possuem suporte compacto.

Proposição 2.2.4 *Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e possui suporte compacto, então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Demonstração: De fato, seja $r = \text{dist}(\text{supp} u, \mathcal{C}\,\Omega) > 0$ e ρ uma função teste no $\mathbb{R}^n$ tal que $\rho = 1$ numa vizinhança U do supp u, $U \subset \Omega$. Para toda φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tem-se $\rho\varphi|_\Omega$ é uma função teste em Ω, logo se $|\alpha| \leq m$ tem-se:

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha \tilde{u}, \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u(x) D^\alpha(\rho\varphi)(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha(\rho\varphi|_\Omega)\rangle = \\ &= \langle D^\alpha u, (\rho\varphi|_\Omega)\rangle = \int_U D^\alpha u(x)\rho(x)\varphi(x)\, dx = \langle \widetilde{D^\alpha u}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

provando que $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Note-se que na última integral usa-se a Observação 5.

Tem-se também supp $\tilde{u} = \sup u$, que é um compacto do $\mathbb{R}^n$, portanto $(\rho_\nu * \tilde{u})$ é uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$ que converge para $\tilde{u}$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Seja u_ν a restrição de $\rho_\nu * \tilde{u}$ a Ω. Segue-se então que (u_ν) converge para $u = \tilde{u}|_\Omega$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Para $\nu > 2/r$, tem-se:

$$\text{supp}(\rho_\nu * \tilde{u}) \subset \text{supp } u + B_{1/\nu}(0) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, \text{supp } u) \leq r/2\} \subset \Omega,$$

logo, supp $u_\nu = \text{supp}(\rho_\nu * \tilde{u}) \cap \Omega = \text{supp}(\rho_\nu * \tilde{u})$ é um compacto de Ω. Este argumento significa que $(u_\nu)_{\nu \geq 2/r}$ é uma sucessão de funções testes em Ω convergindo para u em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é, $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, o que prova a proposição. ■

Observação 6 *Se supp u for compacto e $u \in W^{m,p}(\Omega) \cap W^{s,q}(\Omega)$, então existe uma sucessão (φ_ν) de funções testes em Ω convergente para u na topologia de $W^{m,p}(\Omega)$ e também na topologia de $W^{s,q}(\Omega)$. Isto pode ser deduzido a partir da demonstração da Proposição . Em verdade, este fato é uma conseqüência do seguinte resultado: Sejam Z um espaço vetorial* *e X, Y subespaços vetoriais de Z. Dote a X e Y de estrutura de espaços de Banach e considere o espaço de Banach $X \cap Y$ com norma*

$$||u||_{X \cap Y} = ||u||_X + ||u||_Y .$$

Seja D um subconjunto denso em X e em Y. Então D é um subconjunto denso em $X \cap Y$.

2.2.3 O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Suponha $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Seja $f \in W^{-m,q}(\Omega)$ e (φ_ν) uma sucessão de funções testes em Ω tal que $\varphi_\nu \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Resulta que $\varphi_\nu \to 0$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$, portanto, $\langle f, \varphi_\nu \rangle \to 0$, o que permite concluir que a restrição de f a $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição. Considere a aplicação linear

$$\sigma \colon W^{-m,q}(\Omega) \mapsto \mathcal{D}'(\Omega),$$

tal que $\sigma(f) = f|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ para todo f em $W^{-m,q}(\Omega)$. Por ser $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $W_0^{m,q}(\Omega)$ resulta que σ é injetora. Também se (f_ν) é uma sucessão de vetores de $W^{-m,q}(\Omega)$ tal que $f_\nu \to 0$ em $W^{-m,q}(\Omega)$ então $\sigma(f_\nu) \to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é, σ é contínua. A aplicação σ permite identificar $W^{-m,q}(\Omega)$ a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e com esta identificação tem-se:

$$W^{-m,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Quando se diz que uma distribuição T pertence a $W^{-m,q}(\Omega)$, significa dizer que T, definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$. Esta extensão contínua é representada por T. O resultado que segue caracteriza as distribuições de $W^{-m,q}(\Omega)$.

Lema 2.2.1 *Seja k um inteiro positivo e $E = (L^p(\Omega))^k$ normado por:*

$$||\omega||_E = \Big(\sum_{\nu=1}^{k} ||\omega_\nu||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p},$$

para todo $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \in E$. *Um funcional linear* f *definido em* E *é contínuo se e somente se existem* $f_1, f_2, \ldots, f_k \in L^q(\Omega)$, *dual de* $L^p(\Omega)$, *tal que*

$$\langle f, \omega \rangle = \sum_{\nu=1}^{k} \int_\Omega f_\nu(x)\omega_\nu(x)\, dx$$

para todo $\omega \in E$.

A demonstração fica como exercício para o leitor.

Teorema 2.2.2 *Seja* T *uma distribuição sobre* Ω, *então* $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ *se e somente se existem funções* $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, *tais que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha\, g_\alpha\, .$$

Demonstração: Suponha T definida pelo somatório acima. Então, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq ||\varphi||_{m,p} \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||g_\alpha||_{L^q(\Omega)} \Big)^{1/q}, \quad 1 < p < \infty.$$

Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $W_0^{m,q}(\Omega)$, a última desigualdade diz ser possível estender T, por continuidade, ao espaço $W_0^{m,q}(\Omega)$ e portanto, $T \in W^{-m,q}(\Omega)$. O caso $p = 1$ se procede de forma análoga.

Seja $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ e k o número de índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tais que $|\alpha| \leq m$. Os elementos u de $E = (L^p(\Omega))^k$ podem ser escritos como $(u_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\,$, $\;u_\alpha \in L^p(\Omega)$. Desde que a aplicação

$$\sigma \colon W_0^{m,p}(\Omega) \to E$$

tal que $\sigma(u) = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m}$ é uma isometria linear, tem-se $E_0 = \{(D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m}\, ; \in W_0^{m,q}(\Omega)\}$ é um subespaço fechado de E. Seja f_0 o funcional linear definido em E_0 por

$$\langle f_0, (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m} \rangle = \langle T, u \rangle, \qquad u \in W_0^{m,p}(\Omega),$$

isto é, $f_0 = T\sigma^{-1}$, é um funcional linear contínuo. Pelo teorema de Hahn-Banach, f_0 possui uma extensão ao espaço E, que representa-se por f. Pelo Lema 2.2.1 existe um vetor $({g'}_\alpha)_{|\alpha|\leq m}\,,\;\; g'_\alpha \in L^q(\Omega)$, dual de $L^p(\Omega)$, tal que:

$$\langle f, (\omega_\alpha)_{|\alpha|\leq m}\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega g'_\alpha(x)\omega_\alpha(x)\,dx$$

para todo $(\omega_\alpha)_{|\alpha|\leq m}$ em E.

Para todo φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tem-se:

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \langle f_0, (D^\alpha\varphi)_{|\alpha|\leq m}\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega g'_\alpha(x) D^\alpha\varphi(x)\,dx = \\ &= \langle \sum_{|\alpha\leq m} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha g'_\alpha, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Tomando $g_\alpha = (-1)^{|\alpha|}\, g'_\alpha$, a última igualdade diz que

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha\, g_\alpha$$

o que demonstra o teorema. ■

Observação 7 *O mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 2.2.2 mostra que se $T \in (W^{m,p}(\Omega))'$, isto é, T pertence ao dual de $W^{m,p}(\Omega)$, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, dual de $L^p(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tais que*

$$\langle T, u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega g_\alpha(x) D^\alpha u(x)\,dx$$

para todo u em $W^{m,p}(\Omega)$. Tem-se $T|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$, mas a aplicação

$$\sigma\colon (W^{m,p}(\Omega))' \mapsto \mathcal{D}'(\Omega)$$

definida por $\sigma(T) = T|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ não é injetora se $W_0^{m,p}(\Omega)$ está contido estritamente em $W^{m,p}(\Omega)$.

De fato, seja $u_0 \in W^{m,p}(\Omega)$ tal que $u_0 \notin W_0^{m,p}(\Omega)$ e T o funcional identicamente nulo em $W^{m,p}(\Omega)$. Considere, pelo Teorema de Hahn-Banach, $S \in (W^{m,p}(\Omega))'$ tal que $Su = 0$ para $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e $\langle S, u_0\rangle \neq 0$. Tem-se $T|_{\mathcal{D}(\Omega)} = S|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ mas $T \neq S$ pois $\langle T, u_0\rangle = 0$ e $\langle S, u_0\rangle \neq 0$. Por esta razão diz-se que, se $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$, o espaço $(W^{m,p}(\Omega))'$ não define um espaço de distribuições sobre Ω.

2.2.4 Reflexividade dos Espaços de Sobolev

Para provar que os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, são reflexivos, dois resultados são recordados: o primeiro é que os $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, são reflexivos e o segundo é o Teorema de Alaoglu-Bourbaki; este teorema afirma que um espaço de Banach E é reflexivo se e somente se toda sucessão limitada de vetores de E possui uma subsucessão fracamente convergente.

Teorema 2.2.3 *Se* $1 < p < +\infty$ *então* $W^{m,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach reflexivo.*

Demonstração: Seja (u_ν) uma sucessão limitada de vetores de $W^{m,p}(\Omega)$. Então, para todo $|\alpha| \leq m$, $(D^\alpha u_\nu)$ é limitada em $L^p(\Omega)$. Resulta a existência de uma subsucessão (u'_ν) de (u_ν) que converge fracamente, logo $(D_1 u'_\nu)$ é limitada em $L^p(\Omega)$, assim existe uma subsucessão (u''_ν) de (u'_ν) tal que $(D_1 u''_\nu)$ é fracamente convergente. Por sucessivas aplicações deste argumento encontra-se uma subsucessão (v_ν) de (u_ν) e uma função $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \leq m$ a sucessão $(D^\alpha v_\nu)$ é fracamente convergente em $L^p(\Omega)$ para um vetor v_α. Isto significa que para cada $|\alpha| \leq m$ e $\bar{\omega} \in L^q(\Omega)$, tem-se:

$$\int_\Omega D^\alpha\, v_\nu(x)\omega(x)\, dx \to \int_\Omega v_\alpha(x)\omega(x)\, dx$$

sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Considerando-se $v = v_{(0,0,\ldots,0)}$, da convergência acima, obtém-se que $v_\nu \to v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $D^\alpha u_\nu \to v_\alpha$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, $0 < |\alpha| \leq m$, portanto $D^\alpha u_\nu \to D^\alpha v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$. Da unicidade dos limites em $\mathcal{D}'(\Omega)$ segue-se então que $D^\alpha v = v_\alpha$, $|\alpha| \leq m$. Assim $v \in W^{m,p}(\Omega)$.

Resta somente provar que (v_ν) converge para v fracamente em $W^{m,p}(\Omega)$. De fato, seja T uma forma linear contínua definida em $W^{m,p}(\Omega)$. Da Observação 2.2.3 desta seção, tem-se a existência de funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que

$$\langle T, u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega g_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx$$

para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Segue-se que:

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty}\langle T, v_\nu\rangle &= \lim_{\nu\to\infty}\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega g_\alpha(x)D^\alpha v_\nu(x)\,dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega g_\alpha(x)D^\alpha v(x)\,dx = \langle T, v\rangle\end{aligned}$$

o que demonstra o teorema. ■

2.2.5 Os Espaços $H^m(\Omega)$ e $H^{-m}(\Omega)$

Se L for o operador diferencial $\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}$, resulta que para $u \in H^m(\Omega)$, Lu é uma distribuição não necessariamente definida por uma função localmente integrável. Além disto, se $u \in H^m(\Omega)$ e $|\alpha| \le m$, $g_\alpha = D^\alpha u$ pertence a $L^2(\Omega)$ e $Lu = \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha g_\alpha$ pertence a $H^{-m}(\Omega)$ como uma conseqüência do Teorema 2.2.3 deste parágrafo. Portanto, podemos considerar a realização de L como um operador linear de $H^m(\Omega)$ em $H^{-m}(\Omega)$. A seguir caracteriza-se a imagem de $H_0^m(\Omega)$ por L.

Proposição 2.2.5 *O complemento ortogonal de $H_0^m(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é o núcleo do operador diferencial linear L.*

Demonstração: Para todo u em $H^m(\Omega)$ e φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tem-se:

$$\langle Lu, \varphi\rangle = (u, \bar{\varphi})_m .$$

Se u pertence ao ortogonal de $H_0^m(\Omega)$ então $(u, v)_m = 0$ para todo $v \in H_0^m(\Omega)$, em particular, $(u, \bar{\varphi})_m = 0$ para toda função teste φ em Ω, portanto, $\langle Lu, \varphi\rangle = 0$ para toda função teste, isto é, $Lu = 0$.

Suponha agora $u \in H^m(\Omega)$ e $Lu = 0$. Então $(u, \varphi)_m = \langle Lu, \bar{\varphi}\rangle = 0$ par toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $H_0^m(\Omega)$, tem-se $(u, v)_m = 0$ para todo v em $H_0^m(\Omega)$, isto é, u é ortogonal a $H_0^m(\Omega)$. ■

Proposição 2.2.6 *O operador L transforma $H_0^m(\Omega)$ sobre $H^{-m}(\Omega)$, de maneira isométrica.*

Demonstração: Seja $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que $Lu = 0$. Pela Proposição 2.2.5 tem-se $u \in H_0^m(\Omega) \cap (H_0^m(\Omega))^\perp$, portanto, $u = 0$. Se $f \in H^{-m}(\Omega)$, pelo teorema de Riesz existe $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que

$$\langle f, v \rangle = (v, u)_m \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^m(\Omega),$$

e $||f||_{-m} = ||u||_m$. Segue-se que

$$\langle f, \varphi \rangle = (\varphi, u)_m = \langle L\bar{u}, \varphi \rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

portanto, tem-se $f = L\bar{u}$ com $u \in H_0^m(\Omega)$ e $||L\bar{u}||_{-m} = ||f||_{-m} = ||u||_m = ||\bar{u}||_m$.

Proposição 2.2.7 *$\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^{-m}(\Omega)$.*

Demonstração: Dado $f \in H^{-m}(\Omega)$, seja $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que $Lu = f$. Se (φ_ν) é uma sucessão de $\mathcal{D}(\Omega)$, convergente para u em $H_0^m(\Omega)$, a sucessão $(L\varphi_\nu)$ converge para $Lu = f$ em $H^{-m}(\Omega)$, porque L é uma isometria. Isto prova a proposição, desde que $L\varphi_\nu$ é uma função teste. ■

Proposição 2.2.8 *$\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Tem-se $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega)$ com $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $H_0^m(\Omega)$. Então por dualidade resulta $H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ com $H^{-m}(\Omega)$ denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Desta densidade e da densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^{-m}(\Omega)$ dada pela Proposição 2.2.7, segue o corolário. ■

Para concluir esta seção mostra-se a Desigualdade de Poincaré da qual obtém-se significantes propriedades para os espaços $H_0^m(\Omega)$. Inicia-se introduzindo a seguinte definição. Diz-se que o aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é limitado na direção x_i se existe um intervalo aberto finito $]a, b[$ da reta tal que

$$pr_i\, \Omega \subset]a, b[$$

onde pr_i é a projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre o eixo x_i.

Teorema 2.2.4 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ limitado em alguma direção x_i. Então*

$$\int_\Omega |u|^2\,dx \le (b-a)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \quad \textit{para todo} \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.2.6}$$

onde $pr_i\,\Omega \subset]a,b[$.

Demonstração: Primeiro mostra-se a desigualdade (2.2.6) para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O resultado geral seguirá então por densidade. Inicialmente considera-se $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$. Tem-se:

$$\varphi(t) = \int_a^t \varphi'(s)\,ds, \qquad a \le t \le b,$$

que acarreta, pela desigualdade de Schwarz, $|\varphi(t)|^2 \le (b-a)\displaystyle\int_a^b |\varphi'(s)|^2\,ds$, a qual implica

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt \le (b-a)^2 \int_a^b |\varphi'(t)|^2\,dt. \tag{2.2.7}$$

Sem perda de generalidade supõe-se que Ω é limitado na direção x_1. Considera-se a notação $x = (t, x')$ onde $x' = (x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_a^b |\varphi(t,x')|^2\,dt\Big) dx'. \tag{2.2.8}$$

Observa-se que $\psi_{x'}(t) = \varphi(t,x')$ pertence a $\mathcal{D}(]a,b[)$ para cada $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Logo a desigualdade (2.2.7) com $\psi_{x'}$ implica

$$\int_a^b |\varphi(t,x')|^2\,dt \le (b-a)^2 \int_a^b \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x')\right|^2 dt.$$

Considerando esta desigualdade em (2.2.8) resulta:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2\,dx \le (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_a^b \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x')\right|^2 dt\Big) dx' = (b-a)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx,$$

que é precisamente a desigualdade (2.2.6). Assim o teorema está provado. ■

Observação 8 *Considere-se em $H_0^1(\Omega)$, Ω limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$, a expressão*

$$||u|| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

Então a desigualdade de Poincaré diz que $||u||$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ e que em $H_0^1(\Omega)$ as normas $||u||$ e $||u||_1 = ||u||_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes. Com base neste resultado, em $H_0^1(\Omega)$, Ω limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$, considera-se o produto escalar

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}} \, dx.$$

Corolário 2 *Em $H_0^m(\Omega)$, Ω aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$, as normas*

$$||u|| = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

e $||u||_1$ são equivalentes.

Demonstração: Mostra-se que

$$||u||_1^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \leq C ||u||^2 \tag{2.2.9}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de $u \in H_0^m(\Omega)$. A outra desigualdade é imediata. Seja $u \in H_0^m(\Omega)$ então $D^\alpha u \in H_0^1(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq m - 1$. Da Observação 8 resulta então

$$\int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \Big| \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u \Big|^2 \, dx.$$

Isto acarreta,

$$\int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \leq C \sum_{|\beta|=m} \int_\Omega |D^\beta u|^2 \, dx \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq m-1.$$

Esta desigualdade implica (2.2.9) e a demonstração está concluída. ■

Corolário 3 *Em* $W_0^{m,p}(\Omega)$, Ω *aberto limitado em alguma direção* x_i *de* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p < \infty$, *as normas*

$$||u|| = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \Big)^{1/p}$$

e $||u||_{m,p}$ *são equivalentes.*

Demonstração: Aplicando raciocínio análogo ao usado para obter (2.2.8), resulta

$$\int_a^b |\varphi(t)|^p \, dt \leq (b-a)^{\frac{p+q}{q}} \int_a^b |\varphi'(t)|^p \, dt, \qquad \Big(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big)$$

e

$$\int_a^b |\varphi(t)| \, dt \leq (b-a) \int_a^b |\varphi'(t)| \, dt, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[).$$

Com estas desigualdades e com argumentos semelhantes aos usados na demonstração do Corolário 2, segue o corolário. ■

Observe que o Corolário 3 com Ω limitado do $\mathbb{R}^n$ também pode ser obtido usando as desigualdades de Sobolev e serem demonstradas no próximo parágrafo.

Observação 9 *Considere-se em* $H_0^m(\Omega)$, Ω *aberto limitado em alguma direção* x_i *de* $\mathbb{R}^n$, *a norma introduzida na Observação 8. Então pelos argumentos usados na demonstração do Teorema 2.2.4, obtém-se que*

$$L \colon H_0^m(\Omega) \mapsto H^{-m}(\Omega), \qquad L = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$$

é uma isometria linear. Em particular

$$-\Delta \colon H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega), \qquad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

é uma isometria linear.

2.3 Imersões de Espaços de Sobolev

Neste parágrafo estuda-se a relação entre os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e certos espaços clássicos de funções em $\mathbb{R}^n$. Mostra-se certa regularidade dos objetos de um certo espaço de Sobolev, isto é, mostra-se que quando a ordem m de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é grande eles possuem derivadas genuinas em $\mathbb{R}^n$.

O estudo é dividido em três partes:

I) $n \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$

II) $n = 1$ e $1 \leq p < \infty$

III) $n \geq 1$ e $p = \infty$

Na parte I) analisa-se os três casos possíveis: $mp < n$, $mp = n$ e $mp > n$. As partes II) e III) são estudadas nas Seções 2.3.4 e 2.3.5, respectivamente. Assim todos os casos possíveis são analisados.

No que se segue, nas três primeiras seções, estuda-se a parte I), isto é, quando $n \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$.

2.3.1 Caso $mp < n$

Nesta seção mostra-se a imersão contínua de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$, q especial.

Inicia-se o estudo com a obtenção de alguns resultados preliminares. Representa-se por p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a projeção de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n-1}$ dado por

$$p_i x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Os pontos do $\mathbb{R}^{n+1}$ são também escritos sob a forma (x, t) sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$; as projeções de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$\sigma_i(x, t) = (p_i x, t), \;\; i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{e} \quad \sigma_{n+1}(x, t) = x.$$

Proposição 2.3.1 (Sobolev-Gagliardo) *Se* $u_1, u_2, \ldots, u_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ *então*

a) $u = (u_1 p_1) \cdot (u_2 p_2) \ldots (u_n p_n) \in L^1(\mathbb{R}^N)$

b) $||u||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} ||u_i||_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$

Demonstração: Inicialmente, observe que se $x \in \mathbb{R}^n$, $(u_i p_i)(x) = u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. No caso $n = 2$ vem $u(x_1, x_2) = u_1(x_1) u_2(x_2)$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$, portanto

$$||u||_{L^1(\mathbb{R}^2)} = ||u_1||_{L^1(\mathbb{R})} \cdot ||u_2||_{L^1(\mathbb{R})} .$$

Suponha a proposição verdadeira para $n \geq 2$. Dados $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$, seja $\omega = \prod_{i=1}^{n+1} \omega_i \sigma_i$, isto é,

$$\omega(x,t) = \prod_{i=1}^{n} \omega_i(p_i x, t) \cdot \omega_{n+1}(x) \quad \text{para todo} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$, considere:

$$\begin{aligned} u_{i,t}(y) &= |\omega_i(y,t)|^{n/n-1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n \\ u_t(x) &= \prod_{i=1}^{n} u_{i,t}\, p_i(x) = \prod_{i=1}^{n} |\omega_i(p_i x, t)|^{n/n-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Do teorema de Fubini obtém-se $u_{i,t} \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ e da hipótese indutiva obtém-se $u_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e também

$$||u_t||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} ||u_{i,t}||_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} . \tag{2.3.10}$$

Observando que $|\omega(x,t)| = u_t(x)^{(n-1)/n}\, |\omega_{n+1}(x)|$ e que $\dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n} = 1$, de (2.3.10) e da desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\omega(x,t)| dx \;&= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t(x))^{(n-1)/n}\, |\omega_{n+1}(x)|\, dx \;\leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x) dx \right)^{(n-1)/n} ||\omega_{n+1}||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \;\leq \qquad (2.3.11) \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} ||u_{i,t}||_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{(n-1)/n} \cdot ||\omega_{n+1}||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Obtém-se também,

$$||u_{i,t}||^{n-1}_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\omega_i(y,t)|^n \, dy.$$

Se $\theta_i(t) = ||u_{i,t}||^{(n-1)/n}_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$ segue-se do teorema de Fubini que $\theta_i \in L^n(\mathbb{R})$ e que:

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_i^n(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega_i(y,t)|^n \, dydt,$$

isto é,

$$||\theta||_{L^n(\mathbb{R})} = ||\omega||_{L^n(\mathbb{R}^n)} . \tag{2.3.12}$$

De (2.3.11) e (2.3.12) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\omega(x,t)|\, dxdt \ &\leq \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} \theta_i(t)dt \cdot ||\omega_{n+1}||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \ \leq \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} \left[\int_{\mathbb{R}} \theta_i^n(t)\, dt \right]^{1/n} ||\omega_{n+1}||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \ \leq \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} ||\theta_i||_{L^n(\mathbb{R})} \cdot ||\omega_{n+1}||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \ = \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} ||\omega_i||_{L^n(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

o que prova a proposição.

Proposição 2.3.2 *Dado $1 \leq p < n$, considere $C_0 = \dfrac{(n-1)p}{n-p}$ e $s = \dfrac{n(p-1)}{n-p}\cdot$ Então, para toda função teste φ sobre o $\mathbb{R}^n$, existem $u_1, u_2, \ldots, u_n$ no $L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, sendo:*

a) $||u_i||^{n-1}_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^s \, |D_i\varphi(x)|\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

b) $|\varphi(x)|^{p/(n-p)} \leq |u_i(p_i x)|, \quad$ *para* $\quad x \in \mathbb{R}^n$

Demonstração: Não há perda de generalidade admitir-se $i = 1$. Se $u_1(y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t,y)|^{p/(n-p)}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, é simples concluir, notando que o suporte de u_1 é um compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$, que

$u_1 \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ e que u_1 satisfaz a condição b). Mostra-se que u_1 também satisfaz a primeira condição a). Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, tem-se:

$$D_1|\varphi|^{C_0} = D_1(\varphi\bar{\varphi})^{C_0/2} = (C_0/2)|\varphi|^{C_0-2}(\varphi D_1\bar{\varphi} + \bar{\varphi}D_1\varphi) = C_0|\varphi|^{C_0-2}\ \mathrm{Re}(\varphi D_1\bar{\varphi})$$

donde, notando que $C_0 = s+1$,

$$\left|D_1|\varphi(x)|^{C_0}\right| \leq C_0|\varphi(x)|^s\,|D_1\varphi(x)|.$$

É simples verificar que se x pertence à fronteira de supp φ então existe $D_1|\varphi(x)|^{C_0}$ e $D_1|\varphi(x)|^{C_0} = 0$. Claramente $D_1|\varphi(x)|^{C_0} = 0$ para todo x fora de suppφ. Da última desigualdade obtém-se que $D_1|\varphi(x)|^{C_0}$ é contínua para todo x pertencente à fronteira de supp$u$. Resulta então que $D_1|\varphi|^{C_0}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Portanto disto e da última desigualdade vem:

$$|\varphi(t,y)|^{C_0} = \int_{-\infty}^{t} D_1|\varphi(\xi,y)|^{C_0}\,d\xi \leq C_0\int_{\mathbb{R}}|\varphi(\xi,y)|^s\,|D_1\varphi(\xi,y)|\,d\xi$$

que acarreta

$$|u_1(y)|^{n-1} \leq C_0\int_{\mathbb{R}}|\varphi(\xi,y)|^s\,|D_1\varphi(\xi,y)|\,d\xi$$

de onde conclui-se a parte a). ■

Proposição 2.3.3 (Desigualdade de Sobolev) *Suponha* $1 \leq p < n$ *e considere*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \qquad e \qquad C_0 = \frac{(n-1)p}{(n-p)}\cdot$$

Então para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *tem-se:*

$$||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_0}{n}\sum_{i=1}^{n}||D_i\varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Demonstração: Quando $p = 1$, tem-se $s = 0$, $C_0 = 1$ e $(n-1)q = n$ na Proposição 2.3.2. Portanto,

$$||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(n-1)q} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{n/(n-1)} \, dx \Big)^{n-1} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |u_i(p_i(x))| \, dx \Big)^{n-1}.$$

Disto e das Proposições 2.3.1 e 2.3.2 decorre

$$||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(n-1)q} \leq \prod_{i=1}^{n} ||u_i||_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{2.3.13}$$

que implica a desigualdade de Sobolev, pois para números reais não negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tem-se $\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i \Big)^{1/n} \leq \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$. No caso $p > 1$, considere $p' = p/(p-1)$. Desde que $p's = np/(n-p) = q$, tem-se:

$$|| \, |\varphi|^s ||_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}^{p'} = ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{q}.$$

Considere $u_1, u_2, \ldots, u_n$ em $L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ como na Proposição 2.3.2. Pela parte a) desta proposição e pela desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$||u_i||_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{n-1} \leq C_0 ||D_i\varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{q/p'}.$$

Da parte b) da Proposição 2.3.2, resulta:

$$|\varphi(x)|^q = (|\varphi(x)|^{p/(n-p)})^n \leq \prod_{i=1}^{n} |u_i(p_i(x))|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pela Proposição 2.3.1 e pelas duas últimas desigualdades, obtém-se

$$\begin{aligned} ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(n-1)q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q \, dx \right)^{n-1} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |u_i(p_i(x))| \, dx \right)^{n-1} \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} ||u_i||_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{n-1} \leq C_0^n ||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{nq/p'} \prod_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Note que sendo $(n-1)q - \dfrac{nq}{p'} = n$, a desigualdade anterior implica a de Sobolev quando $\varphi \neq 0$. Quando $\varphi = 0$ a desigualdade segue diretamente. Assim a demonstração está concluída. ■

Observação 10 *Note-se que a desigualdade de Sobolev dada na Proposição 2.3.3 é válida para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, isto é, para $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e φ com suporte compacto. Em particular de (2.3.13) resulta com $q = n/(n-1)$:*

$$||\varphi||^n_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{n=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Observação 11 *Note-se que se $1 \leq p < \infty$ e m, n são números naturais não negativos então*

a) $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0 \quad$ *se e somente se* $\quad mp < n$

b) $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0 \quad$ *implica* $\quad p < q$

A seguir mostra-se a imersão de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.3.1 (Sobolev) *Sejam $1 \leq p < \infty$, $\; mp < n$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} \cdot$ Então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^q(\mathbb{R}^n)$ e se verifica*

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.3.14}$$

para todo $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, onde $C_0 = (n-1)p/(n-p)$.

Demonstração: Prova-se primeiro a desigualdade para as funções φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Na prova aplica-se o método de indução com relação a m. Com efeito, para $m = 1$ a desigualdade (2.3.14) é a desigualdade obtida na Proposição 2.3.3. Suponha então que (2.3.14) é válida para $m \geq 1$, isto é,

$$||\varphi||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha \varphi||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

com $mp_1 < n$ e $\dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{m}{n}\cdot$ Deseja-se obter a desigualdade (2.3.14) para $m+1$. Tem-se então $(m+1)p < n$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m+1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} - \frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{n}\cdot$$

Da hipótese de indução e da Proposição 2.3.3 resulta então para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$||\varphi||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.3.15}$$

$$||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_0}{n} \sum_{i=1}^{n} ||D_i \varphi||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.3.16}$$

De (2.3.15) obtém-se:

$$||D_i\varphi||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha D_i \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{n} \sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^{m+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha D_i \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \\ &= \left(\frac{C_0}{n}\right)^{m+1} \sum_{|\alpha|=m+1} ||D^\alpha \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

De (2.3.16) e (2.3.17) segue a desigualdade (2.3.14) para $m+1$. Assim o teorema está mostrado para φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma sucessão (φ_ν) de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_\nu \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$D^\alpha \varphi_\nu \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n), \quad \text{para todo } |\alpha| \leq m. \tag{2.3.18}$$

Tem-se:

$$||\varphi_\nu - \varphi_\mu||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha \varphi_\nu - D^\alpha \varphi_\mu||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Logo, pelas convergências (2.3.18), segue-se que (φ_ν) é uma sucessão de Cauchy em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Resulta disto e de (2.3.18) que

$$\varphi_\nu \to v \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \varphi_\nu \to u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.3.19}$$

Passando ambas as convergências ao espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ resulta $u = v$, portanto $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Assim $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Tomando o limite em ambos os lados da desigualdade

$$||\varphi_\nu||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha \varphi_\nu||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

segue das convergências (2.3.18) e (2.3.19), a desigualdade (2.3.14) para $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Isto prova o teorema. ■

Como uma conseqüência direta do Teorema 2.3.1, segue o resultado:

Corolário 4 *Seja* $1 \leq p < \infty$, $mp < n$ *e* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} \cdot$ *Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Corolário 5 *Se* $1 \leq p < \infty$, $mp < n$ *e* $p \leq q \leq \dfrac{np}{n - mp}$ *então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: De fato, ponha $q_0 = \dfrac{np}{n - mp}$ e considere o espaço de Banach $E = L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ com a norma

$$||u||_E = ||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||u||_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Sendo $p \leq q \leq q_0$, tem-se pela Proposição 1.2.1 do Capítulo 1, que $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$. Pelo Corolário 4 resulta $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow E$. Destas duas imersões contínuas segue o corolário. ■

Corolário 6 *Se* $1 \leq p < \infty$, $mp < n$ *e* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$ *então* $W^{m+k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* k *inteiro não negativo.*

Demonstração: Seja $|\alpha| \leq k$ então pelo Teorema 2.3.1 resulta para φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$||D^\alpha \varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\beta|=m} ||D^\beta D^\alpha \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

de onde

$$||D^\alpha \varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\sum_{|\gamma| \leq m+k} ||D^\gamma \varphi||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p}$$

que implica

$$||\varphi||_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||\varphi||_{W^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de φ. Desta desigualdade e da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $W^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)$ segue o corolário. ■

Observação 12 *Seja $1 \leq p < n$. Note-se que se existem constantes $C > 0$ e $1 \leq r \leq \infty$ verificando a desigualdade*

$$||\varphi||_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{i=1}^n ||D_i \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Então $r = q$ onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n} \cdot$

Com efeito, da desigualdade com $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$, $\lambda > 0$, resulta

$$||\varphi||_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\lambda^{\left(1+\frac{n}{r}-\frac{n}{p}\right)} \sum_{i=1}^n ||D_i \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ para todo } \lambda > 0$$

que implica $1 + \dfrac{n}{r} - \dfrac{n}{p} = 0$. ■

2.3.2 Caso $mp = n$

Nesta seção mostra-se que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, \infty[$. Para isto prova-se inicialmente o seguinte resultado:

Lema 2.3.1 *Seja $q \in [n, \infty[$. Então existe uma constante $C(n,q) > 0$ tal que*

$$||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,q)||\varphi||_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: De fato, da Observação 10 deste capítulo resulta

$$||\varphi||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Seja $\rho > 1$ e $\psi = |\varphi|^{\rho-1}\,\varphi$ com $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Então desta desigualdade com ψ resulta

$$||\varphi||_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\rho} \leq \rho \prod_{i=1}^{n} ||\,|\varphi|^{\rho-1}\, D_i\varphi||_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n}.$$

Tem-se, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\rho-1}\,|D_i\varphi|\,dx = ||\varphi||_{L^{(\rho-1)p'}(\mathbb{R}^n)}^{\rho-1}\,||D_i\varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Combinando as duas últimas desigualdades resulta

$$||\varphi||_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\rho} \leq \rho||\varphi||_{L^{(\rho-1)p'}(\mathbb{R}^n)}^{\rho-1} \prod_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/n}.$$

Fazendo $p = n$, portanto $p' = n/(n-1)$, nesta última desigualdade e notando que a média geométrica é menor ou igual que a média aritmética, obtém-se:

$$||\varphi||_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\rho} \leq \frac{\rho}{n}\,||\varphi||_{L^{(\rho-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\rho-1} \sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)}.$$

Desta expressão e aplicando a desigualdade de Hölder para números reais não negativos $ab \leq \dfrac{a^\rho}{\rho} + \dfrac{b^{\rho/(\rho-1)}}{\rho/(\rho-1)}$ resulta

$$||\varphi||_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{(\rho-1)}{\rho}\,||\varphi||_{L^{(\rho-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.3.20}$$

A expressão (2.3.20) implicará a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} ||\varphi||_{L^{(n+k)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{(n-1)}{n+k}\,||\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \\ + \frac{(k+1)(2n+k)}{2n(n+k)} \sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)}\,,\ \forall\, k = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Mostra-se esta desigualdade por indução com relação a k. Com efeito, fazendo $\rho = n$ em (2.3.20) resulta (2.3.21) com $k = 0$. Suponha (2.3.21) verdadeiro para $k \geq 0$ e considere $k+1$. Fazendo $\rho = n + k + 1$ em (2.3.20) e usando a hipótese de indução, obtém-se:

$$\begin{aligned} &||\varphi||_{L^{(n+k+1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq \frac{n+k}{n+k+1}\left[\frac{n-1}{n+k}\,||\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \frac{(k+1)(2n+k)}{2n(n+k)}\sum_{i=1}^{n}||D_i\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right] + \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}||D_i\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)} = \frac{n-1}{n+k+1}\,||\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \\ &+ \frac{(k+2)(2n+k+1)}{2n(n+k+1)}\sum_{i=1}^{n}||D_i\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

que dá a desigualdade (2.3.21) com $k+1$.

Seja $q \in [n, \infty[$ então existe $k = 0, 1, \ldots$ tal que $n \leq q \leq \frac{(n+k)n}{n-1}\cdot$ Pela desigualdade de interpolação, Proposição 1.2.1 do Capítulo 1, resulta:

$$||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \theta||\varphi||_{L^n(\mathbb{R}^n)} + (1-\theta)||\varphi||_{L^{(n+k)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.3.22}$$

onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{1-\theta}{(n+k)n/(n-1)}$ e $0 \leq \theta \leq 1$. Combinando (2.3.21) e (2.3.22) obtém-se a desigualdade do lema. ■

Teorema 2.3.2 *Seja* $1 \leq p < \infty$, $mp = n$ *e* $q \in [p, \infty[$. *Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Mostra-se o teorema por indução com relação a m. Com efeito, se $m=1$ então $p=n$ e o Lema 2.3.1 diz

$$||\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,q)||\varphi||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

O teorema segue então pela densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Suponha que o teorema é válido para $m \geq 1$ e considere $m+1$ com $(m+1)p=n$. Tem-se então $\dfrac{1}{n/m} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n} > 0$ que implica, pelo Corolário 4, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{n/m}(\mathbb{R}^n)$, que por sua vez, pelo Corolário 6, acarreta $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m,n/m}(\mathbb{R}^n)$. Pela hipótese de indução resulta $W^{m,n/m}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [n/m, \infty[$. Das duas últimas inclusões contínuas segue

$$W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{para todo} \quad q \in [n/m, \infty[\,. \tag{2.3.23}$$

De (2.3.23) resulta $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{n/m}(\mathbb{R}^n)$ e como $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, $p = \frac{n}{m+1}$, segue-se por interpolação de espaços que

$$W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{para todo} \quad q \in [p, n/m]. \tag{2.3.24}$$

De (2.3.23) e (2.3.24) segue o teorema. ■

No caso $p=1$ tem-se o resultado suplementar $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$. $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{K}$, equipado com a norma do supremo em $\mathbb{R}^n$ (ver a seção a seguir).

2.3.3 Caso $mp > n$

Nesta seção mostra-se que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente num espaço de funções regulares em $\mathbb{R}^n$.

Inicialmente introduz-se alguns espaços que serão utilizados na formulação dos resultados. Com efeito, denota-se por $C_b^k(\mathbb{R}^n)$, k inteiro não negativo, o espaço de Banach das funções $u\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}$ de classe C^k, limitadas assim como todas suas derivadas até a ordem k, equipado com a norma

$$||u||_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|,$$

e denota-se por $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$, o espaço de Banach das funções $u \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ tais que u e todas suas derivadas até a ordem k são Hölderianas com expoente λ em $\mathbb{R}^n$, mais precisamente,

$$\max_{|\alpha|\leq k} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{||x-y||^\lambda} < \infty,$$

equipado com a norma

$$||u||_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = ||u||_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} + \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{||x-y||^\lambda}.$$

Observação 13 *Claramente* $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$. *Tem-se também que*

$$C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n) \qquad \textit{se} \qquad 0 < \sigma < \lambda.$$

Com efeito, se $x \neq y$ e $||x-y|| \leq 1$ então

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{||x-y||^\sigma} \leq \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{||x-y||^\lambda}$$

e se $||x-y|| > 1$ então

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{||x-y||^\sigma} \leq |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq 2 \sup_{z\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(z)|$$

de onde segue a afirmação. ■

Tem-se o seguinte resultado:

Lema 2.3.2 *Seja* $\lambda_0 = m - \dfrac{n}{p}$ *com* $0 < \lambda_0 \leq 1$, U_r *um paralelepípedo do* $\mathbb{R}^n$ *de lados paralelos aos eixos coordenados e cada lado de comprimento* $r > 0$ *e* $x_0 \in U_r$. *Então*

$$\left| \varphi(x_0) - \frac{1}{r^n} \int_{U_r} \varphi(z)\, dz \right| \leq \frac{1}{\lambda} r^\lambda \sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

onde

a) $\lambda = \lambda_0 \quad e \quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m-1}{n} \quad se \quad \lambda_0 < 1$

b) $0 < \lambda < 1 \quad e \quad q = \dfrac{n}{1-\lambda} \quad se \quad \lambda_0 = 1$

Observação 14 *No caso a) tem-se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m-1}{n} > 0$ *pois* $\lambda_0 < 1$ *e no caso b),* $\dfrac{n}{1-\lambda} > p$ *pois* $\lambda_0 = 1$.

Demonstração do Lema: Seja $z \in U_r$ e $u(t) = \varphi(tz + [1-t]x_0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\varphi(z) - \varphi(x_0) = u(1) - u(0) = \int_0^1 u'(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 D_i\varphi(tz + [1-t]x_0)(z_i - x_{oi})$$

que implica

$$|\varphi(z) - \varphi(x_0)| \leq r \sum_{i=1}^n \int_0^1 |D_i\varphi(tz + [1-t]x_0)|\,dt.$$

Notando que $\varphi(x_0) = \dfrac{1}{r^n}\displaystyle\int_{U_r} \varphi(x_0)\,dz$ e usando esta última desigualdade, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{r^n}\int_{U_r} \varphi(z)\,dz - \varphi(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{r^n}\int_{U_r} [\varphi(z) - \varphi(x_0)]\,dz\right| \\ &\leq r^{1-n} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_{U_r} |D_i\varphi(tz + [1-t]x_0)|dzdt. \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Fazendo $y = tz + (1-t)x_0$ resulta

$$\begin{aligned} \int_{U_r} |D_i\varphi(tz + [1-t]x_0|\,dz &= \int_{(1-t)x_0 + tU_r} |D_i\varphi(y)|t^{-n}\,dy = \\ &= t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |D_i\varphi(y)|\chi_{(1-t)x_0+tU_r}(y)\,dy \end{aligned}$$

onde $\chi_{(1-t)x_0+tU_r}$ é a função característica do conjunto $(1-t)x_0 + tU_r$. Aplicando a desigualdade de Hölder $\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1\right)$ nesta última igualdade, vem:

$$\int_{U_r} |D_i\varphi(tz + [1-t]x_0)|\,dz \leq t^{-n}||D_i\varphi||_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}\,(t^n r^n)^{1/\beta'}. \tag{2.3.26}$$

Combinando (2.3.25) e (2.3.26) resulta

$$\left|\varphi(x_0) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} \varphi(z)\, dz\right| \leq r^{1-n+\frac{n}{\beta'}} \Big(\sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} \Big) \int_0^1 t^{-n+\frac{n}{\beta'}}\, dt.$$

Observando que $1 - n + \dfrac{n}{\beta'} = 1 - \dfrac{n}{\beta}$ obtém-se desta última desigualdade

$$\left|\varphi(x_0) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} \varphi(z)\, dz\right| \leq r^{1-\frac{n}{\beta}} \Big(\sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} \Big) \int_0^1 t^{-n/\beta}\, dt. \tag{2.3.27}$$

Fazendo $\beta = q$ em (2.3.27) obter-se-á o lema. Com efeito:

Caso a). Considere $\beta = q$, $q = np/(n - [m-1]p)$, em (2.3.27). Então notando que $1 - \dfrac{n}{q} = m - \dfrac{n}{p} = \lambda_0$, portanto $\displaystyle\int_0^1 t^{-n/q}\, dt = 1/\lambda_0$, obtém-se:

$$\left|\varphi(x_0) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} \varphi(z)\, dz\right| \leq \frac{1}{\lambda_0}\, r^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)}\, .$$

Caso b). Seja $0 < \lambda < 1$ e $\beta > 1$ tal que $1 - \frac{n}{\beta} = \lambda$. Então $\beta = n/(1-\lambda)$, $\beta = q$ e $\int_0^1 t^{-n/\beta}\, dt = 1/\lambda$. Fazendo $\beta = \frac{n}{1-\lambda}$ em (2.3.27) resulta então

$$\left|\varphi(x_0) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} \varphi(z)\, dz\right| \leq \frac{1}{\lambda}\, r^{\lambda} \sum_{i=1}^{n} ||D_i\varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

concluindo-se a demonstração. ■

Lema 2.3.3 *Sob as hipóteses do Lema 2.3.2, tem-se:*

$$\left|\varphi(x_0) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} \varphi(z)\, dz\right| \leq C\, r^{\lambda} ||\varphi||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de φ, r, x_0 e

a) $\lambda = \lambda_0$ *se* $\lambda_0 < 1$

b) $0 < \lambda < 1$ *se* $\lambda_0 = 1$

O Lema 2.3.3 é uma conseqüência direta do Lema 2.3.2 e do fato que $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ em ambos os casos a) e b). Para o primeiro caso note que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m-1}{n} > 0$ e para o segundo caso, que $(m-1)p = n$ e $q > p$. (Ver Observação 14).

Teorema 2.3.3 *Seja $k < m - \frac{n}{p} \leq k+1$, k um inteiro não negativo. Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

onde

a) $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$

b) $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$

Observação 15 *Quando se diz que se $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$, então $u \in C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ significa dizer que u, depois de uma eventual modificação num conjunto de medida nula de $\mathbb{R}^n$, transforma-se numa função pertencente a $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração do Teorema: Tem-se

$$0 < m - k - \frac{n}{p} = \lambda_0 \leq 1. \tag{2.3.28}$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$; e U_r um paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$ de lados paralelos aos eixos coordenados e cada lado de comprimento $r = 2||x-y||$ contendo x, y. Pelo Lema 2.3.3, para cada $|\alpha| \leq k$, obtém-se:

$$\begin{aligned} |D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)| &= \left| D^\alpha\varphi(x) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} D^\alpha\varphi(z)dz + \frac{1}{r^n}\int_{U_r} D^\alpha\varphi(z)dz - D^\alpha\varphi(y) \right| \leq \\ &\leq 2C(2||x-y||)^\lambda \, ||D^\alpha\varphi||_{W^{m-k,p}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

isto é,

$$|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)| \leq C_1||x-y||^\lambda \, ||\varphi||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq k \tag{2.3.29}$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante independente de φ, x, y e λ com

$$\lambda = \lambda_0 \quad \text{se} \quad \lambda_0 < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \lambda < 1 \quad \text{se} \quad \lambda_0 = 1, \tag{2.3.30}$$

λ_0 definido por (2.3.28).

Por outro lado, seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e U_r um paralelepípedo do $\mathbb{R}^n$, nas condições do Lema 2.3.2, de volume igual a um e que contém x. Então do Lema 2.3.3, com $|\alpha| \leq k$, resulta:

$$\begin{aligned} |D^\alpha \varphi(x)| &\leq \left| D^\alpha \varphi(x) - \int_{U_r} D^\alpha \varphi(z) dz \right| + \left| \int_{U_r} D^\alpha \varphi(z) dz \right| \leq \\ &\leq C ||D^\alpha \varphi||_{W^{m-k,p}(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{U_r} |D^\alpha \varphi(z)|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

isto é,

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq C_2 ||\varphi||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, |\alpha| \leq k \tag{2.3.31}$$

onde $C_2 > 0$ é uma constante independente de φ e x.

Seja $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ então pelo Teorema 2.2.1, existe uma sucessão (φ_ν) de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi_\nu \to u \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.3.32}$$

e

$$\varphi_\nu \to u \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n. \tag{2.3.33}$$

De (2.3.31) resulta

$$|D^\alpha \varphi_\nu(x) - D^\alpha \varphi_\mu(x)| \leq C_2 ||\varphi_\nu - \varphi_\mu||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, |\alpha| \leq k.$$

Desta expressão, da convergência (2.3.32) e da desigualdade (2.3.31) escrita com φ_ν vem que (φ_ν) é uma sucessão de Cauchy no espaço de Banach $C_b^k(\mathbb{R}^n)$, portanto existe $v \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi_\nu \to v \quad \text{em} \quad C_b^k(\mathbb{R}^n). \tag{2.3.34}$$

As convergências (2.3.33) e (2.3.34) permitem identificar u com v, mais precisamente, u depois de uma eventual modificação num conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^n$, transforma-se em v. Assim

$$\varphi_\nu \to u \quad \text{em} \quad C_b^k(\mathbb{R}^n). \tag{2.3.35}$$

Escrevendo (2.3.29) e (2.3.31) com φ_ν e tomando o limite em ambas as expressões, vem das convergências (2.3.32) e (2.3.35):

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C_1 ||x-y||^\lambda \, ||u||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq k$$

com λ nas condições (2.3.30), e

$$|D^\alpha u(x)| \leq C_2 ||u||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \, , \quad \forall \, x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \, |\alpha| \leq k.$$

Estas duas últimas desigualdades e a Observação 13 implicam o teorema. ■

O Teorema 2.3.3 e a Observação 13 acarretam:

Corolário 7 *Sob as hipóteses do Teorema 2.3.3, tem-se:*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n).$$

2.3.4 Caso $n = 1$

Neste caso obtém-se uma melhor regularidade para as funções de $W^{m,p}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.3.4 *Tem-se com* $m \geq 1$*:*

a) $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$ *com* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$ *se* $p > 1$

b) $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\mathbb{R})$ *se* $p = 1$

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\;y > x$ e j um inteiro não negativo. Então

$$|\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(y)| \leq \int_x^y |\varphi^{(j+1)}(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |\varphi^{(j+1)}(t)| \chi_{]x,y[}(t)\, dt \tag{2.3.36}$$

onde $\chi_{]x,y[}$ é a função característica do intervalo aberto $]x, y[$. Seja I um intervalo aberto da reta de comprimento r e $x \in I$. Tem-se:

$$\left| \varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r} \int_I \varphi^{(j)}(z)\, dz \right| \leq \frac{1}{r} \int_I |\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(z)|\, dz$$

donde, por (2.3.36),

$$\left| \varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r} \int_I \varphi^{(j)}(z)\, dz \right| \leq \frac{1}{r} \int_I \int_{\mathbb{R}} |\varphi^{(j+1)}(t)| \chi_{-}]x, z[\,(t)\, dtdz. \tag{2.3.37}$$

Caso a) De (2.3.36) segue

$$|\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(y)| \leq ||\varphi^{(j+1)}||_{L^p(\mathbb{R})}\, |x - y|^{1/p'} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

isto é,

$$|\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(y)| \leq ||\varphi||_{W^{m,p}(\mathbb{R})}\, |x - y|^{1 - \frac{1}{p}}, \qquad \forall\, j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.3.38}$$

De (2.3.37) resulta

$$\left| \varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r} \int_I \varphi^{(j)}(z) dz \right| \leq \frac{1}{r} \int_I ||\varphi^{(j+1)}||_{L^p(\mathbb{R})}\, |x - z|^{1/p'}\, dz$$

isto é,

$$\left| \varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r} \int_I \varphi^{(j)}(z) dz \right| \leq r^{1 - \frac{1}{p}}\, ||\varphi^{(j+1)}||_{L^p(\mathbb{R})}\, .$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ e I um intervalo aberto da reta de comprimento um e que contenha x. Da última desigualdade resulta

$$\begin{aligned} |\varphi^{(j)}(x)| \;&\leq \left| \varphi^{(j)}(x) - \int_I \varphi^{(j)}(z)\, dz \right| + \left| \int_I \varphi^{(j)}(z)\, dz \right| \leq \\ &\leq ||\varphi^{(j+1)}||_{L^p(\mathbb{R})} + ||\varphi^{(j)}||_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

isto é,

$$|\varphi^{(j)}(x)| \leq ||\varphi||_{W^{m,p}(\mathbb{R})}\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.3.39}$$

A seguir, de posse das estimativas (2.3.38) e (2.3.39), procede-se como na demonstração do Teorema 2.3.3.

Caso b) De (2.3.37) vem

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r}\int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| \leq ||\varphi^{(j+1)}||_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

Conseqüentemente considerando I de comprimento um e contendo x, resulta

$$\begin{aligned} |\varphi^{(j)}(x)| &\leq \left|\varphi^{(j)}(x) - \int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| + \left|\int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| \leq \\ &\leq ||\varphi^{(j+1)}||_{L^1(\mathbb{R})} + ||\varphi^{(j)}||_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

isto é,

$$|\varphi^{(j)}(x)| \leq ||\varphi||_{W^{m,1}(\mathbb{R})}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

A demonstração prossegue como no Caso a). ■

2.3.5 Caso $p = \infty$

Nesta seção mostra-se que $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente no espaço das funções Lipschitzianas e limitadas de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$, mais precisamente:

Teorema 2.3.5 *Tem-se, para $n \geq 1$ e $m \geq 1$:*

$$W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Mostra-se primeiro que se $u \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$ então $u \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ e vale a desigualdade

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C||x-y||\,||u||_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)}\,, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall\, |\alpha| \leq m-1 \tag{2.3.40}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de u. Mostra-se este resultado por indução com relação a $m \geq 1$. Seja então $m = 1$ e considere $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. De início analisa-se o caso $n \geq 2$. O caso $n = 1$ seguirá de forma análoga. Seja $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\theta(x) = 1 \quad \text{para} \quad ||x|| \leq 1, \qquad \theta(x) = 0 \quad \text{para} \quad ||x|| \geq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Considere $\theta_\nu(x) = \theta(x/\nu)$ para ν inteiro positivo. Então

$$\theta_\nu(x) = 1 \quad \text{para} \quad ||x|| \leq 1 \text{ e } \theta_\nu(x) = 0 \quad \text{para} \quad ||x|| \geq 2\nu.$$

Seja $p > n$ então $0 < 1 - \frac{n}{p} = \lambda_0 < 1$. Tem-se que $\theta_\nu u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, para todo ν, portanto, pelo Teorema 2.3.3, resulta que $\theta_\nu u \in C^{0,\lambda_0}(\mathbb{R}^n)$, para todo ν. Disto vem que u é contínua em $\mathbb{R}^n$. Observe-se também que é válida a desigualdade

$$\left| (\theta_\nu u)(x_0) - \frac{1}{r^n} \int_{U_r} (\theta_\nu u)(z)\, dz \right| \leq \frac{1}{\lambda_0}\, r^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} ||D_i(\theta_\nu u)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.3.41}$$

onde x_0 é um ponto qualquer do paralelepípedo U_r. Este resultado é obtido quando se considera a desigualdade do Lema 2.3.2 com φ_μ, (φ_μ) sucessão de funções testes em $\mathbb{R}^n$ com $\varphi_\mu \to \theta_\nu u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, e toma-se o limite nesta desigualdade.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, ν um inteiro não negativo tal que $||x|| \leq \nu$, $||y|| \leq \nu$, e $r = 2||x - y||$. Então por (2.3.41) resulta

$$|u(x) - u(y)| = |(\theta_\nu u)(x) - (\theta_\nu u)(y)| \leq \frac{2}{\lambda_0}\, (2||x-y||)^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} ||D_i(\theta_\nu u)||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

isto é,

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2^{1+\lambda_0}}{\lambda_0}\, ||x-y||^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} ||D_i(\theta_\nu u)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \left(\lambda_0 = 1 - \frac{n}{p}\right). \tag{2.3.42}$$

Tem-se:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_i(\theta_\nu u)|^p\, dx \leq \frac{2^p}{\nu^p} \int_{||x||<2\nu} |D_i \theta(x/\nu)|^p\, |u(x)|^p\, dx + 2^p \int_{||x||<2\nu} |\theta_\nu(x)|^p\, |D_i u(x)|^p\, dx$$

onde $B_{2\nu}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| < 2\nu\}$, que implica

$$\begin{aligned} ||D_i(\theta_\nu u)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq 2[\max_{x\in\mathbb{R}^n} |D_i\theta(x)|]||u||_{L^p(B_{2\nu}(0))} + 2||D_i u||_{L^p(B_{2\nu}(0))} \leq \\ &\leq C(\theta)||u||_{L^p(B_{2\nu}(0))} + 2||D_i u||_{L^p(B_{2\nu}(0))} \end{aligned}$$

Substituindo esta desigualdade em (2.3.42) resulta

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2^{1+\lambda_0}}{\lambda_0} \, ||x-y||^{\lambda_0} \Big[nC(\theta)||u||_{L^p(B_{2\nu}(0))} + 2\sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_{L^p(B_{2\nu}(0))} \Big]. \qquad (2.3.43)$$

Observe que se $v \in L^\infty(B_{2\nu}(0))$ então

$$\Big(\int_{B_{2\nu}(0)} |v|^p \, dx \Big)^{1/p} \leq ||v||_{L^\infty(B_{2\nu}(0))} \, (\text{vol } B_{2\nu}(0))^{1/p}$$

que implica

$$\limsup_{p\to\infty} ||v||_{L^p(B_{2\nu}(0))} \leq ||v||_{L^\infty(B_{2\nu}(0))} \, .$$

Tomando o limite superior em p na desigualdade (2.3.43) e levando em consideração esta última observação, obtém-se

$$|u(x) - u(y)| \leq 4||x-y|| \Big[nC(\theta)||u||_{L^\infty(B_{2\nu}(0))} + 2\sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_{L^\infty(B_{2\nu}(0))} \Big]$$

que implica

$$|u(x) - u(y)| \leq C||x-y|| \, ||u||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}$$

que mostra a desigualdade (2.3.40) para $m-1$.

Para o caso $n = 1$, tem-se a desigualdade

$$|u(x) - u(y)| \leq |(\theta_\nu u(x) - (\theta_\nu u)(y)| \leq |x-y|^{\lambda_0} \left\| \frac{d}{dx} \, (\theta_\nu u) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad \Big(\lambda_0 = 1 - \frac{1}{p} \Big)$$

a qual vem de (2.3.38). A demonstração de (2.3.40) prossegue então como no caso $n \geq 2$.

Suponha que a desigualdade (2.3.40) é válida para $m \geq 1$. Considere $m+1$ e $u \in W^{m+1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Seja $p > n$ então $m < (m+1) - \dfrac{n}{p} < m+1$. Pelo Teorema 2.3.3 e por análogo raciocínio ao feito acima vem que $u \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$. Seja $|\alpha| \leq m$. Considere um multi-índice β tal que $|\beta| = |\alpha| - 1$ e $D^\beta D_i u = D^\alpha u$. Como $D_i u \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $|\beta| \leq m - 1$ vem da hipótese de indução que

$$|D^\beta(D_i u)(x) - D^\beta(D_i u)(y)| \leq C||x - y|| \, ||D_i u||_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)}$$

isto é,

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C||x - y|| \, ||u||_{W^{m+1,\infty}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

que mostra (2.3.40) para $m + 1$.

Da desigualdade (2.3.40) e notando que $||u||_{C_b^{m-1}(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)}$ segue o teorema. ■

2.4 Prolongamento

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Neste parágrafo estuda-se o prolongamento ao $\mathbb{R}^n$ das funções u definidas em Ω, tudo no contexto dos espaços de Sobolev, mais precisamente, determina-se um operador linear e contínuo

$$P \colon W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \quad \text{tal que} \quad Pu|_\Omega = u \text{ em } \Omega.$$

Na Seção 2.4.1 analiza-se o prolongamento para o caso em que Ω é o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$ e na Seção 2.4.2, para o caso Ω aberto-limitado de classe C^m.

Por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ representa-se a restrição a $\overline{\Omega}$ das funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e por $C_0^m(\overline{\Omega})$ a restrição a $\overline{\Omega}$ das funções de $C^m(\mathbb{R}^n)$ que possuem suporte compacto.

2.4.1 Caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

Denota-se por $\mathbb{R}^n_+$ ao semi espaço

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}.$$

Faz-se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Representa-se um vetor x do $\mathbb{R}^n$ como sendo $x = (x', x_n)$, A seguir dar-se-á um resultado de densidade que é central no desenvolver das idéias deste parágrafo.

Proposição 2.4.1 *$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, sendo $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: **Primeira Etapa** - Aproximação por funções com suporte limitado.
Seja θ uma função teste no $\mathbb{R}^n$ tal que $\theta(x) = 1$ se $||x|| \leq 1$, $\theta(x) = 0$ para $||x|| \geq 2$ e $0 \leq \theta \leq 1$. Para todo $k = 1, 2, \ldots$ considere-se $\theta_k(x) = \theta(x/k)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dada uma função u em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, seja

$$u_k(x) = \theta_k(x)u(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \,.$$

Repetindo o mesmo argumento usado no Teorema 2.2.1 da Seção 2.2.2, conclui-se que a sucessão (u_k) converge para u no espaço $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Além disso,

$$\text{supp } (u_k) \subset \text{supp } (\theta_k|_{\mathbb{R}^n_+}) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0, ||x|| \leq 2k\}$$

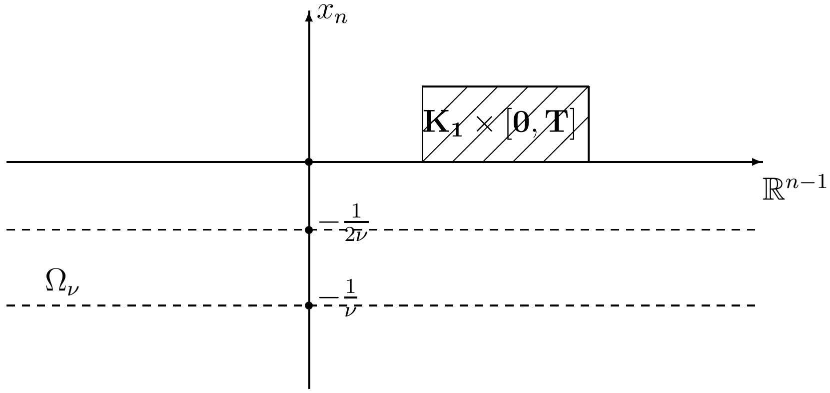
isto é, supp (u_k) é um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n_+$, para todo k.
Segunda Etapa - Aproximação por funções de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
Seja $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ tal que supp (u) seja um limitado de $\mathbb{R}^n_+$. Mostrar-se-á que existe uma sucessão (ω_ν) de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega_\nu|_{\mathbb{R}^n_+} \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Sejam K_1 um compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$ e $T > 0$ tais que supp $(u) \subset K_1 \times [0, T]$. Para todo $\nu = 1, 2, \ldots$ sejam:

$$\Omega_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > -1/\nu\} = \mathbb{R}^{n-1} \times] - 1/\nu, \infty[$$

$\rho_\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho_\nu = 1$ em $K_1 \times [0, T]$ e supp $(\rho_\nu) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [-\dfrac{1}{2\nu}, \infty[$

$$\begin{aligned} u_\nu(x) &= u\Big(x', x_n + \frac{1}{\nu}\Big) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega_\nu \\ v_\nu(x) &= \rho_\nu(x)u_\nu(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega_\nu \\ \omega_\nu(x) &= \tilde{v}_\nu(x). \end{aligned}$$

Graficamente teria-se



Tem-se as seguintes propriedades:

a) $D^\alpha u_\nu(x', x_n) = (D^\alpha u)(x', x_n + \dfrac{1}{\nu})$ para quase todo $(x', x_n) \in \Omega_\nu$ e para todo $|\alpha| \leq m$.

De fato, se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\nu)$ seja $\psi(x) = \varphi(x', x_n - \dfrac{1}{\nu})$ para $x \in \mathbb{R}^n_+$, então ψ é uma função teste em $\mathbb{R}^n_+$ e

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha u_\nu, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_\nu} u(x', x_n + \frac{1}{\nu})(D^\alpha \varphi)(x', x_n) dx' dx_n = \\
&= (\text{fazendo } y_n = x_n + \frac{1}{\nu})(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x) D^\alpha \psi(x)\, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} D^\alpha u(x) \psi(x)\, dx = \int_{\Omega_\nu} (D^\alpha u)(x', x_n + \frac{1}{\nu}) \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

b) $u_\nu|_{\mathbb{R}^n_+} \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Observe que se $k_\nu = (0, 0, \ldots, 0, -\dfrac{1}{\nu})$ então $(\tau_{k_\nu} \tilde{u})(x', x_n) = \tilde{u}(x', x_n + \dfrac{1}{\nu}) = \tilde{u}_\nu(x', x_n)$, isto é, $\tau_{k_\nu} \tilde{u} = \tilde{u}_\nu$. Tem-se:

$$||u_\nu - u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||\tau_{k_\nu} \tilde{u} - \tilde{u}||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

e sendo a translação contínua, resulta:

$$\lim_{\nu \to \infty} ||u_\nu - u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = 0.$$

De forma análoga, levando em consideração a parte a), obtém-se

$$(\tau_{k_\nu} \widetilde{D^\alpha u})(x', x_n) = \widetilde{D^\alpha u}(x', x_n + \frac{1}{\nu}) = \widetilde{D^\alpha u_\nu}(x', x_n)$$

isto é, $\tau_{k_\nu} \widetilde{D^\alpha u} = \widetilde{D^\alpha u_\nu}$, para todo $|\alpha| \leq m$. Por um raciocínio análogo ao feito acima segue então que

$$||D^\alpha u_\nu - D^\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad \forall\, |\alpha| \leq m$$

o que mostra a parte b).

c) $\omega_\nu \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\omega_\nu|\_\mathbb{R}^n_+ \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, sendo supp $(u_\nu) \subset K_1 \times]-\frac{1}{\nu}, T - \frac{1}{\nu}[$ e supp $(\rho_\nu) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq -\frac{1}{2\nu}\}$ tem-se supp $(v_\nu) \subset K_1 \times [-\frac{1}{2\nu}, T - \frac{1}{\nu}]$ o que demonstra que supp (v_ν) é um compacto de Ω_ν. Além disso, da parte a) decorre que $v_\nu \in W^{m,p}(\Omega_\nu)$, que implica $\omega_\nu = \tilde{v}_\nu \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Sendo $\omega_\nu|_{\mathbb{R}^n_+} = v_\nu|_{\mathbb{R}^n_+} = u_\nu|_{\mathbb{R}^n_+}$, por ser $\rho_\nu = 1$ em $K_1 \times [0, T]$, tem-se que $\omega_\nu|_{\mathbb{R}^n_+} \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Sejam $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ e $\varepsilon > 0$. Da primeira etapa resulta a existência de u_1 em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ tal que $||u - u_1||_{m,p} < \frac{\varepsilon}{3}$ e u_1 é de suporte limitado. Da segunda etapa, obtém-se a existência de $u_2 \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $||(u_2|_{\mathbb{R}^n_+}) - u_1||_{m,p} < \varepsilon/3$. Sendo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, existe φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $||\varphi - u_2||_{m,p} < \varepsilon/3$. Considerando $\psi = \varphi|_{\mathbb{R}^n_+}$ em $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ e da desigualdade do triângulo decorre que $||u - \psi||_{m,p} < \varepsilon$, o que demonstra ser $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. ■

Teorema 2.4.1 *Seja $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador de prolongamento*

$$P\colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

linear tal que

$$||Pu||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

onde C é uma constante que depende apenas de m, e

$$Pu|_{\mathbb{R}^n_+} = u \quad \textit{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n_+\,, \quad \forall\, u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Demonstração: Na demonstração do teorema será empregado o resultado que segue enunciado sob forma de lema.

Lema 2.4.1 *Seja u contínua em $\mathbb{R}^n$ tal que a derivada clássica $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ existe em $\mathbb{R}^n_+$ e $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n < 0\}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_n} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\frac{\partial}{\partial x_n} T_u = T_{\frac{\partial u}{\partial x_n}} \quad \textit{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

A demonstração do lema segue por integração por partes.

Seja $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ e

$$(Pv)(x) = \begin{cases} v(x) \quad \text{se} \quad x_n > 0 \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu v(x', -\nu x_n) \quad \text{se} \quad x_n < 0 \end{cases}$$

Dado $\alpha = (\alpha', k)$ em $\mathbb{N}^n$, com α' em $\mathbb{N}^{n-1}$ e k em $\mathbb{N}$, obtém-se:

$$D^\alpha(Pv) = P(D^\alpha v) \quad \text{quando} \quad k = 0.$$

Fazendo $D_n = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, vem:

$$D_n^k(Pv)(x) = \begin{cases} (D_n^k v)(x), \qquad x_n > 0 \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} (-\nu)^k\, c_\nu (D_n^k v)(x', -\nu x_n), \quad x_n < 0. \end{cases}$$

Escolhendo os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ tais que $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{m}(-\nu)^k\, c_\nu = 1$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, as funções $D_n^k(Pv)$ satisfazem as condições do Lema 2.4.1, logo $D_n^k(Pv) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $k = 1, 2, \ldots, m$, pois $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Observe que os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ são as soluções do sistema de equações $AC = \mathbf{1}$ onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ (-1) & (-2) & (-3) & \ldots & (-m) \\ (-1)^2 & (-2)^2 & (-3)^2 & \ldots & (-m)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{m-1} & (-2)^{m-1} & (-3)^{m-1} & \ldots & (-m)^{m-1} \end{bmatrix}$$

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^\tau$ e $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\tau$ (τ = transposta). Este sistema possui solução única C pois $\det A$ é um determinante de Vandermonde. Como é conhecido o determinante de Vandermonde

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_m \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & \ldots & y_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{m-1} & y_2^{m-1} & y_3^{m-1} & \ldots & y_m^{m-1} \end{vmatrix}, \quad y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R},$$

é igual a $\displaystyle\prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}} (y_j - y_i)$.

No caso geral $\alpha = (\alpha', k)$ com $k + |\alpha'| \le m$, obtém-se

$$D^\alpha Pv = D_n^k(P(D^{\alpha'} v)) \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

já que $D^{\alpha'} v$ é um elemento de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Resulta então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha (Pv)(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D_n^k(P(D^{\alpha'} v))(x)|^p \, dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha v(x)|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n_-} \left| \sum_{\nu=1}^{m} (-\nu)^k\, c_\nu\, D_n^k\, D^{\alpha'} v(x', -\nu x_n) \right|^p dx' dx_n \,.$$

Notando que $\Big(\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu\Big)^p \le \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu^p\,, \quad a_\nu \ge 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_-} \left| \sum_{\nu=1}^{m} (-\nu)^k \, c_\nu \, D_n^k \, D^{\alpha'} v(x', -\nu x_n) \right|^p \, dx' dx \, \le \\
&\le m^{p-1} \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{mp} \, |c_\nu|^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} |D^\alpha v(x', -\nu x_n)|^p \, dx' dx_n \, \le \\
&\le m^{p-1} \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{mp-1} \, |c_\nu|^p \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha v(x)|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Combinando os dois últimos cálculos resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha (Pv)(x)|^p \, dx \le \Big(1 + m^{p-1} \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{mp-1} \, |c_\nu|^p\Big) \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha v(x)|^p \, dx$$

que acarreta

$$\sum_{|\alpha| \le m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha (Pv)(x)|^p \, dx \le \Big(1 + m^{p} \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{mp} \, |c_\nu|^p\Big) \sum_{|\alpha| \le m} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha v(x)|^p \, dx.$$

Portanto

$$||Pv||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \le \Big(1 + m \sum_{\nu=1}^{m} \nu^m |c_\nu|\Big) ||v||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} \,, \quad \forall \, v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}).$$

Da Proposição 2.4.1 decorre então que P estende-se a uma aplicação linear contínua

$$P \colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \mapsto W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

com P verificando

$$||Pu||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \le C ||u||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

com $C = 1 + m \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m} \nu^m |c_\nu|$. Resta apenas mostrar que P é um prolongamento.

Seja u em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ e seja (φ_ν) uma sucessão de funções de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tal que $\varphi_\nu \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, então $P\varphi_\nu \to Pu$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, logo

$$(P\varphi_\nu)|_{\mathbb{R}^n_+} \to (Pu)|_{\mathbb{R}^n_+} \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Da definição de P resulta que $P\varphi_\nu|_{\mathbb{R}^n_+} = \varphi_\nu$, portanto $Pu|_{\mathbb{R}^n_+} = u$, o que demonstra o teorema. ■

Observação 16 *Sejam* $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *e* K_1 *compacto de* $\mathbb{R}^{n-1}$, $T > 0$ *tal que* $\sup(v|_{\mathbb{R}^n_+}) \subset K_1 \times [0,T]$. *Note que* $Pv(x', x_n) = 0$ *se* $x_n < 0$ *e* $(x', -x_n) \in K_1 \times [0,T]$. *Resulta disto que supp* Pv *está contido em* $K_1 \times [-T, T]$.

2.4.2 Caso Ω Aberto Limitado

Inicialmente fixa-se algumas notações. Sejam Q o retângulo aberto

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n; 0 < y_i < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ -1 < y_n < 1\},$$

Q^+ e Q^- os quadrados abertos

$$Q^+ = Q \cap \{y_n > 0\}, \qquad Q^- = Q \cap \{y_1 < 0\},$$

e Σ o segmento aberto $Q \cap \{y_n = 0\}$.

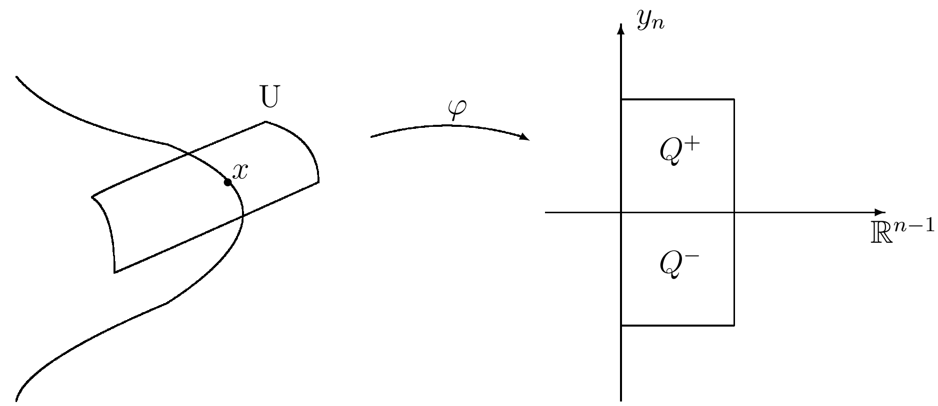
Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Diz-se que Ω *é de classe* C^m $(m = 1, 2, \ldots)$ se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^m de dimensão $n-1$ e Ω estando localmente de um mesmo lado de Γ. Se Ω é de classe C^m então existe um sistema de cartas locais (U_j, φ_j), $j = 1, 2, \ldots$ definindo Γ tal que

U_j é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e os U_j cobrem Γ
$\varphi_j : U_j \mapsto Q$ é uma bijeção de classe C^m
$\varphi_j^{-1} : Q \mapsto U_j$ é de classe C^m
$\varphi_j(U_j \cap \Omega) = Q^+, \quad \varphi_j(U_j \cap \Gamma) = \Sigma$

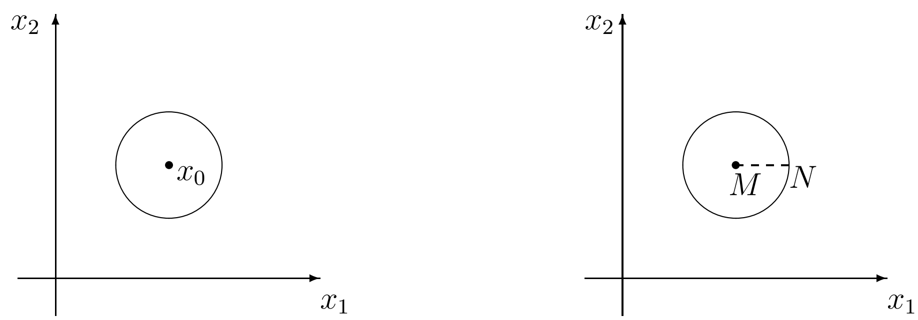
Decorre da última expressão que $\varphi_j(U_j \cap \mathcal{C}\overline{\Omega}) = Q^-$. Evidentemente as condições de compatibilidade são satisfeitas, isto é, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então existe um homeomorfismo J_{ij} de classe C^m com jacobiano positivo de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sobre $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ tal que

$$\varphi_j(x) = J_{ij}(\varphi_i(x)), \quad \text{para todo} \quad x \in U_i \cap U_j\,.$$

Graficamente teria-se



Não são de classe C^1 os seguintes abertos



No primeiro exemplo Ω é o disco aberto menos o centro x_0 e no segundo, Ω é o disco aberto menos o raio MN. Claramente $\mathbb{R}^n_+$ é um aberto de classe C^m para todo $m \geq 1$.

Se Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^m podemos escolher um sistema de cartas locais finito

$$(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_N, \varphi_N)$$

definindo Γ que satisfazem as condições acima.

O aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é denominado *bem regular* se Ω é de classe C^m para todo $m = 1, 2, \ldots$

A seguir fixa-se Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m, e denota-se por Γ sua fronteira. Mostrar-se-á que existe um operador de prolongamento $P\colon W^{m,p}(\Omega) \mapsto W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Este resultado é obtido observando-se, por meio de cartas locais, que localmente as funções definidas em Ω, perto da fronteira Γ comportam-se como se estivessem definidas em Q^+. Existindo um operador de prolongamento $P\colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \mapsto W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, o prolongamento a $\mathbb{R}^n_+$ das funções definidas em Q^+ dará o resultado.

Antes de enunciar o teorema central desta seção, introduz-se certas notações e demonstra-se alguns resultados prévios. Com efeito, primeiro constrói-se um sistema finito $\{(U_j, \varphi_j)\}_{1\leq j\leq N}$ de cartas locais para Γ. Considerar que o sistema seja finito é possível pois Γ é compacto em $\mathbb{R}^n$. De posse destas cartas locais, determina-se, aplicando-se o Teorema da Partição C^∞ da Unidade à cobertura $\{U_j\} \cup \Omega$ do aberto $\left(\bigcup_{j=1}^{N} U_j\right) \cup \Omega$, uma coleção de funções $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N$ tais que

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \\ \text{supp } (\sigma_0) \subset \Omega, \quad \text{supp } \sigma_j \subset U_j \\ 0 \leq \sigma_j \leq 1 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \sigma_j(x) = 1, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \end{array}\right.$$

Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$ então $u = u\sigma_0 + \sum_{j=1}^{N} u\sigma_j$. Observe que $w_0 = u\sigma_0$ tem o prolongamento natural a $\mathbb{R}^n$ por zero fora de Ω. A dificuldade está com os $w_j = u\sigma_j$. Seja $U_j^+ = U_j \cap \Omega$ e

$$v_j(y) = w_j(\varphi_j^{-1}(y)), \qquad y \in Q^+.$$

Claramente, $w_j \in W^{m,p}(U_j^+)$. Tem-se o seguinte resultado:

Lema 2.4.2 *Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e v_j, w_j definidos como acima, então $v_j \in W^{m,p}(Q^+)$ e existe uma constante $C_0 = C_0\ (\sigma_j, \varphi_j, m, n) > 0$ independente de u e p tal que*

$$||v_j||_{W^{m,p}(Q^+)} \leq C_0 ||w_j||_{W^{m,p}(U_j^+)}.$$

Demonstração: Para facilitar a escrita não escrever-se-á o índice j. Seja $y = \varphi(x)$ e

$$\psi(y) = \varphi^{-1}(y) = (\beta_1(y), \beta_2(y), \ldots, \beta_n(y)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Note que $v(\varphi(x)) = w(x)$ e $|\det(J\varphi(x))| = A(x) > 0$, para todo $x \in U$. Tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{Q^+} |v(y)|^p\, dy &= \int_{U^+} |v(\varphi(x))|^p\, A(x)dx = \int_{\text{supp } w} |w(x)|^p\, A(x)dx \le \\ &\le (\max_{x\in \text{ supp } \sigma} A(x)) \int_{U^+} |w(x)|^p\, dx.\end{aligned}$$

Também

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}(y) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial w}{\partial x_k}(\psi(y))\, \frac{\partial \beta_k}{\partial y_i}(y),$$

$$\int_{Q^+} \left|\frac{\partial v}{\partial y_i}(y)\right|^p dy \le n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{U^+} \left|\frac{\partial w_k}{\partial x_k}(x)\right|^p \left|\frac{\partial \beta_k}{\partial y_i}(\varphi(x))\right|^p A(x)dx \le$$

$$\le n^{p-1}\Big(\max_{1\le k\le n}\max_{x\in\text{supp } \sigma} \left|\frac{\partial \beta_k}{\partial y_i}(\varphi(x))\right|^p\Big)(\max_{x\in\text{supp } \sigma} A(x)) \sum_{k=1}^{m} \int_{U^+} \left|\frac{\partial w}{\partial x_k}\right|^p dx.$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_\ell}(y) &= \sum_k \Big(\sum_r \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_r}(\psi(y)) \frac{\partial \beta_r}{\partial y_\ell}(y)\Big) \frac{\partial \beta_k}{\partial y_i}(y) + \\ &+ \sum_k \frac{\partial w}{\partial x_k}(y)\, \frac{\partial^2 \beta_k}{\partial y_i \partial y_\ell}(y)\end{aligned}$$

e por um procedimento análogo ao anterior, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{Q^+} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_\ell}(y)\right|^p dy &\le n^{2(p-1)}\, C_{i,\ell}(\sigma_j, \varphi_j) \sum_{k,r} \left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_r}\right\|^p_{L^p(U^+)} + \\ &+ n^{2(p-1)}\, C_{i,\ell}(\sigma_j, \varphi_j) \sum_k \left\|\frac{\partial w}{\partial x_k}\right\|^p_{L^p(U^+)}.\end{aligned}$$

Repetindo os mesmos argumentos obtém-se desigualdades do mesmo tipo para as outras derivadas parciais de v. Assim o lema está demonstrado. ■

Seja W o espaço das funções $g \in W^{m,p}(Q^+)$ tais que todas elas se anulam numa vizinhança fixa $\mathcal{O}$ de $\partial Q^+ \backslash \Sigma$. Define-se $h(x) = g(\varphi_j(x))$ então tem-se o seguinte resultado:

Lema 2.4.3 *Nas condições acima, $h \in W^{m,p}(U_j^+)$ e existe uma constante $C_1 = C_1(\mathcal{O}, \varphi_j, m, n)$, independente de $g \in W$ e p, tal que*

$$||h||_{W^{m,p}(U_j^+)} \le C_1 ||g||_{W^{m,p}(Q^+)}\,.$$

Demonstração: Seja $x = \psi(y)$ então $|\det(J\psi(y))| = B(y) > 0$, para todo $y \in Q$. Tem-se:

$$\int_{U_j^+} |h(x)|^p \, dx = \int_{\text{supp } g} |g(y)| B(y) \, dy \leq (\sup_{y \in Q^+ \setminus \mathcal{O}} B(y)) \int_{Q^+} |g(y)|^p \, dy.$$

Procedendo como no Lema 2.4.2, obtém-se os resultados desejados. ■

Se em lugar de Q^+, considera-se Q e fixa-se uma vizinhança $\mathcal{O}$ de ∂Q, obtém-se, de forma análoga ao Lema 2.4.3, o seguinte resultado:

Lema 2.4.4 *Nas condições acima, $h \in W^{m,p}(U_j)$ e existe uma constante $C_2 = C_2\,(\mathcal{O}, \varphi_j, m, n) > 0$, independente de $g \in W$ e p, tal que*

$$||h||_{W^{m,p}(U_j)} \leq C_2 ||g||_{W^{m,p}(Q)}\,.$$

Aplicando os três últimos lemas, obtém-se para Ω resultados análogos aos obtidos para $\mathbb{R}^n_+$. Com efeito:

Proposição 2.4.2 *Seja Ω limitado de $\mathbb{R}^n$ e de classe C^m então $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ sendo $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$ então por cartas locais $u = u\sigma_0 + \sum_{j=1}^{N} u\sigma_j$. Seja $w_j = u\sigma_j\,, \ \ j = 0, 1, \ldots, N$. Note que $w_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Com $w_j \in W^{m,p}(U_j^+)$ constrói-se $v_j \in W^{m,p}(Q^+)$. Observe que v_j anula-se numa vizinhança de $\partial Q^+ \setminus \Sigma$, então pode-se considerar v_j como pertencendo a $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Pela seção anterior existe uma sucessão (γ_ν) de funções de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tal que

$$\gamma_\nu \to v_j \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Seja $\rho \in \mathcal{D}(Q)$ tal que $\rho = 1$ no suporte de v_j então

$$\rho\gamma_\nu \to \rho v_j = v_j \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Observe que cada $\rho\gamma_\nu$ se anula numa vizinhança fixa de ∂Q. Seja $\sigma_\nu(x) = \rho\gamma_\nu(\varphi(x))$ então os σ_ν restritos a $\overline{\Omega}$ formam uma sucessão de $C_0^m(\overline{\Omega})$, e pelo Lema 2.4.4, segue que

$$\sigma_\nu \to w_j \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\Omega).$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $\xi_j \in C_0^m(\overline{\Omega})$ tal que $||\xi_j - w_j||\_W^{m,p}(\Omega) < \frac{\varepsilon}{N}$, $\quad j = 0, 1, \ldots, N$ então

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{N} \xi_j \right\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{N} ||w_j - \xi_j||_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

que mostra a densidade de $C_0^m(\overline{\Omega})$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Regularizando as funções de $C_0^m(\overline{\Omega})$ (ver Teorema 2.2.1) segue que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. $\blacksquare$

Teorema 2.4.2 *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m, e $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador de prolongamento*

$$P\colon W^{m,p}(\Omega) \mapsto W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \ \textit{linear}$$

tal que

$$||Pu||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c||u||_{W^{m,p}(\Omega)}$$

onde c é uma constante independente de $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e p, e

$$Pu|_\Omega = u \quad \textit{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ então por cartas locais $u = u\sigma_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} u\sigma_j$. Com $w_j = u\sigma_j$ constrói-se v_j que se anula numa vizinhança de $\partial Q^+ \backslash \Sigma$. Tem-se que $v_j \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ e pelo Teorema 2.4.1, da seção anterior, $Pv_j \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Pela própria construção de P (ver Observação 16), note-se que Pv_j tem suporte compacto em Q. Com Pv_j constrói-se $h_j \in W^{m,p}(U_j)$ que se anula numa vizinhança de ∂U_j e h_j restrito a $\overline{U_j^+}$ é igual a w_j.

Denotando-se com $\tilde{h}_j$ o prolongamento de h_j ao $\mathbb{R}^n$ por zero fora de U_j , tem-se, então, dos três últimos lemas e do Teorema 2.4.1, que

$$
\begin{aligned}
&||\tilde{h}_j||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = ||h_j||_{W^{m,p}(U_i)} \leq C_1||Pv_j||_{W^{m,p}(Q)} \leq \\
&\leq C_2||v_j||_{W^{m,p}(Q+)} \leq C_3||w_j||_{W^{m,p}(U_i^+)} = C_3||w_j||_{W^{m,p}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

onde as diferentes constantes C_i são independentes de u e p. Seja $P_j w_j = \tilde{h}_j$ então P_j é linear e contínuo. Define-se o operador de prolongamento P como sendo

$$
Pu = \tilde{w}_0 + \sum_{j=1}^{N} P_j w_j \, .
$$

Tem-se:

$$
||Pu||_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq ||w_0||_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} C||w_j||_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{m,p}(\Omega)}
$$

sendo a constante C é independente de u e p. O teorema segue pelo resultado de densidade da Proposição 2.4.2. ■

Sejam $S_{n-1} = \{\sigma \in \mathbb{R}^n; ||\sigma|| = 1\}$ e $\sigma_0 \in S_{n-1}$, $\quad \alpha > 0$. Denota-se por $C(\sigma_0, \alpha)$ ao cone

$$
C(\sigma_0, \alpha) = \{t\sigma; 0 < t < \infty \text{ e } ||\sigma - \sigma_0|| < \alpha, \ \sigma \in S_{n-1}\}.
$$

Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Diz-se que Ω possui a *propriedade do cone* se existe uma cobertura $(U_i)_{1\leq i\leq N}$ da fronteira Γ de Ω verificando:

para cada U_i existe um cone $C(\sigma_{0i}, \alpha_i)$ tal que para todo
$x \in U_i \cap \Omega, \ x + C(\sigma_{0i}, \alpha_i)$ não intersepta $U_i \cap \Gamma$.

Mostra-se (ver [8] e [17]) que os abertos limitados Ω do $\mathbb{R}^n$ com a propriedade do cone possuem a propriedade do (m, p)-prolongamento para todo $m \geq 1$ e $1 < p < \infty$. Este é um resultado devido a A.P. Calderon e baseado em propriedades de integrais singulares de Calderon-Zygmund. Observe que os paralelepípedos abertos do $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do cone. A desvantagem do operador de prolongamento de Calderon é de que este é construído especialmente para $W^{m,p}(\Omega)$ e não serve para prolongar simultaneamente os espaços $W^{k,p}(\Omega)$

com $0 < k < m$, como é o caso do operador P estudado anteriormente. Esta propriedade de P é importante na obtenção de desigualdades de intepolação para os espaços $W^{m,p}(\Omega)$.

2.5 Imersões dos Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Os teoremas de imersão de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e o operador de prolongamento $P\colon W^{m,p}(\Omega) \mapsto W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ introduzido no Parágrafo 2.4, permitem obter resultados de imersão para os espaços $W^{m,p}(\Omega)$.

Neste parágrafo estudar-se-á as imersões contínuas e as imersões compactas do espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com Ω limitado do $\mathbb{R}^n$.

2.5.1 Imersões Contínuas

Denota-se por $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ ao espaço de Banach das restrições a $\overline{\Omega}$ das funções pertencentes a $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (ver Parágrafo 2.3), equipado com a norma induzida, isto é,

$$||u||_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha|\le k} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{||x-y||^\lambda}.$$

Teorema 2.5.1 *Sejam Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, Ω de classe C^m e $1 \le p < \infty$, então*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \le q \le \dfrac{np}{n-mp} = p^*$ *se* $mp < n$

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \le q < \infty$ *e* $mp = n$

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ *se* $mp > n$.

No caso c), k é um inteiro verificando $k < m - \dfrac{n}{p} \le k+1$ e λ um real satisfazendo $0 < \lambda \le m - k - \dfrac{n}{p} = \lambda_0$ se $\lambda_0 < 1$ e $0 < \lambda < 1$ se $\lambda_0 = 1$.

Demonstração: a) O Corolário 5 diz que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \overset{I}{\mapsto} L^q(\mathbb{R}^n)$ é contínua para $p \leq q \leq p^*$. Tem-se a seguinte cadeia de aplicações lineares contínuas:

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{P}{\mapsto} W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \overset{I}{\mapsto} L^q(\mathbb{R}^n) \overset{r_\Omega}{\mapsto} L^q(\Omega)$$

que mostra a) para $p \leq q \leq p^*$. O caso $1 \leq q \leq p$ é obtido pelo fato de ter-se $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pois Ω é limitado.

Os casos b) e c) são obtidos aplicando o raciocínio acima, o Teorema 2.3.2 e o Teorema 2.3.3, respectivamente. ■

Teorema 2.5.2 *Seja I um intervalo aberto finito da reta e $1 \leq p < \infty$. Então*

a) $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$ *com* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$ *se* $p > 1$

b) $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{I})$ *se* $p = 1$.

Este resultado é obtido aplicando o Teorema 2.3.4 e a demonstração do Teorema 2.5.1.

Teorema 2.5.3 *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, Ω de classe C^m. Então*

$$W^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Faz-se a demonstração por indução com relação a m. Seja então $m = 1$. Por ser Ω limitado $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. O Teorema 2.4.2 diz que

$$||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2.5.44}$$

onde C é uma constante independente de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$. Considere $p > n$. Então pelo Teorema 2.5.1, parte c), vem que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, isto é, as funções u de $W^{1,\infty}(\Omega)$ são funções contínuas em $\overline{\Omega}$. Aplicando os mesmos argumentos usados para obter (2.3.42), na demonstração do Teorema 2.3.5, resulta para $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$,

$$|u(x) - u(y)| = |(Pu)(x) - (Pu)(y)| \leq \frac{2^{1+\lambda_0}}{\lambda_0} ||x - y||^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} ||D_i(Pu)||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

onde $\lambda_0 = 1 - \dfrac{n}{p}\cdot$ (Para o caso $n = 1$, obtém-se desigualdade semelhante, ver demonstração do Teorema 2.3.4). Isto implica

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2^{1+\lambda_0}}{\lambda_0}\, ||x-y||^{\lambda_0}\, n||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Tomando o limite superior quando $p \to \infty$, resulta então

$$|u(x) - u(y)| \leq 4||x-y||n \limsup_{p\to\infty} ||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.5.45}$$

Observando que $\limsup\limits_{p\to\infty} ||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq ||u||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, vem então de (2.5.44) e (2.5.45)

$$|u(x) - u(y)| \leq 4n\, C||x-y||\, ||u||_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \forall\, x, y \in \overline{\Omega}$$

que mostra o teorema para $m = 1$.

Suponha o teorema válido para $m \geq 1$. Considere $m+1$. Seja $p > n$ então $m < (m+1) - \dfrac{n}{p} < m+1$. Isto implica pelo Teorema 2.5.1, parte c), que $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$. Seja $|\alpha| \leq m$. Considere um multi-índice β tal que $|\beta| = |\alpha| - 1$ e $D^\beta D_i u = D^\alpha u$. Como $D_i u \in W^{m,\infty}(\Omega)$ vem da hipótese de inducão que

$$|D^\beta(D_i u)(x) - D^\beta(D_i u)(y)| \leq C||x-y||\, ||D_i u||_{W^{m,\infty}(\Omega)}$$

para $x, y \in \overline{\Omega}$, portanto

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C||x-y||\, ||u||_{W^{m+1,\infty}(\Omega)}$$

para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ e todo $|\alpha| \leq m$. Assim o teorema está provado. ■

Corolário 8 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ sem condições de regularidade na fronteira. Então*

$$W_0^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{\Omega}).$$

Este resultado é obtido aplicando o raciocínio usado na demonstração do Teorema 2.5.3 com $Pu = \tilde{u}$ onde $\tilde{u}$ é a extensão de u ao $\mathbb{R}^n$ por zero fora de Ω.

2.5.2 Imersões Compactas

O resultado central desta seção é o Teorema de Rellich-Kondrachov. Para demonstrá-lo, primeiro prova-se o seguinte resultado:

Lema 2.5.1 *Se* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *então*

$$||\tau_h u - u||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq ||h|| \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

onde $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$.

Demonstração: Mostra-se o resultado, inicialmente, para funções $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Tem-se:

$$\varphi(x-h) - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\, \varphi(x-th)\, dt = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, (x-th)(-h_i) \Big) dt$$

que implica

$$|(\tau_h \varphi)(x) - \varphi(x)| \leq ||h|| \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, (x-th) \right| dt$$

e isto acarreta,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h\, \varphi(x) - \varphi(x)|\, dx \ &= ||h|| \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, (x-th) \right| dxdt \ = \\ &= ||h|| \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, (x) \right| dx \end{aligned}$$

isto é,

$$||\tau_h \varphi - \varphi||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq ||h|| \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{2.5.46}$$

Seja $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, então existe uma sucessão (φ_ν) de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_\nu \to u \quad \text{em} \quad W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi_\nu \to u \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n \\ |\varphi_\nu(x)| \leq g(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n, \ \ g \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{array} \right.$$

Escrevendo (2.5.46) com φ_ν, tomando o limite a ambos os membros desta desigualdade e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue no primeiro membro, obtém-se o lema. ■

Observação 17 *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe K compacto de Ω tal que mes $(\Omega \backslash K) < \varepsilon$ (ver Observação 1 do Capítulo 1).*

Com efeito, seja K_ν o compacto de Ω definido por $K_\nu = \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \Gamma) \geq \frac{1}{\nu}\}$. Tem-se:

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots, \bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = \Omega.$$

Portanto,

$$\chi_{K_\nu} \leq \chi_\Omega \quad \text{e} \quad \lim \chi_{K_\nu}(x) = \chi_\Omega(x), \qquad \forall\, x \in \Omega$$

onde $\chi_{\mathcal{O}}$ é a função característica do conjunto $\mathcal{O}$. Resulta, então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim(\text{mes } K_\nu) = \lim \int_\Omega \chi_{K_\nu}(x)\, dx = \int_\Omega \chi_\Omega(x)\, dx = \text{ mes } \Omega$$

que mostra a observação.

Teorema 2.5.4 (Rellich-Kondrachov) *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p} = p^*$ *se* $p < n$

b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < \infty$ *se* $p = n$

c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *se* $p > n$

Demonstração: Estudar-se-á primeiro o caso a). O Teorema de Frechet-Kolmogorov (ver K. Yosida [16]) diz que o subconjunto $\mathcal{F}$ de $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, é relativamente compacto em $L^q(\Omega)$ se

i) $\mathcal{F}$ é limitado.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto K de Ω tal que

$$\int_{\Omega \backslash K} |u|^q\, dx < \varepsilon, \qquad \forall\, u \in \mathcal{F}.$$

iii) Para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $\eta > 0$ tal que se $h \in \mathbb{R}^n$, $||h|| < \eta$, então

$$||\tau_h \tilde{u} - \tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_1 \,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{F},$$

onde $\tilde{u}$ é a extensão de u a $\mathbb{R}^n$ por zero fora de Ω e $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$.

Seja B um conjunto limitado de $W^{1,p}(\Omega)$. Mostrar-se-á que B satisfaz às três condições de Frechet-Kolmogorov em $L^q(\Omega)$ com $1 \leq q < p^*$.

A condição i) segue pelo Teorema 2.5.1, parte a). Estudar-se-á a condição ii). Por se ter $0 < q < p^*$, existe $\rho > 1$ tal que

$$q = \frac{1}{\rho}\, p^* + \frac{1}{\rho'} \times 0 \quad \text{onde} \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1.$$

Tem-se, aplicando a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\setminus K} |u|^q\, dx \; &\leq \Big(\int_{\Omega\setminus K} |u|^{q\rho}\Big)^{1/\rho} \Big(\int_{\Omega\setminus K} dx\Big)^{1/\rho'} \leq \\ &\leq ||u||^q_{L^{p^*}(\Omega)} \, \mathrm{mes}(\Omega\setminus K)^{1/\rho'} \leq C\, \mathrm{mes}(\Omega\setminus K)^{1/\rho'} \leq C\,\varepsilon \end{aligned}$$

pois $\mathrm{mes}(\Omega\setminus K)^{1/\rho'}$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, ver Observação 2.5.2. Isto mostra ii).

Verifica-se iii). Seja $\varepsilon_1 > 0$. Escolha K compacto de Ω tal que

$$\Big(\int_{\Omega\setminus K} |u|^q\, dx\Big)^{1/q} < \varepsilon_1/3\,, \quad \forall\, u \in B. \tag{2.5.47}$$

Este compacto K existe pela parte ii). Sejam $\eta = \mathrm{dist}\,(K, \Gamma)$ e

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; \mathrm{dist}\,(x, K) \leq \eta/3\}, \quad K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; \mathrm{dist}(x, K) \leq 2\eta/3\}$$

Claramente K_1 e K_2 são subconjuntos compactos de Ω. Observa-se que se $x \in \mathcal{C}K_1$ e $||h|| \leq \eta/3$ então $x - h \in \mathcal{C}K$. Logo para $||h|| \leq \eta/3$ resulta de (2.5.47)

$$\Big(\int_{\mathcal{C}K_1} |\tilde{u}(x-h)|^q\, dx\Big)^{1/q} \leq \Big(\int_{\mathcal{C}K} |\tilde{u}(x)|^q\, dx\Big)^{1/q} = \Big(\int_{\Omega\setminus K} |u(x)|^q\, dx\Big)^{1/q} < \varepsilon_1/3$$

isto é ,

$$||\tau_h \tilde{u}||_{L^q(\mathcal{C}K_1)} \leq \varepsilon_1/3, \quad \forall\, u \in B,\ \forall\, ||h|| < \eta/3. \tag{2.5.48}$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi = 1$ em K_2, $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\psi = 1 - \varphi$. Então $0 \leq \psi \leq 1$ e $1 = \varphi + \psi$. Tem-se:

$$\begin{aligned} ||\tau_h \tilde{u} - \tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= ||\tau_h(\varphi\tilde{u} + \psi\tilde{u}) - (\varphi\tilde{u} + \psi\tilde{u})||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq ||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} + ||\tau_h(\psi\tilde{u})||_{L^q(\mathbb{R}^n)} + ||\psi\tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned} \tag{2.5.49}$$

Mostra-se que cada um dos três últimos termos de (2.5.49) é pequeno para $||h||$ pequeno. Com efeito, de $\psi = 0$ em K_2, resulta de (2.5.47):

$$||\psi\tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathcal{C}K_2} |\psi\tilde{u}|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\int_{\mathcal{C}K_2} |\tilde{u}|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\int_{\Omega\setminus K} |u|^q\Big)^{1/q} < \varepsilon_1/3$$

isto é,

$$||\psi\tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_1/3\,, \qquad \forall\, u \in B. \tag{2.5.50}$$

Também, dos fatos se $x \in K_1$ então $x - h \in K_2$ com $||h|| < \eta/3$ e de $\psi = 0$ em K_2, resulta:

$$||\tau_h(\psi\tilde{u})||_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathcal{C}K_1} |\psi(x-h)\tilde{u}(x-h)|^q\Big)^{1/q} \leq ||\tau_h\tilde{u}||_{L^q(\mathcal{C}K_1)}\,.$$

Resulta de (2.5.48) que

$$||\tau_h(\psi\tilde{u})||_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_1/3\,, \qquad \forall\, u \in B,\ \forall\, ||h|| < \eta/3. \tag{2.5.51}$$

Aplicando o Lema 2.5.1 com $u = \varphi\tilde{u}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} ||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq ||h||\,||\varphi u||_{W^{1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq ||h||\,||\varphi u||_{W^{1,1}(\operatorname{supp}\varphi)} \leq \\ &\leq ||h|| c(\varphi, p)||u||_{W^{1,p}(\operatorname{supp}\varphi)} \leq C_1||h|| \end{aligned}$$

isto é,

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_1||h||, \qquad \forall\, u \in B. \tag{2.5.52}$$

Seja $\theta \in]0,1[$ tal que $\dfrac{1}{q} = \theta + \dfrac{1-\theta}{p^*}$, que existe por se ter $1 \leq q < p^*$. Pela desigualdade de interpolação (Proposição 1.2.1 do Capítulo 1), obtém-se:

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq ||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||^{\theta}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\, ||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.5.53}$$

Note que

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u})||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x-h)|^{p^*}\Big)^{1/p^*} = ||u||_{L^{p^*}(\Omega)}$$

portanto

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \big(2||u||_{L^{p^*}(\Omega)}\big)^{1-\theta} \leq C, \qquad \forall\, u \in B. \tag{2.5.54}$$

De (2.5.53) e das desigualdades (2.5.52) e (2.5.54), obtém-se

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C||h||^\theta, \qquad \forall\, u \in B. \tag{2.5.55}$$

Usando-se as desigualdades (2.5.50), (2.5.51) e (2.5.55) em (2.5.49) resulta

$$||\tau_h\tilde{u} - \tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} < C\,\varepsilon_1\,, \qquad \forall\, u \in B,\ \forall\, ||h|| < \eta,$$

que mostra a parte iii). Assim B é relativamente compacto em $L^q(\Omega)$. Demonstração do caso b): Aplique o raciocínio usado na demonstração do caso a), com, por exemplo, $p^* = 2q$. Demonstração do caso c): Tem-se $0 < 1 - \dfrac{n}{p} = \lambda_0 \leq 1$. Então pelo Teorema 2.5.1, parte c), para $n < p < \infty$, ou pelo Teorema 2.5.3, para $p = \infty$, resulta

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda_0}(\overline{\Omega}).$$

Seja B um conjunto limitado de $W^{1,p}(\Omega)$ então, pela imersão acima vem que B é limitado em $C^0(\overline{\Omega})$ e

$$\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} |u(x) - u(y)| \leq C||x-y||^{\lambda_0}.$$

Esta desigualdade implica que B é equicontínuo em $\overline{\Omega}$. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli, segue o caso c) do teorema. ■

Corolário 9 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^{m+1}, e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$ *se* $p < n$

b) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$ *se* $p = n$

c) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\Omega)$ *se* $p > n$.

Demonstração: Seja (u_ν) uma sucessão limitada de funções de $W^{m+1,p}(\Omega)$. Então

$$(D^\alpha u_\nu) \quad \text{é limitada em } W^{1,p}(\Omega),\ \forall\, |\alpha| \leq m.$$

Aplicando o Teorema de Rellich-Kondrachov, vem que existe uma subsucessão de (u_ν), denotada também por (u_ν), e $u \in W^{m,q}(\Omega)$, para os casos a) e b), tal que

$$D^\alpha u_\nu \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \qquad \forall\, |\alpha| \leq m$$

que mostra a) e b). Para o caso c), existe $u \in W^{m+1,p}(\Omega)$ tal que $u_\nu \to u$ fraco em $W^{m+1,p}(\Omega)$, portanto $u \in C^m(\overline{\Omega})$ pois $m < m + 1 - \dfrac{n}{p} \leq m + 1$. Aplicando o Teorema de Rellich-Kondrachov, obtém-se:

$$D^\alpha u_\nu \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad C^0(\overline{\Omega}), \qquad \forall\, |\alpha| \leq m$$

que mostra a parte c) do corolário. ■

Corolário 10 *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então*
a) se Ω *é de classe* C^{m+1} *a seguinte imersão é compacta:*

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$$

b) se Ω *não possui condições de regularidade, a seguinte imersão é compacta:*

$$W_0^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m,p}(\Omega).$$

Demonstração: A parte a) é obtida aplicando o Corolário 9 para as diferentes possibilidades de p e n. Note que se $p < n$ então $p < np/(n-p)$. Também $C^m(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$. Para a parte b), considere $\mathcal{O}$ uma bola aberto do $\mathbb{R}^n$ que contenha propriamente Ω. Considere as aplicações

$$W_0^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{ext}} W^{m+1,p}(\mathcal{O}) \xrightarrow{I} W^{m,p}(\mathcal{O}) \xrightarrow{r_\Omega} W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde ext $u = \tilde{u}$, $\tilde{u}$ a extensão de u a $\mathcal{O}$ por zero fora de Ω e $r_\Omega\, u = u|_\Omega$. Notando que a primeira e terceira aplicações são contínuas e a aplicação I é compacta, pela parte a), segue a parte b) do corolário. ■

Teorema 2.5.5 *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m, e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-mp}$ *se* $mp < n$

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$ *se* $mp = n$

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}). \quad k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$ *se* $mp > n$ *onde* k *é um inteiro não negativo.*

Demonstração: As partes a) e b) serão mostradas aplicando indução com relação a m.

Mostrar-se-á a). Para $m = 1$, o resultado é verdadeiro pelo Teorema de Rellich-Kondrachov. Suponha a) válido para $m \geq 1$. Será provado que a) é válido para $m+1$, isto é, para $(m+1)p < n$ será provado que a imersão

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad 1 \leq q < \frac{np}{n-(m+1)p} = q^*$$

é compacta. Com efeito

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} \quad \text{com} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}\cdot$$

Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, aplicado a $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1}{p^*} - \dfrac{1}{n}$, obtém-se que a imersão

$$W^{1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad 1 \leq q < q^* \tag{2.5.56}$$

é compacta e, pelo Teorema 2.5.1, aplicado a $\dfrac{1}{p^*} - \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

que acarreta

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p^*}(\Omega). \tag{2.5.57}$$

As imersões (2.5.56) e (2.5.57) implicam a parte a) para $m+1$.

Mostrar-se-á b). Para $m = 1$, o resultado é válido pelo Teorema de Rellich-Kondrachov. Suponha b) válido para $m \geq 1$. Será provado que b) é válido para $m+1$, isto é, para $(m+1)p = n$ demonstrar-se-á que a imersão

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$$

é compacta. De fato, tem-se $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$ que implica, pelo Teorema 2.5.1,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega),$$

portanto:

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,n}(\Omega).$$

O Teorema de Rellich-Kondrachov garante a imersão

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$$

é compacta. As duas últimas imersões implicam b) para $m+1$.

Demonstrar-se-á c). Pelos Teoremas 2.5.1 e 2.5.3 vem que

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda_1}(\overline{\Omega})$$

para algum $0 < \lambda_1 \leq 1$. Notando que $C^{k,\lambda_1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ resulta

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda_1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}).$$

Seja B um conjunto limitado de $W^{m,p}(\Omega)$ então B é um conjunto limitado em $C^k(\overline{\Omega})$ e

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C||x-y||^{\lambda_1}\,, \quad \forall\, x, y \in \overline{\Omega},\ |\alpha| \leq k \text{ e } u \in B.$$

Pelo Teorema de Arzela-Ascoli segue então que B é relativamente compacto em $C^k(\overline{\Omega})$. Assim o teorema está demonstrado. ■

Observação 18 *Grande parte dos resultados do Capítulo 2 foram obtidos para funções a valores reais, por exemplo, a Proposição 2.3.2. Entretanto, todos os resultados do capítulo são válidos para funções a valores complexos. Isto deve-se ao fato de que sendo* $u(x) = Re\ u(x) + i\ Im\ u(x)$ *então as funções* $Re\ u(x)$ *e* $Im\ u(x)$ *têm a mesma regularidade que* u *e o suporte de cada uma delas está contido no suporte de* u. *Também, por exemplo,*

$$\Big(\int |u|^q\,dx\Big)^{1/q} \leq 2\Big(\int |Re\ u|^q\,dx\Big)^{1/q} + 2\Big(\int |Im\ u|^q\,dx\Big)^{1/q}$$

e

$$||Re\ u||_{W^{m,p}} \leq ||u||_{W^{m,p}}\,, \qquad ||Im\ u||_{W^{m,p}} \leq ||u||_{W^{m,p}}\,.$$

Resultados análogos para $q = p = \infty$. *Então a observação decorre aplicando os resultados obtidos para funções reais e as propriedades mencionadas.*

2.6 Espaços $H^s(\Omega)$

Inicia-se o estudo com outra caracterização dos espaços $H^m(\mathbb{R}^n)$, m inteiro positivo, que servirá de motivação para a definição dos espaços $H^s(\Omega)$, quando s é um real positivo e Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Considera-se a função $J_m(x) = (1 + ||x||^2)^{m/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Note que $J_m(x)$ é uma função lentamente crescente no infinito. Nesta seção $\widehat{u}$ estará representando a transformada de Fourier de u e $\check{u}$ a transformada de Fourier inversa.

Proposição 2.6.1 $H^m(\mathbb{R}^n)$ *coincide com* $\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + ||x||^2)^{m/2}\,\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. *Definindo*

$$|||u|||_m = ||(1 + ||x||^2)^{m/2}\,\widehat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

a aplicação $u \mapsto |||u|||_m$ de $H^m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ é uma norma equivalente a norma de Sobolev $||u||_m$.

Demonstração: Sejam C_1, C_2 constantes positivas verificando a desigualdade:

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leq m} x^{2\alpha} \leq (1+||x||^2)^m \leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq m} x^{2\alpha}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

(ver Exercício 5 do Capítulo 1). Observe que $H^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (ver Seção 1.3.3 do Capítulo 1). Se $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, para todo $|\alpha| \leq m$, resulta

$$\widehat{D^\alpha u(x)} = (ix)^\alpha\, \widehat{u}(x) \quad \text{quase sempre no} \quad \mathbb{R}^n.$$

Daí e da última desigualdade elementar acima mencionada conclui-se que $J_m\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} &|||u|||_m^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^m\, |\widehat{u}(x)|^2\, dx \;\leq \\ &\leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha\, \widehat{u}(x)|^2\, dx = C_2 \sum_{|\alpha|\leq m} |\widehat{D^\alpha u(x)}|^2\, dx \;= \\ &= C_2 \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2\, dx = C_2 ||u||_m^2\,. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $J_m\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, da desigualdade elementar resulta, que para todo $|\alpha| \leq m,\ (ix)^\alpha\, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\widehat{D^\alpha u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, além disso,

$$\begin{aligned} ||u||_m^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha u(x)}|^2\, dx \;= \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} |\widehat{u}(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{C_1}\, |||u|||_m^2 \end{aligned}$$

que demonstra a proposição. ■

A seguir, serão estudados os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ sendo s um número real não negativo. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e s real não negativo, seja $J_s(x) = (1+||x||^2)^{s/2}$, semelhante a J_m caso m inteiro não negativo. Define-se $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço vetorial

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1+||x||^2)^{s/2}\, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

com o produto escalar definido por:

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s\, \widehat{u}(x)\widehat{v}(x)\, dx,$$

cuja norma por ele induzida é:

$$||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s\, |\widehat{u}(x)|^2\, dx.$$

Simples é mostrar que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.6.2 *$H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $H^s(\mathbb{R}^n)$, sendo aí denso.*

Demonstração: Seja (u_ν) uma sucessão de Cauchy de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Então (u_ν) e $(J_s\widehat{u}_\nu)$ são sucessões de Cauchy de $L^2(\mathbb{R}^n)$, logo existem u e v em $L^2(\mathbb{R}^n)$ tais que $u_\nu \to u$ e $J_s\widehat{u}_\nu \to v$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para provar que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é Hilbert, basta mostrar que $v = J_s\widehat{u}$. Para toda função teste φ no $\mathbb{R}^n$, tem-se:

$$\langle J_s\widehat{u}, \varphi\rangle = \langle \widehat{u}, J_s\varphi\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle \widehat{u}_\nu, J_s\varphi\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle J_s\widehat{u}_\nu, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle$$

e do lema de Du Bois Raymond, obtém-se $J_s\widehat{u} = v$.

Dada uma função $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, seja (φ_ν) uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$ convergente para $J_s\widehat{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para todo $\nu \in \mathbb{N}$, a função $\varphi_\nu(x)/(1 + ||x||^2)^{s/2}$ pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo existe $\psi_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\psi}_\nu(x) = \varphi_\nu(x)/(1 + ||x||^2)^{s/2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Daí

$$\begin{aligned} ||\psi_\nu - u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s\, |\widehat{\psi}_\nu(x) - \widehat{u}(x)|^2\, dx\ = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\nu(x) - J_s(x)\widehat{u}(x)|^2\, dx, \end{aligned}$$

isto é, (ψ_ν) é uma sucessão de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergente para u em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Resta demonstrar a continuidade da inclusão de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Seja m um inteiro positivo tal que

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^{-(m-s)}\, dx < +\infty.$$

Para todo u em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tem-se:

$$||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^m \, (1 + ||x||^2)^{-(m-s)} \, |\widehat{u}(x)|^2 \, dx \leq C \, p_m(\widehat{u})$$

sendo p_m as seminormas que definem a topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se (u_ν) converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, da continuidade da transformação de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ decorre que $(\widehat{u}_\nu)$ converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Logo, daí e da última desigualdade decorre que (u_ν) converge para zero em $H^s(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolário 11 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Seja $s \geq 0$ e $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$ o dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Da proposição anterior resulta que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$

Representa-se por $||f||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}$ a norma de uma forma linear contínua $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$||f||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \sup \{|\langle f, u\rangle|; u \in H^s(\mathbb{R}^n), ||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 1\}.$$

Proposição 2.6.3 *São verdadeiras as seguintes assertivas:*

a) $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + ||x||^2)^{-s/2} \, \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$

b) $||f||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = ||(1 + ||x||^2)^{-s/2} \, \widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

para toda f em $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Dada $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, do teorema de Riesz decorre a existência de $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$||f||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = ||u_0||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

e

$$\langle f, u\rangle = (u, u_0)_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo } u \text{ em } H^s(\mathbb{R}^n).$$

Para todo φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tem-se $\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(-x)$, logo

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}, \varphi \rangle &= (\widehat{\varphi}, u_0)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s \, \varphi(-x)\overline{\widehat{u}_0(x)} \, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s \, \overline{\widehat{u}(-x)} \, \varphi(x) \, dx, \end{aligned}$$

logo, $\widehat{f}$ é definida pela função $(1 + ||x||^2)^s \, \overline{\widehat{u}_0(-x)}$, donde $J_{-s}\widehat{f}(x) = (1 + ||x||^2)^{s/2} \, \overline{\widehat{u}_0(-x)}$ ou seja, $J_{-s} \, \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$||J_{-s}\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||J_s\widehat{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||u_0||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} \, .$$

Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $J_{-s}\widehat{f}$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dada uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ seja $\varphi^*(x) = \widehat{\varphi}(-x), \;\; x \in \mathbb{R}^n$. Notando que $\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = \check{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(x)$, vem que $\widehat{\varphi}^* = \varphi$. Escrevendo $-\psi = J_s\varphi^*$ pertencente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$||\varphi||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = ||J_s\widehat{\varphi}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||J_s\varphi^*||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

e também, $\varphi = \widehat{\varphi}^* = \widehat{J_{-s}\psi}$, logo:

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{J_{-s}\psi} \rangle = \langle J_{-s}\widehat{f}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^{-\frac{s}{2}} \, \widehat{f}(x)\psi(x) \, dx,$$

portanto,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq ||J_{-s}\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, ||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||J_{-s}\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, ||\varphi||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \, ,$$

desigualdade esta que demonstra ser $f \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ contínua na topologia de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Logo f estende-se a um único funcional linear contínuo ao $H^s(\mathbb{R}^n)$, isto é, $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. ■

A seguir mostra-se que para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a aplicação linear

$$u \mapsto \varphi u \quad \text{de} \quad H^s(\mathbb{R}^n) \mapsto H^s(\mathbb{R}^n)$$

é contínua. Para isto observa-se que

Lema 2.6.1 *Para φ e u em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se*

$$(2\pi)^{n/2} \, \widehat{\varphi u} = \widehat{\varphi} * \widehat{u}.$$

Demonstração: De fato, nota-se que

$$\widehat{(\varphi(u))}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,y)}\, \varphi(y)u(y)\, dy$$

e $\varphi(y) = \check{\hat{\varphi}}(y)$, isto é,

$$\varphi(y) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i(y,z)-i(z,w)}\, \varphi(w)\, dwdz$$

onde cada integral é tomado sobre $\mathbb{R}^n$. Segue então

$$\begin{aligned} \widehat{(\varphi u)}(x) &= (2\pi)^{-3n/2} \int \int \int e^{-i(x-z,y)}\, e^{-i(z,w)}\, u(y)\varphi(w)\, dydwdz = \\ &= (2\pi)^{-n} \int \int e^{-i(z,w)}\, \varphi(w)\widehat{u}(x-z)\, dwdz = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int \widehat{u}(x-z)\widehat{\varphi}(z)\, dz = (2\pi)^{-n/2}(\widehat{u} * \widehat{\varphi})(x) \end{aligned}$$

que mostra o lema. ■

Proposição 2.6.4 *Sejam $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com s real ≥ 0, então*

a) $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

b) A aplicação linear

$$u \mapsto \varphi u \quad de \quad H^s(\mathbb{R}^n) \mapsto H^s(\mathbb{R}^n)$$

é contínua e verifica:

$$||\varphi u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C||\varphi||_{H^r(\mathbb{R}^n)}\, ||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

onde $2r - 2s > n, C^2 = (2\pi)^{-n}\, C_0\, 2^{2s+1}$ *e*

$$C_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||y||^2)^{r-s}}\, dy.$$

Demonstração: De início considera-se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então pelo Lema 2.6.1 segue-se:

$$\int (1+||x||^2)^s\, |\widehat{\varphi u}(x)|^2\, dx = (2\pi)^{-n} \int (1+||x||^2)^{s/2}\, |(\widehat{\varphi} * \widehat{u})(x)|^2\, dx,$$

onde as integrais são tomadas sobre $\mathbb{R}^n$. Por outro lado,

$$\left|(1+||x||^2)^{s/2}(\widehat{\varphi}\times\widehat{u})(x)\right| \leq \int \frac{(1+||x||^2)^{s/2}}{(1+||y||^2)^{r/2}}\,|\widehat{u}(x-y)|(1+||y||^2)^{r/2}\,|\widehat{\varphi}(y)|\,dy,$$

que implica, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left|(1+||x||^2)^{s/2}(\widehat{\varphi}*\widehat{u})(x)\right|^2 \leq ||\varphi||^2_{H^r(\mathbb{R}^n)} \int \frac{(1+||x||^2)^{s}}{(1+||y||^2)^{r}}\,|\widehat{u}(x-y)|^2\,dy.$$

Assim

$$||\varphi||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n}\,||\varphi||^2_{H^r(\mathbb{R}^n)} \int\int \frac{(1+||x||^2)^{s}}{(1+||y||^2)^{r}}\,|\widehat{u}(x-y)|^2\,dydx. \tag{2.6.58}$$

Observe que $1+||x||^2 < 2(1+||x-y||^2)+2(1+||y||^2)$, portanto

$$(1+||x||^2)^s \leq 2^{2s}(1+||x-y||^2)^s + 2^{2s}(1+||y||^2)^s,$$

donde pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
&\int\int \frac{(1+||x||^2)^{s}}{(1+||y||^2)^{r}}\,|\widehat{u}(x-y)|^2\,dxdy \ \leq \\
&\leq 2^{2s}\int \frac{1}{(1+||y||^2)^{r}}\left[\int (1+||x-y||^2)^s|\widehat{u}(x-y)|^2dx\right]dy + \\
&+2^{2s}\int \frac{1}{(1+||y||^2)^{r-s}}\left[\int |\widehat{u}(x-y)|^2\,dx\right]dy \ \leq \\
&\leq C_0\,2^{2s}\Big[||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} + ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big] \leq C_0\,2^{2s+1}||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,.
\end{aligned}$$

De (2.6.58) e desta última desigualdade resulta

$$||\varphi u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C||\varphi||_{H^r(\mathbb{R}^n)}\,||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.6.59}$$

Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e (u_ν) uma sucessão de funções $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_\nu \to u$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$ (ver Corolário 11). Segue então que

$$\varphi\,u_\nu \to \varphi\,u \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por (2.6.59) vem que $(\varphi\,u_\nu)$ é uma sucessão de Cauchy em $H^s(\mathbb{R}^n)$, logo, existe $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi\,u_\nu \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, portanto $\varphi\,u_\nu \to v$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Da unicidade dos limites vem que $v = \varphi\,u$ e

$$\varphi\,u_\nu \to \varphi\,u \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}^n).$$

Isto mostra a parte a). A parte b) segue de (2.6.59) e desta última convergência. ■

A seguir serão introduzidos os espaços $H^s(\Omega)$. Denota-se por $H^s(\Omega)$, s um número real não negativo e Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, ao espaço vetorial

$$H^s(\Omega) = \{u = v|_\Omega \,; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Dota-se a $H^s(\Omega)$ de uma topologia. De fato, considera-se a aplicação linear sobrejetiva

$$H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\Omega), \quad v \mapsto rv = v|_\Omega \,.$$

Observe que o núcleo $N(r)$ de r é fechado. Com efeito, seja (v_ν) uma sucessão de elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $rv_\nu = 0$ e $v_\nu \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Tem-se

$$\begin{aligned} &||v_\nu - v||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s \, |\widehat{v}_\nu(x) - \widehat{v}(x)|^2 \, dx \, \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |(\widehat{v_\nu - v})(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v_\nu(x) - v(x)|^2 \, dx \geq \int_\Omega |v|^2 \, dx \end{aligned}$$

logo

$$\int_\Omega |v|^2 \, dx \leq \lim ||v_\nu - v||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 0$$

isto é, $v|_\Omega = 0$ o que mostra que $N(r)$ é fechado.

Considera-se

$$\begin{array}{ccc} H^s(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{r} & H^s(\Omega) \\ \pi \searrow & & \sigma \nearrow \\ & H^s(\mathbb{R}^n)/N(r) & \end{array} \tag{2.6.60}$$

onde π é o homomorfismo canônico. Tem-se que σ é um isomorfismo de espaço vetorial e $X = H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar

$$([v], [w])_X = ([v], [w])_1 + i([v], i[w])_1 \,,$$

onde

$$([v], [w])_1 = 4^{-1}(||[v + w]||^2 - ||[v - w]||^2),$$

e norma

$$||[v]||_X = \inf \{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \,; w \in [v]\}. \tag{2.6.61}$$

Equipa-se $H^s(\Omega)$ com a topologia dada por $H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$, via o isomorfismo σ. Assim

$$(u_1, u_2)_{H^s(\Omega)} = ([v_1], [v_2])_X \quad \text{onde} \quad v_1|_\Omega = u_1 \text{ e } v_2|_\Omega = u_2 \tag{2.6.62}$$

$$||u||_{H^s(\Omega)} = ||[v]||_X = \inf \{||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,; v|_\Omega = u\} \tag{2.6.63}$$

Com esse produto escalar, $H^s(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert.

Observação 19 *Com o intuito de tornar autosuficiente a leitura destas notas, mostra-se que a norma (2.6.61) do espaço $X = H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$ satisfaz a lei do paralelogramo.*

Com efeito, sejam $v_1 \in [v]$ e $w_1 \in [w]$ então $v_1 \pm w_1 \in [v \pm w]$. Tem-se

$$||[v] + [w]||_X^2 + ||[v] - [w]||_X^2 \leq ||v_1 + w_1||_{H^s}^2 + ||v_1 - w_1||_{H^s}^2 = 2||v_1||_{H^s}^2 + 2||w_1||_{H^s}^2$$

que implica, tomando o mínimo de cada um dos termos da última expressão,

$$||[v] + [w]||_X^2 + ||[v] - [w]||_X^2 \leq 2||[v]||_X^2 + 2||[w]||_X^2 .$$

A desigualdade

$$2||[v]||_X^2 + 2||[w]||_X^2 = ||[v] + [w]||^2 + ||[v] - [w]||^2$$

é mostrada de forma análoga.

Proposição 2.6.5 *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, s real ≥ 0.*

Demonstração: Por construção a aplicação r definida em (2.6.60) é contínua. Seja $u \in H^s(\Omega)$ então existe $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $rv = v|_\Omega = u$. Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ (Corolário 11) vem que existe (φ_ν) sucessão de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, e pela continuidade de r, resulta $rv_\nu \to rv$ em $H^s(\Omega)$, que mostra a proposição. ■

No caso de ser s um inteiro não negativo m e Ω um aberto limitado, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 2.6.6 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m. Então*

$$H^m(\Omega) = \{u = v|_\Omega\,; v \in H^m(\mathbb{R}^n)\}$$

e as normas $||u||_{H^m(\Omega)}$ e $|||u|||_{H^m(\Omega)}$ são equivalentes, onde $|||u|||_{H^m(\Omega)}$ é a norma definida em (2.6.63) para $s = m$.

Demonstração: Seja $P\colon H^m(\Omega) \mapsto H^m(\mathbb{R}^n)$ o operador de prolongamento dado pelo Teorema 2.4.2. Considere $u \in H^m(\Omega)$. Seja $v = Pu$ então $rv = rPu = u$ onde $rv = v|\_\Omega$. Isto mostra uma das inclusões dos conjuntos. Por outro lado, note que $rD^\alpha v = D^\alpha rv$, $|\alpha| \leq m$, que mostra a outra inclusão.

Tem-se:

$$|||u|||_{H^m(\Omega)} \leq ||Pu||_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{H^m(\Omega)}\,. \tag{2.6.64}$$

Por outro lado, seja $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $rv = u$. Então

$$|D^\alpha(rv)||_{L^2(\Omega)} = ||r(D^\alpha v)||_{L^2(\Omega)} \leq ||D^\alpha v||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,, \quad |\alpha| \leq m$$

logo

$$||u||_{H^m(\Omega)} \leq ||v||_{H^m(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Como v foi arbitrário segue-se que

$$||u||_{H^m(\Omega)} \leq |||u|||_{H^m(\Omega)}\,. \tag{2.6.65}$$

De (2.6.64) e (2.6.65) obtém-se que as normas são equivalentes. ■

Conclui-se da Proposição 2.6.6 que quando Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com Ω de classe C^m, a definição de espaço $H^m(\Omega)$ dada no Parágrafo 2.2 coincide com a definição dada por (2.6.60)–(2.6.62). Em geral, isto é, quando Ω não é regular, tem-se que o espaço definido por (2.6.60)–(2.6.62) está contido no espaço definido no Parágrafo 2.3. Para um estudo deste caso o leitor pode consultar N. Meyers - J. Serrin [24].

Serão demonstradas algumas propriedades dos espaços $H^s(\Omega)$.

Proposição 2.6.7 *Se* $0 \leq s_1 \leq s_2$ *então*

$$H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Do fato $H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ segue que $H^{s_2}(\Omega) \subset H^{s_1}(\Omega)$. Também para $u \in H^{s_2}(\Omega)$,

$$\{v \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n);\ v|_\Omega = u\} \subset \{w \in H^{s_1}(\mathbb{R}^n);\ w|_\Omega = u\}.$$

Desta inclusão e notando que $||z||_{H^{s_1}(\mathbb{R}^n)} \leq ||z||_{H^{s_2}(\mathbb{R}^n)}$ para todo $z \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, vem que

$$\inf\{||w||_{H^{s_1}(\mathbb{R}^n)}\,; w|_\Omega = u\} \leq \inf\{||v||_{H^{s_2}(\mathbb{R}^n)}\,; v|_\Omega = u\}$$

isto é,

$$||u||_{H^{s_1}(\Omega)} \leq ||u||_{H^{s_2}(\Omega)}\,, \quad u \in H^{s_2}(\Omega)$$

que mostra a inclusão contínua de $H^{s_2}(\Omega)$ em $H^{s_1}(\Omega)$. ■

Denota-se por $C_b^m(\overline{\Omega})$ ao espaço de Banach

$$C_b^m(\overline{\Omega}) = \{u = v|_\Omega\,; v \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ e } D^\alpha u \text{ é limitado em } \overline{\Omega},\ |\alpha| \leq m\}$$

equipado com a norma

$$||u||_{C_b^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \Big(\sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| \Big).$$

Claramente se Ω é limitado, $C_b^m(\overline{\Omega}) = C^m(\overline{\Omega})$.

Proposição 2.6.8 *Se* $s - \dfrac{n}{2} > m$, m *inteiro não negativo, então*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C_b^m(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Faz-se a demonstração por indução com relação m. Mostra-se o resultado para $m = 0$.

Sejam $u \in H^s(\Omega)$ e $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $v|_\Omega = u$. Tem-se que

$$\widehat{v}(x) = (1 + ||x||^2)^{-s/2}\,(1 + ||x||^2)^{s/2}\,\widehat{v}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

e

$$||\widehat{v}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C^{1/2}||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

com $C = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^{-s}\,dx < \infty$. Dados x, x_ν no $\mathbb{R}^n$, tem-se $v(x) = \check{\widehat{v}}(x)$, logo

$$v(x_\nu) - v(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} [e^{i(x_\nu, z)} - e^{i(x,z)}]\widehat{v}(z)\,dz.$$

Se $x_\nu \to x$ em $\mathbb{R}^n$, decorre desta última igualdade e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado às funções $w_\nu(z) = e^{i(x_\nu,z)}\,\widehat{v}(z)$, que $v(x_\nu) \to v(x)$, isto é, v é contínua em x. Como $x \in \mathbb{R}^n$ foi arbitrário segue-se que v é contínua em $\mathbb{R}^n$. Portanto u é contínua em $\overline{\Omega}$. Também

$$|v(x)| \leq (2\pi)^{-n/2}\,||\widehat{v}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2}\,C^{1/2}||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

que implica

$$||u||_{C_b^0(\overline{\Omega})} \leq (2\pi)^{-n/2}\,C^{1/2}||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall\, v \in H^s(\mathbb{R}^n),\ v|_\Omega = u$$

portanto

$$||u||_{C_b^0(\overline{\Omega})} \leq (2\pi)^{-n/2}\,C^{1/2}||u||_{H^s(\Omega)}$$

que mostra a proposição para $m = 0$.

Suponha o resultado válido para $m \geq 0$. Mostra-se que ele também é válido para $m+1$, isto é, para $s - \frac{n}{2} > m+1$. De início observe que se $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então $\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \leq ||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.6.66}$$

Com efeito, $\widehat{\dfrac{\partial v}{\partial x_j}}(x) = ix_j\,\widehat{v}(x)$ e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^{s-1}\left|\widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(x)\right|^2 dx \;&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^{s-1}\,|x_j|^2\,|\widehat{v}(x)|^2\,dx \;\le \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^{s}\,|\widehat{v}(x)|^2\,dx\end{aligned}$$

que mostra a afirmação. Sejam $u \in H^s(\Omega)$ e $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $v|_\Omega = u$. Pela primeira parte vem que $v \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ e pela hipótese de indução pois $\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ e Ω pode ser o $\mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$ e

$$\left|D^\alpha\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,(x)\right| \le C_1 \left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\alpha| \le m$$

que implica por (2.6.66) e notando que $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ pois $\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$|D^a\,v(x)| \le C_1||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\alpha| \le m+1.$$

Assim

$$||u||_{C_b^{m+}(\overline{\Omega})} \le C_1||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall\, v \in H^s(\mathbb{R}^n),\; v|\_\Omega = u$$

isto é

$$||u||_{C_0^{m+1}(\overline{\Omega})} \le C_1||u||_{H^s(\Omega)}$$

e a proposição está demonstrada. ■

Observe que a Proposição 2.6.8 é uma generalização, num certo sentido, do Teorema 2.3.3, Parágrafo 2.3, onde é estudado a imersão para o caso $m - \dfrac{n}{2} > k$.

Existem outros métodos para definir $H^s(\Omega)$, todos coincidentes quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$ ou um aberto limitado regular. Como exemplo de algum desses métodos pode-se mencionar os que usam a teoria de interpolação de espaços de Hilbert (ver J.L. Lions-E. Magenes [11]).

2.7 Teoremas de Traço

A seguir estuda-se uma versão elementar do teorema de traço. Considera-se $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ (isto é, Ω é de classe C^m para todo $m = 1, 2, \ldots$), com fronteira Γ. Com $\mathcal{D}(\Gamma)$ representa-se o espaço vetorial das funções reais w definidas em Γ, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representa-se por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ. A caracterização do espaço ao qual pertence $\gamma_0 u$, quando u pertence a $H^m(\Omega)$, é conhecido sob a denominação de teorema de traço. Note que se $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ resulta que $\gamma_0 u \in \mathcal{D}(\Gamma)$. Para a demonstração do teorema de traço é preciso dar sentido do espaço $H^s(\Gamma)$, cuja construção faz-se a seguir.

No caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, tem-se $\Gamma = \{(x', 0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, identificando-se toda função u definida em Γ com a função $x' \to u(x', 0)$ do $\mathbb{R}^{n-1}$ em $\mathbb{R}$. Com tal identificação tem-se $\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $L^p(\Gamma) = L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Portanto, neste caso simples, define-se $H^s(\Gamma)$ como sendo $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Suponha Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, suposto bem regular. Considere um sistema de cartas locais de Γ, isto é, $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \ldots, (U_N, \varphi_N)\}$, e funções testes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ no $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\text{supp } (\sigma_j) \subset U_j\,, \;\; j = 1, 2, \ldots, N, \qquad \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(x) = 1, \;\; x \in \Gamma.$$

Dada uma função w definida em Γ, para todo $j = 1, 2, \ldots, N$ seja

$$w_j(y) = \left| \begin{array}{ll} (\sigma_j w)(\varphi_j^{-1}(y', 0)) & \text{se} \quad y' \in \Omega_0 =]0, 1[^{n-1} \\ 0 & \text{se} \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0 \end{array} \right.$$

Sendo supp $(\gamma_0 \sigma_j) =$ supp $\sigma_j \cap \Gamma \subset U_j \cap \Gamma$ e como φ_j aplica $U_j \cap \Gamma$ sobre $\Omega_0 \times \{0\}$, tem-se

$$\text{supp } (w_j) \subset \varphi_j(\text{supp } \sigma_j \cap \Gamma) \subset \Omega_0 \times \{0\}.$$

Decorre daí que se $w \in \mathcal{D}(\Gamma)$, então w_j pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, \ldots, N$.

Dado $s > 0$ considere-se $H^s(\Gamma)$ como sendo o espaço vetorial das funções w definidas em Γ tais que $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, \ldots, N$, munido do produto escalar seguinte:

$$(w, v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} (w_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

para todo par $w, v \in H^s(\Gamma)$. Tem-se que $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert sendo $\mathcal{D}(\Gamma)$ denso em $H^s(\Gamma)$.

Proposição 2.7.1 *Existe uma constante positiva C tal que*

$$||\gamma_0 u||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C||u||_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Observação 20 *Suponha demonstrada a Proposição 2.7.1. Ela afirma que considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, a aplicação*

$$\gamma_0 \colon \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{1/2}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, pois Ω é bem regular, esta aplicação prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0, tal que:

$$\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma),$$

a qual denomina-se função **traço** *e seu valor $\gamma_0 u$, para u em $H^1(\Omega)$, denomina-se o traço de u sobre Γ. Pode-se assim, enunciar o seguinte teorema, conhecido sob a denominação de* **teorema de traço**.

Teorema 2.7.1 *A função traço aplica $H^1(\Omega)$ sobre $H^{1/2}(\Gamma)$ e o núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Observação 21 *Quando se diz que os objetos de $H_0^1(\Omega)$ são nulos na fronteira de Ω, deseja-se com isto dizer que o núcleo do traço de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração da Proposição 2.7.1: É suficiente considerar o caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. De fato, suponhamos que a proposição seja válida para $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Dado $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e $j = 1, 2, \ldots, N$, seja

$$v_j(x) = \left| \begin{array}{ll} (\sigma_j u)(\varphi_j^{-1}(x)), & x \in]0,1[^{n-1} \times [0,1] = V \\ 0 & x \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \backslash V \end{array} \right.$$

Segue-se que $v_j \in (\overline{\mathbb{R}^n_+})$ e $\gamma_0 v_j = \gamma_0 u_j$, onde $u_j = \sigma_j u$, logo,

$$||u_j||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = ||\gamma_0 v_j||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C||v_j||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \leq CC_j||u||_{H^1(\Omega)}$$

sendo C_j uma constante que depende de σ_j e φ_j. Fazendo $C_1 = C\Big(\sum_{j=1}^{n} C_j^2\Big)^{1/2}$, tem-se:

$$||\gamma_0 u||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_1||u||_{H^1(\Omega)} \quad \text{para todo} \quad u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Demonstra-se a Proposição 2.7.1 no caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Represente-se por $\mathcal{F}_1$ a transformada de Fourier no $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Dado um elemento $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, para todo $t \geq 0$ seja $u(t)$ a função de $\mathbb{R}^{n-1}$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} &u(t)(x') = u(x', t) \quad \text{para} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \\ &w(t) = \mathcal{F}_1[u(t)] \\ &w(x', t) = w(t)(x') = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(x', y')}\, u(y', t)\, dy' \end{aligned}$$

Observe-se que $(\gamma_0 u)(x', 0) = u(x', 0) = u(0)(x')$, logo:

1. $$\begin{aligned} &||\gamma_0 u||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = ||u(0)||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + ||x'||^2)^{1/2}\, |\mathcal{F}_1\, u(0)(x')|^2\, dx' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + ||x'||^2)^{1/2}\, ||w(x', 0)|^2\, dx'. \end{aligned}$$

Tem-se, também:

2. $$\begin{aligned} &||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |w(x', t)|^2\, dx' dt = \\ &= \int_0^\infty ||u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt = \int_0^\infty ||\mathcal{F}_1[u(t)]||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt = \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |w(x', t)|^2\, dx' dt. \end{aligned}$$

Para $j = 1, 2, \ldots, n-1$, seja $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\cdot$ Então:

$$\mathcal{F}_1[D_j u(t)](x') = (-ix_j)\mathcal{F}_1[u(t)](x') = (-ix_j)w(x', t),$$

para $(x', t) \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Tem-se, também:

$$(D_j u(t))(x') = (D_j u)(x', t).$$

Do cálculo anterior obtém-se:

3.
$$\begin{aligned} ||D_j u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^1 \Big\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(D_j u(t))(x')|^2 \, dx' \Big\} dt = \\ &= \int_0^\infty |D_j u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, dt = \int_0^\infty ||\mathcal{F}_1[D_j u(t)]||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \, dt = \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |x_j|^2 \, |w(x', t)|^2 \, dx' dt. \end{aligned}$$

Fazendo $v(x', t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x', t)$ tem-se que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x', t) = \mathcal{F}_1[v(t)](x'),$$

logo

4.
$$\begin{aligned} ||D_n u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^\infty ||v(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \, dt = \\ &= \int_0^\infty ||\mathcal{F}_1 v(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \, dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x', t) \right|^2 \, dx' dt. \end{aligned}$$

Das três últimas relações conclui-se:

5.
$$||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big\{ (1 + ||x'||^2)|w(x', t)|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x', t) \right|^2 \Big\} dx' dt.$$

Fixando x' no $\mathbb{R}^{n-1}$, seja $\varphi(t) = w(x', t)$, $t \geq 0$, então $\varphi \in \mathcal{D}([0, \infty))$ e $\varphi'(t) = \dfrac{\partial w}{\partial t}(x', t)$. Da desigualdade de Schwarz obtém-se:

$$\begin{aligned} |\varphi(0)|^2 &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt} |\varphi(t)|^2 \, dt = -2\mathrm{Re} \int_0^\infty \varphi(t)\varphi'(t) \, dt \leq \\ &\leq 2\Big(\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 \, dt \Big)^{1/2} \Big(\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2 \, dt \Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|w(x',0)|^2 \leq 2\Big(\int_0^\infty |w(x',t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2\,dt\Big)^{1/2}$$

6. $$(1+||x'||^2)^{1/2}\,|w(x',0)|^2 \leq$$

$$\leq 2\Big(\int_0^\infty (1+||x'||^2)|w(x',t)|^2 dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2\,dt\Big)^{1/2} \leq$$
$$\leq \int_0^\infty (1+||x'||^2)|w(x',t)|^2\,dt + \int_0^\infty \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2\,dt.$$

Integrando sobre o $\mathbb{R}^{n-1}$, aplicando o teorema de Fubini e levando em conta as relações 1. e 6. obtém-se:

$$||\gamma_0 u||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq ||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

o que demonstra a Proposição 2.7.1. ■

Demonstração do Teorema 2.7.1 no caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

a) γ_0 **é uma aplicação sobre** – De fato, seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ e considera-se

$$v(x',x_n) = (\mathcal{F}_1\varphi)(x')\exp\big(-\sqrt{1+||x'||^2||}\,x_n\big)$$
$$u(x',x_n) = \mathcal{F}_1^{-1}[v(x_n)](x') = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x',y')}\,v(y',x_n)\,dy'.$$

Sendo $v(0)(x') = v(x',0) = (\mathcal{F}_1\varphi)(x')$ tem-se

$$\gamma_0\,u = \mathcal{F}_1^{-1}[v(0)] = \mathcal{F}_1^{-1}\,\mathcal{F}_1\varphi = \varphi.$$

Resulta daí que para demonstrar que γ_0 é uma aplicação sobre é suficiente demonstrar que $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Note-se que sendo

$$\int_0^\infty \exp\big(-2\sqrt{1+||x'||^2}\,x_n\big)\,dx_n = \frac{1}{2\sqrt{1+||x'||^2}}\,,$$

obtém-se:

1. $$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1+||x'||^2)|v(x',x_n)|^2\,dx'dx_n =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+||x'||^2)^{1/2}\,|\mathcal{F}_1\varphi(x')|^2\,dx' = \frac{1}{2}\,||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\,.$$

Também:

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) = -\sqrt{1 + ||x'||^2}\, v(x', x_n)$$

e portanto:

2.
$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx' dx_n =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + ||x'||^2)|v(x', x_n)|\, dx' dx_n = \frac{1}{2}\, ||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\,.$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} w_j(x', x_n) &= i\, x'_j\, v(x', x_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ w_n(x', x_n) &= \tfrac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n), \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} D_j\, u(x', x_n) &= \mathcal{F}_1^{-1}[w_j(x_n)](x'), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ D_n\, u(x', x_n) &= \mathcal{F}_1^{-1}[w_n(x_n)](x'). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{F}_1^{-1}$ uma isometria de $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ sobre $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tem-se:

3.
$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n_+} (|u(x', x_n)|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |D_j\, u(x', x_n)|^2)\, dx' dx_n = \\ &= \int_0^\infty \Big(||v(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} ||\mathcal{F}_1^{-1}[w_j(x_n)]||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \Big) dx_n = \\ &= \int_0^\infty \Big(||v(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} ||w_j(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \Big) dx_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + ||x'||^2)|v(x', x_n)|^2\, dx' dx_n = \frac{1}{2}\, ||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\,. \end{aligned}$$

Tem-se também:

4.
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D_n u(x', x_n)|^2\, dx' dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx' dx_n = \\ &= \frac{1}{2}\, ||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\,. \end{aligned}$$

Das relações 3. e 4. resulta que $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e $||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$. Desta relação e da densidade de $S(\mathbb{R}^{n-1})$ em $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ resulta que γ_0 é sobre.

Resta demonstrar que o núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$. Para tal usa-se o seguinte resultado:

Lema 2.7.1 *Dados $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, tem-se $\gamma_o(\varphi\, u) = (\gamma_0\varphi)(\gamma_0 u)$.*

Demonstração: Observa-se que as aplicações

$$\begin{array}{rclcrcl} \sigma_1 : H^1(\mathbb{R}_+^n) & \to & H^1(\mathbb{R}_+^n) & \text{e} & \sigma_2 : H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) & \to & H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u & \to & \varphi u & & u & \to & (\gamma_0\varphi)u \end{array}$$

são lineares e contínuas, (ver Proposição 2.6.4). Também, o lema é verdadeiro quando $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$.

Seja (φ_k) uma sucessão de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, convergente para u em $H^1(\mathbb{R}_+^n)$. Da continuidade das aplicações σ_1, σ_2 e γ_0, são verdadeiros os seguintes limites na topologia de $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$:

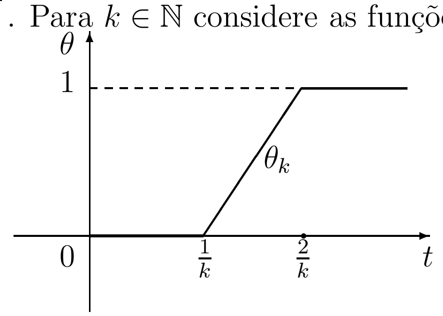
$$(\gamma_0\varphi)(\gamma_0 u) = \lim_{k\to\infty} (\gamma_0\varphi)(\gamma_0\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \gamma_0(\varphi\varphi_k) = \gamma_0(\varphi_u).$$

b) **O espaço $H_0^1(\Omega)$ é o núcleo de** γ_0 – Com efeito, sendo $\gamma_0\, u = 0$ para todo $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$, tem-se $\gamma_0\, u = 0$ para todo $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n) = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)}^{H^1(\mathbb{R}_+^n)}$, o que demonstra estar $H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ contido no núcleo de γ_0.

Considere $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ tal que $\gamma_0\, u = 0$. Será provado que $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$.

Caso 1: $S(u) = \overline{\operatorname{supp} u}^{\mathbb{R}^n}$ é um compacto do $\overline{\mathbb{R}_+^n}$. Para $k \in \mathbb{N}$ considere as funções:

$$\theta_k(t) = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{se} & 0 \le t < \dfrac{1}{k} \\ kt - 1 & \text{se} & \dfrac{1}{k} \le t \le \dfrac{2}{k} \\ 1 & \text{se} & t > \dfrac{2}{k} \end{array} \right.$$



e

$$u_k(x', x_n) = \theta_k(x_n) u(x', x_n), \quad (x', x_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

então supp $(u_k) \subset S(u) \cap \{\mathbb{R}^{n-1} \times [1/k, \infty[\}$, sendo este último um compacto do $\mathbb{R}^n_+$, resulta que u_k é um elemento de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ com suporte compacto contido no $\mathbb{R}^n_+$, logo $u_k \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$. Demonstrando-se que (u_k) converge para u na topologia de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ ficará provado que $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$.

Realmente,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_+} |u_k(x) - u(x)|^2 \, dx \ = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \Big(\int_0^\infty |\theta_k(x_n) u(x', x_n) - u(x', x_n)|^2 \, dx_n \Big) \ = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{1/k} |u(x', x_n)|^2 \, dx_n dx' + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{1/k}^{2/k} |(kx_n - 2)^2 \, |u(x', x_n)|^2 \, dx_n dx',
\end{aligned}$$

logo,

$$||u_k - u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \int_0^{2/k} ||u(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \, dx_n \, ,$$

demonstrando ser a sucessão (u_k) convergente para u em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

Dado $j = 1, 2, \ldots, n-1$ tem-se:

$$D_j u_k(x', x_n) = \theta_k(x_n)(D_j u)(x', x_n).$$

Sendo $D_j u$ um elemento de $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, tem-se que a sucessão $(D_j u_k)$ converge para $D_j u$ na topologia de $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Tem-se também:

$$D_n u_k(x', x_n) = \theta_k(x_n)(D_n u)(x', x_n) + \theta'_k(x_n) u(x', x_n).$$

Sendo $D_n u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ a sucessão de funções dada pela primeira parcela da expressão anterior converge para $D_n u$ em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Observe que $u \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ e $D_n u \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ onde $0 < T < \infty$, portanto $u \in C^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ (ver J.L. Lions [8]). Disto vem que $u(0) = \gamma_0 u = 0$, onde $u(0)(x') = u(x', 0)$, $\ s' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Assim

$$u(x', x_n) = u(x', x_n) - u(x', 0) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} (x', t) \, dt,$$

de onde, aplicando a desigualdade de Schwarz, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
|u(x',x_n)|^2 &\le x_n \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^2 dt \le \\
&\le \frac{2}{k}\int_0^{2/k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^2 dt,
\end{aligned}
$$

para $0 \le x_n \le 2/k$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_+} |\theta_k'(x_n)u(x',x_n)|^2\, dx'dx_n = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{1/k}^{2/k} k^2 |u(x',x_n)|^2\, dx'dx_n \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{1/k}^{2/k} 2k \int_0^{2/k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right| dt\, dx_n dx' = \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{2/k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right| dt dx',
\end{aligned}
$$

provando que $(D_n u_k)$ converge para $D_n u$ em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

Caso 2: Tome $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Seja θ uma função teste no $\mathbb{R}^n$ tal que $\theta(x) = 1$ se $||x|| \le 1$ e $\theta(x) = 0$ se $||x|| \ge 2$, $0 \le \theta(x) \le 1$. Para $k \in \mathbb{N}$ seja $\theta_k(x) = \theta(x/k)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $u_k(x) = \theta_k(x)u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n_+$. Então, (u_k) converge para u na topologia de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Do Lema 2.7.1 resulta que $\gamma_0(u_k) = \gamma(\theta_k)\gamma_0(u) = 0$. Sendo $S(u_k) \subset \text{supp } (\theta_k) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$, do Caso 1 resulta que $u_k \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, logo $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, o que completa a demonstração do teorema de traço no caso $\mathbb{R}^n_+$.

Demonstração do Teorema 2.7.1 quando Ω limitado

a) γ_0 **é uma aplicação sobre** – Dada uma função $w \in H^{1/2}(\Gamma)$, por definição, tem-se que

$$
w_j(y') = \left| \begin{array}{ll} (\sigma_j w)(\varphi_j^{-1}(y',0)) & \text{se} \quad y' \in \Omega_0 =]0,1[^{n-1} \\ 0 & \text{se} \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0 \end{array} \right.
$$

é um objeto de $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ com suporte contido em Ω_0. Seja θ uma função teste no $\mathbb{R}^n$ tal que supp $(\theta) \subset \Omega_0 \times]-1,+1[$ e $\theta(x',0) = 1$ para todo $y' \in$ supp (w_j). Do caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

resulta a existência de $v_j \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ tal que $\gamma_0 v_j = w_j$. Do Lema 2.7.1 obtém-se:

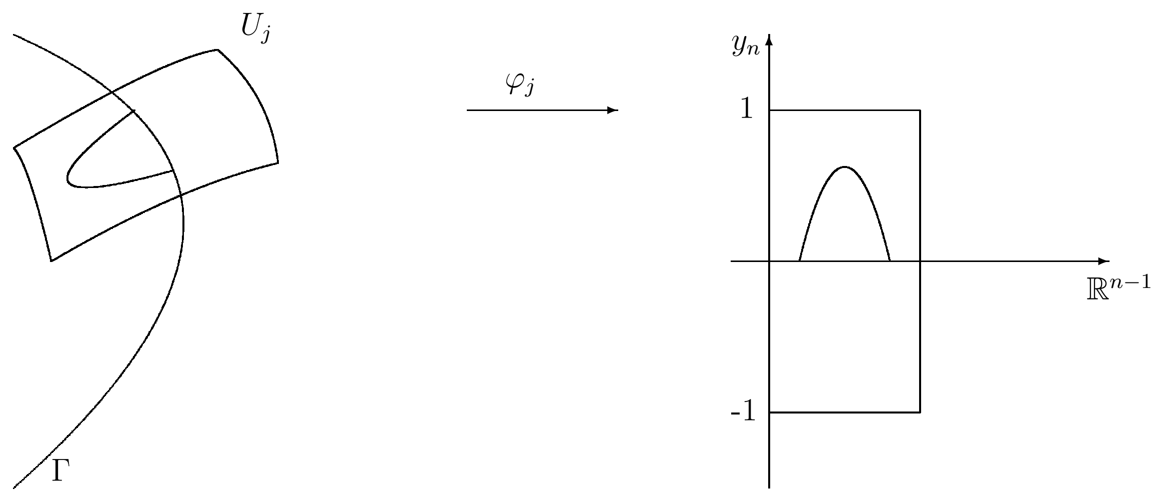
$$\gamma_0(\theta v_j) = (\gamma_0\theta)(\gamma_0 v_j) = (\gamma_0\theta)w_j = w_j$$

(porque $\theta = 1$ em supp $(w_j) \times \{0\}$). Além disso, tem-se:

$$S(\theta v_j) \subset \text{supp }(\theta) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+} \subset \Omega_0 \times [0,1),$$

logo a função definida em Ω por

$$u_j(x) = \left|\begin{array}{ll} (\theta v_j)(\varphi_j(x)) & \text{se} \quad x \in U_j \cap \overline{\Omega} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \overline{\Omega} \backslash (U_j \cap \overline{\Omega}) \end{array}\right.$$



tem suporte compacto em $U_j \cap \overline{\Omega}$, sendo um elemento de $H^1(\Omega)$. Se $x \in U_j \cap \Gamma$ obtém-se:

$$u_j(x) = \gamma_0(\theta v_j)(\varphi_j(x)) = w_j(\varphi_j(x)) = (\sigma_j w)(x)$$

isto é,

$$(\gamma_0 u_j)(x) = \left|\begin{array}{ll} (\sigma_j w)(x) & \text{se} \quad x \in U_j \cap \Gamma \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Gamma, \ \ x \notin U_j \end{array}\right.$$

Da relação anterior e do fato de ser supp $(\sigma_j) \subset U_j$, tem-se que

$$\sum_{j=1}^N \gamma_0 u_j = \sum_{j=1}^N \sigma_j w = \Big(\sum_{j=1}^N \sigma_j\Big) w = w.$$

Sendo $u = \sum_{j=1}^{N} u_j$ tem-se que $u \in H^1(\Omega)$ e $\gamma_0 u = \sum_{j=1}^{N} \gamma_0 u_j = w$.

b) O núcleo de γ_0 é $H_0^1(\Omega)$ - Seja $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que supp $(\sigma) \subset \Omega$ e

$$\sigma(x) + \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Seja $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0 \, u = 0$. Sendo

$$u = \sigma u + \sum_{j=1}^{N} \sigma_j u$$

e σu um vetor de $H^1(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, tem-se que $\sigma u \in H_0^1(\Omega)$. Logo para provar a parte b) é suficiente demonstrar que cada função $\sigma_j u \in H_0^1(\Omega)$. Do Lema 2.7.1 vem que $\gamma_0(\sigma_j u) = \gamma_0(\sigma_j) \cdot \gamma_0 \, u = 0$ (observe que o Lema 2.7.1 também é válido para Ω aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$), da qual por meio de cartas locais e reduzindo ao caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, tem-se que $\sigma_j u \in H_0^1(\Omega)$, $\; j = 1, 2, \ldots, N$, demonstrando que o núcleo de γ_0 está contido em $H_0^1(\Omega)$.

A demonstração de que $H_0^1(\Omega)$ está contido no núcleo de γ_0 é análoga a que foi feito quando $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. $\blacksquare$

Completando o estudo introdutório do traço γ_0 de uma função, a etapa seguinte seria a do estudo do traço de suas derivadas, o que será feito por meio do Teorema 2.7.2, o análogo do Teorema 2.7.1. Antes, porém, será fixada a notação.

Inicia-se com o caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, identificando sua fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ ao $\mathbb{R}^{n-1}$, como já fora feito anteriormente. Seja u uma função definida em uma vizinhança de Γ, possuindo derivadas parciais até a ordem m. Define-se

$$(\gamma_j u)(x') = (D_n^j u)(x', 0) = \gamma_0(D_n^j u)(x')$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ e x' do $\mathbb{R}^{n-1}$, sendo $D_n = \frac{\partial}{\partial x_n} \cdot$ Para $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, representa-se por

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

o espaço de Hilbert

$$H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

no qual $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ é denso.

Teorema 2.7.2 *A aplicação linear*

$$\varphi \to (\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi, \ldots, \gamma_{m-1}\varphi)$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *em* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua* γ *de* $H^m(\Omega)$ *sobre* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *cujo núcleo é o espaço* $H_0^m(\Omega)$. *Tem-se ainda que* γ *possui uma inversa à direita linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear e contínua* θ *de* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *em* $H^m(\Omega)$ *tal que* $\gamma(\theta w) = w$ *para todo* w *em* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Observação 22 *A aplicação* γ *denomina-se traço de ordem* m. *O traço da função é o traço de ordem zero.*

A demonstradoção do Teorema 2.7.2 será feita em três etapas.

Na primeira demonstra-se que a aplicação dada é contínua quando considera-se em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ a topologia de $H^m(\Omega)$. Para isto, basta provar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||\gamma_j u||_{H^{m_j}(\Gamma)} \leq C||u||_{H^m(\Omega)}$$

para todo u em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Continua-se representando por γ_j a extensão de γ_j ao espaço $H^m(\Omega)$.

Na segunda etapa, prova-se que o núcleo de γ é o espaço $H_0^m(\Omega)$. Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $H_0^m(\Omega)$ e $\gamma u = 0$ para todo u em $\mathcal{D}(\Omega)$, restará demonstrar que se $u \in H^m(\Omega)$ e $\gamma_j u = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, então $u \in H_0^m(\Omega)$. Finalmente, na terceira e última etapa da demonstração, constrói-se uma inversa à direita de γ, o que também provará que γ aplica $H^m(\Omega)$ sobre $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Demonstração do Teorema 2.7.2

Primeira Etapa: Da Proposição 2.7.1, decorre a existência de uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$||\gamma_0 u||\_H^{1/2}(\Gamma)^2 \leq C_0 ||u||_{H^1(\Omega)}\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Fixe $j = 1, 2, \ldots, m-1$ e para todo multi-índice $\nu' \in \mathbb{N}^{n-1}$, seja $\nu = (\nu', j) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}, j)$ pertencente a $\mathbb{N}^n$. Seja $\mathcal{F}_1$ a transformada de Fourier no $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Para todo u em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tem-se:

$$|(x')^{\nu'}\, \mathcal{F}_1(\gamma_j u)(x')| = |\mathcal{F}_1(\gamma_0(D^\nu u)(x'))|.$$

Observe-se, também, que se $|\nu'| \leq m - j - 1$, então $|\nu| \leq m - 1$, portanto,

$$||D^\nu u||^2_{H^1(\Omega)} \leq ||u||^2_{H^m(\Omega)}\,.$$

Daí resulta:

$$\begin{aligned}
||\gamma_j u||^2_{H^{m_j}(\Gamma)} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + ||x'||^2)^{\frac{1}{2}} (1 + ||x'||^2)^{m-j-1}\, |\mathcal{F}_1(\gamma_j u)(x')|^2\, dx' \leq \\
&\leq \sum_{|\nu'| \leq m-j-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + ||x'||^2)^{\frac{1}{2}}\, |\mathcal{F}_1(\gamma_0(D^\nu u)(x')|^2\, dx' \leq \\
&\leq C_0 \sum_{|\nu'| \leq m-j-1} ||D^\nu u||^2_{H^1(\Omega)} \leq C ||u||^2_{H^m(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Segunda Etapa: Para provar que $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$ serão salientados certos resultados enunciados e provados sob a forma de lema.

Lema 2.7.2 *Se $u \in H^m(\Omega)$ e $\gamma_0\, u = \gamma_1\, u = \ldots = \gamma_{m-1} u = 0$, então*

$$|u(x'.x_n)|^2 \leq \left(\frac{2}{k}\right)^{2m-1} \int_0^{\frac{2}{k}} |D_n^m\, u(x', t)|^2\, dt,$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $0 \leq x_n \leq \dfrac{2}{k}\cdot$

Demonstração: O caso $m = 1$ foi anteriormente demonstrado (ver Caso 1 do Teorema 2.7.1). Suponha o Lema 2.7.2 verdadeiro para $m \geq 1$ e seja $u \in H^{m+1}(\Omega)$ tal que

$\gamma_0\, u = \gamma_1\, u = \ldots = \gamma_{m-1} u = \gamma_m\, u = 0$. Sendo $\gamma_i(D_m u) = \gamma_{i+1}\, u = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, m-1$ e $D_n u \in H^m(\Omega)$, da hipótese indutiva vem:

$$|(D_n v)(x', t)|^2 \leq \left(\frac{2}{k}\right)^{2m-1} \int_0^{\frac{2}{k}} |D_n^{m+1}\, u(x', s)|^2\, ds$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $0 \leq t \leq \dfrac{2}{k} \cdot$ Resulta, também,. do caso $m = 1$ que

$$\begin{aligned} |u(x', x_n)|^2 &\leq \left(\frac{2}{k}\right) \int_0^{\frac{2}{k}} |D_n u(x', t)|^2\, dt \leq \\ &\leq \left(\frac{2}{k}\right)^{2m+1} \int_0^{\frac{2}{k}} |(D_n^{m+1}\, u)(x', s)|^2\, ds, \end{aligned}$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $0 \leq x_n \leq \dfrac{2}{k} \cdot$ ■

Lema 2.7.3 *Dado um inteiro positivo p, seja $\theta \in C^p(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \theta(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\theta(t) = 0$ se $t \leq 1$ e $\theta(t) = 1$ se $t \geq 2$. Para todo $k = 1, 2, \ldots$, seja $\theta_k(t) = \theta(kt)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então:*

a) Se $u \in L^2(\Omega)$ seja $u_k(x) = \theta_k(x_n) u(x)$ para $x \in \Omega$, resulta que (u_k) converge para u em $L^2(\Omega)$.

b) Se $u \in H^p(\Omega)$ e $\gamma_0\, u = \gamma_1\, u = \ldots = \gamma_{p-1} u = 0$, então a sucessão (v_k) converge para zero em $L^2(\Omega)$, onde v_k é dada por:

$$v_k(x) = \theta_k^{(p)}(x_n) u(x), \quad x \in \Omega.$$

Demonstração: A primeira parte é uma conseqüência direta do teorema de Lebesgue sobre convergência dominada. Para demonstrar a parte b), considere-se $M > 0$ tal que $|\theta^{(p)}(t)| \leq M, \quad t \in \mathbb{R}$. Usando o Lema 2.7.2 obtém-se:

$$||v_k||^2_{L^2(\Omega)} \leq M \int_0^{\frac{2}{k}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D_n^p\, u(x', t)|^2\, dx' dt,$$

o que prova ser (v_k) convergente para zero em $L^2(\Omega)$.

Prova-se, a seguir, que $\gamma^{-1}(0) \subset H_0^m(\Omega)$. Seja $\theta \in C^m(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \theta(t) \leq 1$, $\theta(t) = 0$ se $t \leq 1$ e $\theta(t) = 1$ se $t \geq 2$. Considere-se $u \in H^m(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = \gamma_1 u = \ldots = \gamma_{m-1} u = 0$. Se $\theta_k(t) = \theta(kt) \quad k = 1, 2, \ldots$ e $t \in \mathbb{R}$, seja

$$u_k(x', x_n) = \theta_k(x_n) u(x', x_n), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n > 0.$$

Dado α em $\mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq m$, sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0),\ j = \alpha_n$. No caso $j = 0$ tem-se:

$$(D^\alpha u_k)(x', x_n) = \theta_k(x_n)(D^\alpha u)(x', x_n),$$

portanto, $(D^\alpha u_k)$ converge para $D^\alpha u$ em $L^2(\Omega)$ (consulte Lema 2.7.3).

No caso $0 < j \leq m$, tem-se:

$$(D^\alpha u_k)(x) = \theta_k(x_n)(D^\alpha u)(x) + \sum_{p=1}^{j} \binom{j}{p} \theta_k^{(p)}(x_n)(D_n^{j-p} D^{\alpha'} u)(x).$$

Para continuar a demonstração, admite-se o seguinte resultado, o qual será provado ao final da segunda etapa.

Lema 2.7.4 *Seja $q > 1$ um inteiro. Então*

$$D^\alpha(\gamma_i \varphi) = \gamma_i(D^\alpha \varphi)$$

para toda $\varphi \in H^q(\Omega),\ \ i = 0, 1, \ldots, q-1,\ \ \alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| + i \leq q - 1,\ \ \alpha_n = 0$.

Admitindo o Lema 2.7.4, obtém-se que $\gamma_i(D_n^{j-p} D^{\alpha'} u) = 0$, para $p = 1, 2, \ldots, j$ e $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Usando este resultado e o do Lema 2.7.3 decorre que a segunda parcela que aparece na expressão para $D^\alpha u_k$ converge para zero em $L^2(\Omega)$. Logo, a sucessão $(D^\alpha u_k)$ converge para $D^\alpha u$ em $L^2(\Omega)$. Resulta, daí, que a sucessão (u_k) converge para u em $H^m(\Omega)$.

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(x) = 1$ se $||x|| \leq 1$ e $\varphi(x) = 0$ se $||x|| \geq 2$. Para todo $p = 1, 2, \ldots$ seja $u_{k,p}(x) = \varphi\Big(\dfrac{x}{p}\Big) u_k(x)$, para $x \in \mathbb{R}^n_+$. Então $u_{k,p}$ é um vetor de $H^m(\Omega)$ com suporte em Ω, logo, $u_{k,p} \in H_0^m(\Omega)$. Sendo $u_{k,p}$ convergente para u_k em $H^m(\Omega)$, quando p tende para o infinito, conclui-se que $u_k \in H_0^m(\Omega)$, logo $u \in H_0^m(\Omega)$.

Resta, para completar a demonstração da segunda etapa, provar o Lema 2.7.4, o que será feito a seguir.

Para demonstrar o Lema 2.7.4, suponha que ele seja verdadeiro para φ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Dado v em $H^q(\Omega)$, seja (φ_j) uma sucessão de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ convergente para v em $H^q(\Omega)$. Logo, $(\gamma_i\varphi_j)$ converge para $\gamma_i v$ em $H^{q-i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, e como por hipótese $|\alpha| \leq q-i-1 \leq q-i-\frac{1}{2}$, tem-se:

$$D^\alpha(\gamma_i\varphi_j) \quad \text{converge para} \quad D^\alpha(\gamma_i v)$$

em $H^s(\Gamma)$, $s = q-|\alpha|-i-\dfrac{1}{2}\cdot$ Tem-se, também $(D^\alpha\varphi_j)$ convergente para $D^\alpha v$ em $H^{q-|\alpha|}(\Omega)$, portanto:

$$\gamma_i(D^\alpha\varphi_j) \quad \text{converge para} \quad \gamma_i(D^\alpha v)$$

em $H^s(\Gamma)$. Conclui-se que $\gamma_i(D^\alpha v) = D^\alpha(\gamma_i v)$ como se desejava provar.

Terceira Etapa: Deduz-se o argumento descrito para esta etapa, como nas anteriores, por meio de lemas.

Lema 2.7.5 *Para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, vale a seguinte relação:*

$$\mathcal{F}_1(\gamma_j u)(x') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (it)^j (\mathcal{F}u)(x', t)\, dt,$$

para x' no $\mathbb{R}^{n-1}$, sendo $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier no $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Represente por $\widetilde{\mathcal{F}}$ e $\widetilde{\mathcal{F}}_1$, respectivamente, as transformadas de Fourier inversas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$. Sendo $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}u) = u$, obtém-se:

$$u(x', x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{\mathbb{R}} e^{i\{(x',y')+x_n y_n\}}\, (\mathcal{F}u)(y', y_n)\, dy_n\,.$$

Fazendo

$$w(x') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (it)^j\, (\mathcal{F}u)(x', t)\, dt,$$

obtém-se, da última expressão:

$$\begin{aligned}
&(\gamma_j u)(x') = (D_n^j u)(x',0) \, = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{\mathbb{R}} (iy_n)^j \, e^{i(x',y')} \, (\mathcal{F}u)(y',y_n) \, dy_n \, = \\
&= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x',y')} \, w(y') \, dy' = (\widetilde{\mathcal{F}} w)(x'),
\end{aligned}$$

de onde resulta $\mathcal{F}_1(\gamma_j u) = w$, como se deseja demonstrar.

Prova-se, a seguir, que existe uma aplicação linear

$$\Lambda \colon (\mathcal{D}(\Gamma))^m \to H^m(\Omega),$$

contínua relativamente à topologia de $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, tal que $\gamma\Lambda\varphi = \varphi$ para todo φ em $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$. Provada esta afirmativa, usa-se a densidade de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ para estender Λ a este último espaço, sendo, obviamente, tal extensão, linear, contínua e uma inversa à direita de γ. Dado $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1})$ em $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ e para $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, considere-se

$$a_j = \int_{\mathbb{R}} t^{2j} \, (1+t^2)^{-(m+j)} \, dt$$

e

$$v_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \, a_j i^j} \, \frac{(1+||x'||^2)^{m-\frac{1}{2}}}{(1+||x'||^2)^{m+j}} \, x_n^j (\mathcal{F}_1 w_j)(x'),$$

sendo $x = (x', x_n)$ no $\mathbb{R}^n$.

Da escolha de a_j resulta:

1. $$(2\pi)^{-\dfrac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (it)^j \, v_j(x',t) \, dt = (\mathcal{F}_1 w_j)(x')$$

e fazendo a mudança de variáveis $x_n = ht(1+||x'||^2)^{1/2}$ segue

2. $$\int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^m \left| v_j\Big(x', \frac{x_n}{h}\Big) \right|^2 dx \leq C ||w_j||^2_{H^{m_j}(\Gamma)} \, ,$$

para todo $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, sendo C uma constante independente de $w \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $h = 1, 2, \ldots, m$.

Sejam C_{hj} $(h = 1, 2, \ldots, m,\ j = 0, 1, \ldots, m-1)$, números reais tais que:

3. $$\sum_{h=1}^{m} C_{hk}\, h^{j+1} = \delta_{jk} = \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{se} & j = k \\ 0 & \text{se} & j \neq k \end{array} \right. .$$

Considere $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ definida por

4. $$u(x) = u(x', x_n) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{h=1}^{m} C_{hk}\, v_k\Big(x', \frac{x_n}{h}\Big),$$

5. $$\Lambda w = \widetilde{\mathcal{F}} u \mid \Omega.$$

De 2. decorre que $\widetilde{\mathcal{F}} u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, logo $\Lambda w \in H^m(\Omega)$ e, além disso,

$$||\Lambda w||_{H^m(\Omega)} \leq C ||w||_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} .$$

Conclui-se, deste modo, que Λ é uma aplicação linear e contínua de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$, com a topologia $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, em $H^m(\Omega)$. 0 Provar-se-á que $\gamma \Lambda w = w$ ou, equivalentemente, que $\mathcal{F}_1(\gamma_j \Lambda w) = \mathcal{F}_1 w_j$, para $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(\gamma_j \Lambda w)(x') &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (it)^j\, u(x', t)\, dt = \qquad \text{(Lema 2.7.4)} \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{h=1}^{m} C_{hk} \int_{\mathbb{R}} (it)^j\, v_k\Big(x', \frac{t}{h}\Big)\, dt \ = \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{m-1} \Big\{ \sum_{h=1}^{m} C_{hk}\, h^{j+1} \Big\} \int_{\mathbb{R}} (it)^j\, v_k(x', t)\, dt \ = \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (it)^j\, v_j(x', t)\, dt = (\mathcal{F}_1 w_j)(x'),
\end{aligned}$$

concluindo, assim, a demonstração do Teorema 2.7.2. ■

Considere, agora, Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ bem regular, e seja ν a normal unitária exterior em Γ. Escolhe-se um sistema de cartas locais

$$\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \ldots, (U_N, \varphi_N)\}$$

de Γ e funções testes no $\mathbb{R}^n$, $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N$ tais que

$$\text{supp}\,(\sigma_0) \subset \Omega, \quad \text{supp}\,(\sigma_j) \subset U_j\,, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \sum_{j=0}^{N} \sigma_j(x) = 1$$

para x em $\overline{\Omega}$, de modo que para toda função u definida em Γ e $j = 1, 2, \dots, N$ vale a seguinte relação:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\, u_j\Big)(\varphi_j^{-1}(y')) = -\frac{\partial}{\partial x_n}\,\{u_j \cdot \varphi_j^{-1}\}\,(y', 0), \quad y' \in \Sigma_0\,,$$

sendo $u_j = \sigma_j u$ e $\Sigma_0 = \{(y', 0) \mid 0 \le y_i \le 1,\ i = 1, 2, \dots, n\}$. A existência das cartas locais $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \dots, (U_N, \varphi_N)\}$ verificando a última igualdade está garantida pela noção de vizinhança tubular, ver M.P. do Carmo [20].

Para todo $j = 1, 2, \dots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Gamma$ a derivada normal de ordem j de u e $\gamma_0\, u = u|\_\Gamma$. Do Teorema 2.7.2 e com auxílio do sistema de cartas locais, obtém-se o seguinte resultado para o caso de um aberto limitado Ω com fronteira bem regular Γ.

Teorema 2.7.3 *Existe uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ com núcleo $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, verificando a seguinte condição:*

$$\gamma u = (\gamma_0 u,\, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u), \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Tal aplicação admite uma inversa à direita linear e contínua.

Observação 23 *O Teorema 2.7.3 é válido para Ω limitado do $\mathbb{R}^n$ com Ω de classe C^{m+1}. Este fato decorre da demonstração do teorema.*

Corolário 12 *Seja $u \in L^2(\Omega)$, Ω aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$, tal que $\tilde{u}$, prolongamento de u ao $\mathbb{R}^n$ nulo fora de Ω, esteja em $H^m(\mathbb{R}^n)$. Então u pertence a $H_0^m(\Omega)$.*

Demonstração: Seja (φ_k) uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$ convergente para $\tilde{u}$ em $H^m(\mathbb{R}^n)$. Considere um aberto limitado U do $\mathbb{R}^n$, bem regular, tal que

$$U \subset \mathcal{C}\overline{\Omega} \quad \text{e} \quad \Gamma = \partial\Omega \subset \partial U = \Sigma.$$

Sem perda de generalidade pode-se supor que $\varphi_k(x) = 0$ se $x \in \Sigma\backslash\Gamma$, $k = 1, 2, \dots$. Sendo $(r_\Omega\varphi_k)\_k \in \mathbb{N}$ e $(r_U\varphi_k)\_k \in \mathbb{N}$ sucessões de vetores de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e $\mathcal{D}(\overline{U})$, respectivamente, e $r\_\Omega\tilde{u} = u$, $r\_U\tilde{u} = 0$, temos as seguintes convergências:

$$\begin{array}{lll} r_\Omega\varphi_k & \text{converge para} \quad u \quad \text{em} & H^m(\Omega) \\ r_U\varphi_k & \text{converge para zero em} & H^m(\Sigma), \end{array}$$

portanto,

$$\gamma_j u = \lim_{k\to\infty} \gamma_j(r_\Omega\varphi_k) \quad \text{em} \quad H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$
$$0 = \lim_{k\to\infty} \gamma_j(r_U\varphi_k) \quad \text{em} \quad H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Sigma), \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Sendo

$$\gamma_j(r_U\varphi_k) = \frac{\partial^j\varphi_k}{\partial\nu^j}\Big|_\Sigma = \left| \begin{array}{ll} \gamma_j(r_\Omega\varphi_k) & \text{em} \quad \Gamma \\ 0 & \text{em} \quad \Sigma\backslash\Gamma \end{array} \right. ,$$

conclui-se que $\gamma_j u = 0$ para $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$, logo $u \in H_0^m(\Omega)$.

Observação 24 *O Corolário 12 também é verdadeiro no caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, sendo análoga a demonstração. Basta considerar*

$$U = \mathbb{R}^n_- = \{(x', x_n) \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n < 0\}.$$

2.8 Traço da Derivada Normal

Tome-se $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira bem regular, com normal externa ν, de tal modo que a fórmula de Green

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_\Gamma \Big(v\,\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\,\frac{\partial v}{\partial\nu}\Big) d\Gamma,$$

seja verdadeira para todo par u, v de funções de $C^2(\overline{\Omega})$.

Nesta seção prova-se que tomando u num espaço conveniente, fixado posteriormente, resulta que o traço da derivada normal de u, isto é, o traço de $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ pertence a determinado espaço de Sobolev $H^{-s}(\Gamma)$, $s > 0$. Este resultado é fundamental quando se estuda um problema de contorno cujo dado na fronteira é a derivada normal, como o problema de Neumann ou com vínculos unilaterais como problema de Signorini.

Considere o espaço vetorial $\mathcal{H}^0(\Omega)$ dado por:

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Definindo em $\mathcal{H}^0(\Omega)$ o produto escalar

$$(u, v)_{\mathcal{H}^0} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}\,,$$

para todo par $u, v \in \mathcal{H}^0$, resulta que ele é um espaço de Hilbert.

Proposição 2.8.1 $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *é denso em* $\mathcal{H}^0$.

Demonstração: Dado um vetor u_0 de $\mathcal{H}^0(\Omega)$ ortogonal a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, devemos provar que $u_0 = 0$. Para tal, consideremos $u_1 = \Delta u_0$. As extensões $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ de u_0 e u_1 nulas, respectivamente, fora de Ω, pertencem ao espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. Prova-se que $\tilde{u}_1 \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Calcula-se $\Delta\tilde{u}_1$ no sentido das distribuições. De fato, se φ pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sua restrição Ω, isto é, $\tilde{v} = r_\Omega \varphi$, pertence a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, logo:

$$\begin{aligned}\langle \Delta\tilde{u}_1, \varphi\rangle &= \int_\Omega u_1(x)\Delta\varphi(x)\,dx = (\Delta u_0, \Delta\tilde{v})_{L^2(\Omega)} = \\ &= (u_0, \tilde{v})_{\mathcal{H}^0} - (u_0, \tilde{v})_{L^2(\Omega)} = \langle -\tilde{u}_0, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Conclui-se que $\Delta\tilde{u}_1 = -\tilde{u}_0$, logo pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$, portanto

$$(1 + ||x||^2)\mathcal{F}\tilde{u}_1 = \mathcal{F}(\Delta\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

de onde resulta que $\tilde{u}_1 \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Do Corolário 12 resulta que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Para todo v em $\mathcal{H}^0(\Omega)$ e φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, obtém-se:

$$(\Delta v, \varphi)_{L^2(\Omega)} = \langle \Delta v, \bar{\varphi}\rangle = \langle v, \Delta\bar{\varphi}\rangle = (v, \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H_0^1(\Omega)$ e u_1 um vetor deste espaço, tem-se:

$$(\Delta v, u_1)_{L^2(\Omega)} = (v, \Delta u_1)_{L^2(\Omega)} = -(v, u_0)_{L^2(\Omega)}$$

para todo v em $\mathcal{H}^0(\Omega)$. Resulta daí que

$$(v, u_0)_{\mathcal{H}^0} = (v, u_0)_{L^2(\Omega)} + (\Delta v, u_1)_{L^2(\Omega)} = 0$$

para todo $v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$, logo $u_0 = 0$.

Observação 25 *Quando considera-se $H^s(\Gamma)$, $s > 0$, como espaço normado real, representa-se por $H^{-s}(\Gamma)$ o dual forte de $H^s(\Gamma)$. No caso complexo, dado $f \in (H^s(\Gamma))'$, dual forte de $H^s(\Gamma)$, define-se o funcional conjugado $\bar{f}$ por $\langle \bar{f}, u\rangle = \overline{\langle f, u\rangle}$ para u em $H^s(\Gamma)$. Neste caso, considera-se como $H^{-s}(\Gamma)$ o espaço vetorial constituído dos $\bar{f}$ tais que $f \in (H^s(\Gamma))'$, munido da norma:*

$$||\bar{f}||_{H^{-s}(\Gamma)} = \sup_{||u||=1} |\langle f, u\rangle|.$$

Note-se que $L^2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-s}(\Gamma)$ sendo a inclusão considerada no sentido seguinte: se $f \in L^2(\Gamma)$, identifica-se f ao funcional $\langle f, u\rangle = (f, u)_{L^2(\Gamma)}$, sendo $u \in H^s(\Gamma)$. Em particular, se $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, então $\gamma_0\, u$, $\gamma_1\, u$ podem ser considerados como vetores de $H^{-s}(\Gamma)$ para todo $s > 0$.

Teorema 2.8.1 *A aplicação*

$$u \to (\gamma_0\, u, \gamma_1\, u)$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear e contínua de $\mathcal{H}^0(\Omega)$ em $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$.

Demonstração: Seja γ o traço de ordem dois em Ω. Foi demonstrada a existência de uma aplicação linear e contínua T de $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ em $H^2(\Omega)$ tal que $\gamma\, Tw = w$ para todo w em $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Fixemos u em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e seja M o funcional definido em $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ por

$$Mw = (\Delta u, Tw)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta Tw)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Representando-se por $C > 0$ a norma de T como objeto de $\text{Ł}(H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma), H^2(\Omega))$, obtém-se:

$$|Mw| \leq 2C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)}\,||w||_{H^{3/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}$$

para todo $w \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Da fórmula de Green mencionada no início desta seção, verdadeira para todo v em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$; sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^2(\Omega)$ e os traços γ_0 , γ_1 contínuos de $H^2(\Omega)$ em $L^2(\Gamma)$, tem-se:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (\gamma_1 u, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} - (\gamma_0 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)}$$

para todo v em $H^2(\Omega)$. Dado $w = (w_0, w_1)$ em $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, considere-se $v = Tw$, sendo $\gamma_0 v = w_0$ e $\gamma_1 v = w_1$. Combinando a fórmula de Green anterior e a definição de M, obtém-se a seguinte expressão:

$$M(w_0, w_1) = \langle \gamma_1 u, w_0 \rangle - \langle \gamma_0 u, w_1 \rangle$$

para todo $w_0 \in H^{3/2}(\Gamma)$ e $w_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$. Resulta, portanto,

$$|\langle \gamma_1 u, w_0 \rangle| = |M(w_0, 0)| \leq 2C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)} + ||w_0||_{H^{3/2}(\Gamma)}$$
$$|\langle \gamma_0 u, w_1 \rangle = |M(0, w_1)| \leq 2C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)} + ||w_1||_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

Daí obtém-se:

$$||\gamma_1 u||_{H^{-3/2}(\Gamma)} \leq 2C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)}$$
$$||\gamma_0 u||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq 2C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)}$$

Portanto, das desigualdades anteriores e da Proposição 88, conclui-se a demonstração do teorema. ■

2.9 Fórmula de Green

Para todo u em $\mathcal{H}^0(\Omega)$ e v em $H^2(\Omega)$ é verdadeira a Fórmula de Green:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_o v\rangle - \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ representa sempre dualidades. A demonstração resulta diretamente da fórmula de Green para funções de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e do Teorema 2.8.1. Observe que $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle$ representa o valor do funcional $\gamma_1 u \in H^{-3/2}(\Gamma)$ no vetor $\gamma_0 v \in H^{3/2}(\Gamma)$, o que por abuso de notação também escreve-se:

$$\int_\Gamma \bar{v}\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma,$$

embora $\gamma_1 u$ não pertença a $L^2(\Omega)$.

Exercício 1. Considere $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ e seja Λ a transformação linear descrita na terceira etapa da demonstração do Teorema 2.7.2. Considere $n = 2$ e prove que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||\Lambda(w_0, 0)||_{H^1(\Omega)} \leq C||w_0||_{H^{1/2}(\Gamma)}\,, \qquad \forall\, w_0 \in \mathcal{D}(\Gamma).$$

Exercício 2. No caso geral, Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular, prove que se γ for a função traço de ordem dois em Ω, existe uma inversa à direita T de γ e $C_0 > 0$ tais que:

$$||T(w_0, 0)||_{H^1(\Omega)} \leq C_0||w_0||_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

para todo $w_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Proposição 2.9.1 *Se $u \in \mathcal{H}^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, então $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Considerando $\mathcal{H}^1(\Omega)$ com a norma*

$$||u||^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = ||u||^2_{H^1(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}\,,$$

a aplicação γ_1 é contínua de $\mathcal{H}^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ em $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Demonstração: Observe, inicialmente, que para todo $u \in H^1(\Omega)$ e v em $H^2(\Omega)$ vale a fórmula de Gauss ou primeira fórmula de Green:

$$(u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (\gamma_0 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i v)_{L^2(\Omega)} \,.$$

Se $u \in \mathcal{H}^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$, seja $v = T(\varphi, 0) \in H^2(\Omega)$. Então $\gamma_o v = \varphi, \ \ \gamma_1 v = 0$ e $||v||_{H^1(\Omega)} \leq C_0 ||\varphi||_{H^{1/2}(\Gamma)}$. Daí, da fórmula de Green e do caso em que as funções pertencem a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1 u, \varphi \rangle &= (\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} \ = \\ &= (\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i v)\_L^2(\Omega) \,. \end{aligned}$$

Resulta, portanto que

$$\begin{aligned} |\langle \gamma_1 u, \varphi \rangle| &\leq ||u||_{\mathcal{H}^0 \cap H^1(\Omega)} \, ||v||_{H^1(\Omega)} \ \leq \\ &\leq C_0 ||u||_{\mathcal{H}^0 \cap H^1(\Omega)} \, ||\varphi||_{H^1(\Omega)} \,, \end{aligned}$$

provando a proposição. ■

A Proposição 2.9.1 é um caso particular de um resultado geral que será mostrado no Capítulo 3.

Capítulo 3

Problemas Elíticos não Homogêneos

3.1 Introdução

No presente capítulo será feito um estudo introdutório dos problemas elíticos não homogêneos. Embora limitando-se ao caso do Laplaciano, $-\Delta$, o método é geral podendo ser adaptado a operadores elíticos mais gerais.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular. Representa-se por γ_0 e γ_1, respectivamente, os traços em $H^m(\Omega)$ da função u e de sua derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\cdot$ Note-se que ν é o vetor unitário da normal externa a Γ.

Pretende-se analisar os seguintes problemas de contorno:

$$(P_1) \quad \left| \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \qquad\qquad (P_2) \quad \left| \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h & \text{sobre } \Gamma \end{array} \right.$$

O problema (P_1) denomina-se de Dirichlet e o (P_2) de Neumann.

Inicia-se estudando determinado espaço de Hilbert Y que desempenha pepel fundamental no que se segue. Realmente, define-se

$$Y = \{u \in L^2; \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\},$$

munido do produto escalar

$$(u,v)_Y = (u,v) + (\Delta u, \Delta v)_{H^{-1}(\Omega)}\,,$$

com o qual Y é um espaço de Hilbert. Como foi estabelecido nos capítulos anteriores, (u,v), $|u|$ e $((u,v))$, $||u||$ denotarão o produto escalar e norma dos espaços $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ respectivamente.

Observação 26 *Considere-se a aplicação:*

$$-\Delta\colon H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$$

e seja

$$G = (-\Delta)^{-1}\colon H^{-1}(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega).$$

Dados os vetores $u, v \in H^{-1}(\Omega)$*, define-se a forma bilinear* $[\,,\,]$ *em* $H^{-1}(\Omega)$ *por:*

$$[u,v] = \langle Gu, v\rangle_{H_0^1(\Omega)\cdot H^{-1}(\Omega)} = ((Gu, Gv)).$$

Segue-se que $[\,,\,]$ *é um produto escalar em* $H^{-1}(\Omega)$*. O produto escalar definido em* Y *é derivado do produto escalar em* $L^2(\Omega)$ *em* $H^{-1}(\Omega)$ *por* $[\,,\,]$*.* $\blacksquare$

A próxima etapa consiste em definir o traço γ_0 para objetos de Y. Segue um método análogo ao adotado no Capítulo 2 para se definir o traço em $\mathcal{H}^0(\Omega)$. Consulte-se a notação alí empregada.

Proposição 3.1.1 $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *é denso em* Y*.*

Demonstração: Embora semelhante a feita para $\mathcal{H}^0(\Omega)$ no Capítulo 2, será feita sucintamente. Tem-se que Y é um subespaço de Hilbert de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Considere uma forma linear contínua $M\colon Y \to \mathbb{R}$. Se $\langle M, \varphi\rangle = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ implicar $M = 0$, resulta que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em Y. É conseqüência do teorema de Hahn-Banach. Seja $\widetilde{M}$ a extensão de

M ao espaço $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Resulta da Observação 1 e do Teorema de Riesz-Frechet que existe $\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle \widetilde{M}, \xi \rangle = (f, \xi_1) + \langle h, \xi_2 \rangle_{H_0^1(\Omega) \cdot H^{-1}(\Omega)},$$

para todo $\xi = \{\xi_1, \xi_2\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Em particular, se $u \in Y$ obtém-se:

$$\langle M, u \rangle = (f, u) + \langle h, \Delta u \rangle_{H_0^1(\Omega) \cdot H^{-1}(\Omega)}. \tag{3.1.1}$$

Sejam $\tilde{f}$, $\tilde{h}$ extensões de f e h nulas no complemento de Ω em relação ao $\mathbb{R}^n$. Obtém-se:

$$\langle \tilde{f} + \Delta\tilde{h}, \varphi \rangle = (\tilde{f}, \varphi) + \langle \Delta\tilde{h}, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Daí, de (3.1.1) e da hipótese $\langle M, \varphi \rangle = 0$, resulta que

$$\tilde{f} + \Delta\tilde{h} = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{3.1.2}$$

Sendo $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ obtém-se $\Delta\tilde{h} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $\tilde{h}$ e $\Delta\tilde{h}$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$, portanto por transformada de Fourier, resulta que $\tilde{h} \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Sendo Ω regular, obtém-se $h \in H_0^2(\Omega)$.

Seja (φ_μ) uma sucessão com $\varphi_\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\varphi_\mu \to h \quad \text{em} \quad H_0^2(\Omega).$$

Para $u \in Y$ resulta:

$$\langle \varphi_\mu, \Delta u \rangle_{H_0^1(\Omega) \cdot H^{-1}(\Omega)} = (\Delta\varphi_\mu, u).$$

Logo, quando $\mu \to \infty$ obtém-se:

$$\langle h, \Delta u \rangle_{H_0^1(\Omega) \cdot H^{-1}(\Omega)} = (\Delta h, u).$$

Substituindo em (3.1.1) resulta:

$$\langle M, u \rangle = (f, u) + (\Delta h, u) = (f + \Delta h, u) = 0$$

para todo $u \in Y$, isto é, $M = 0$. $\blacksquare$

Considere a aplicação T definida por:

$$H^{3/2}(\Gamma) \cdot H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

tal que $\{0, w\} \to v$. Ela é linear e contínua.

Para todo $u \in Y$ e $w \in H^{1/2}(\Gamma)$, considere-se a função numérica Su definida por:

$$\langle Su, w \rangle = (u, \Delta Tw) - \langle \Delta u, Tw \rangle_{H^{-1}(\Omega) \cdot H_0^1(\Omega)} \,. \tag{3.1.3}$$

Tem-se que Su é uma forma linear em $H^{1/2}(\Omega)$ para cada $u \in Y$. Prova-se que Su é contínua. De fato, tem-se:

$$\begin{aligned}
&|\langle Su, w \rangle| \leq |u| \, |\Delta Tw| + ||\Delta u||_{H^{-1}(\Omega)} \, ||Tw|| \leq \\
&\leq \left(|u|^2 + ||\Delta u||^2_{H^{-1}(\Omega)} \right)^{1/2} \left(|\Delta Tw|^2 + ||Tw||^2 \right) \leq \\
&\leq C ||u||_Y \, ||Tw||_{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \leq C ||T|| \, ||u||_Y \, ||w||_{H^{1/2}(\Gamma)} \,.
\end{aligned}$$

Conclui-se que a forma linear Su é contínua em $H^{1/2}(\Gamma)$, logo um objeto de $H^{-1/2}(\Gamma)$. Tem-se, também,

$$||Su||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C ||T|| \, ||u||_Y \,. \quad \blacksquare$$

No que se segue dar-se-á sentido ao traço γ_0 de um objeto de Y. Realmente, seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ sendo $v = Tw \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Devido à Fórmula de Green, resulta:

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle = (u, \Delta v) - (\Delta u, v) \tag{3.1.4}$$

e γ_0 em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é uma forma linear contínua na norma de Y. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em Y, resulta que a forma linear contínua γ_0 possui uma única extensão, por continuidade, a Y, representada também por γ_0. Diz-se que esta extensão γ_0 é o traço de ordem zero em Y. Sendo $v = Tw$, resulta de (3.1.4) que:

$$\langle \gamma_0 u, w \rangle = (u, \Delta Tw) - \langle \Delta u, Tw \rangle_{H^{-1}(\Omega) \cdot H_0^1(\Omega)} \,,$$

que comparando com (3.1.3) resulta que para todo $u \in Y$ tem-se $\gamma_0 u \in T^{-1/2}(\Gamma)$. $\blacksquare$

Um resumo do exposto vem dado no seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 *A aplicação linear*

$$u \in Y \mapsto \gamma_o u \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

é contínua e é válida a fórmula de Green

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle = (u, \Delta v) - \langle \Delta u, v \rangle, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad \blacksquare$$

A seguir estuda-se o Problema (P$_1$) com diferente escolha de regularidade para os dados f e g.

3.2 Problema de Dirichlet

Reescrevendo, tem-se:

$$(P_1) \qquad \left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = g \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array} \right.$$

Considere f e g não regulares. Uma das primeiras dificuldades que aparece no estudo de (P$_1$) nesse caso é definir uma solução u do problema.

Deduz-se, de forma heurística, uma definição de solução de u de (P$_1$) quando f e g são não regulares. Claro está que uma das dificuldades é precisar em que espaços devem habitar f e g. Nesta parte é que serão utlizados os resultados obtidos na Introdução.

Formalmente, obtém-se:

$$\int_\Omega (-\Delta u) v\, dx = \int_\Omega u(-\Delta v)\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\, d\Gamma + \int_\Gamma u\, \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\Gamma$$

e levando em consideração (P$_1$), resulta

$$\int_\Omega u(-\Delta v)\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx - \int_\Gamma g\, \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\, d\Gamma.$$

Como não se tem nenhuma informação sobre $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$ é natural supor que $v|_\Gamma = 0$. Portanto

$$\int_\Omega u(-\Delta v)\,dx = \int_\Omega f v\,dx - \int_\Gamma g\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Gamma \quad \text{com} \quad v|_\Gamma = 0.$$

É natural considerar $u \in L^2(\Omega)$. Com esta hipótese, o primeiro membro da última igualdade só faz sentido se $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Isto e a primeira restrição sobre v implicam que $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, que por sua vez acarreta, $\gamma_1 v \in H^{1/2}(\Gamma)$. Portanto, no termo $\displaystyle\int_\Gamma g\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Gamma$ pode-se escolher $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Do exposto vem

$$(u, -\Delta v) = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) H^{1/2}(\Gamma)}\,, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Falta precisar em que espaço deve estar f. Se na última igualdade se tomar $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ resulta

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

isto é, $-\Delta u = f$. Então o Problema (P_1) com $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ terá um sentido, isto é, $\gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$, se por exemplo $f \in H^{-1}(\Omega)$ (ver Teorema 3.1.1 da Introdução).

O exposto motiva a seguinte definição: Sejam

$$f \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad g \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Uma função $u \in L^2(\Omega)$ que verifica

$$(u, -\Delta v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\cdot H_0^1(\Omega)} - \langle g, \gamma_1 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.2.5}$$

é denominada uma *solução definida por transposição* do Problema (P_1).

Divide-se o estudo da existência de soluções do Problema (P_1) em três casos, segundo os espaços de Sobolev onde serão tomadas as funções f e g.

Caso I. Suponha-se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Tem-se o seguinte resultado

Proposição 3.2.1 *Para todo par* $\{f, g\}$ *pertencente a* $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ *existe um único* $u \in L^2(\Omega)$, *solução definida por transposição de* (P_1). *Tem-se, ainda mais, que a aplicação linear*

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega)$$

é contínua, onde

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad em \quad H^{-1}(\Omega) \\ u = g \quad em \quad H^{-1/2}(\Gamma) \end{array} \right. \tag{3.2.6}$$

Demonstração: A aplicação linear

$$-\Delta\colon H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega) \tag{3.2.7}$$

é uma isometria bijetiva, isto é,

$$||u||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = |\Delta u|.$$

Daí, o adjunto $(-\Delta)^*$ de $-\Delta$, definido por:

$$(-\Delta)^*\colon L^2(\Omega) \mapsto (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))' \tag{3.2.8}$$

$$\langle (-\Delta)^* u, v \rangle = (u, -\Delta v), \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.2.9}$$

é, igualmente, uma isometria bijetiva.

Observe que $(-\Delta)^*$ é uma extensão de $-\Delta$, uma vez que $D(-\Delta) \subset D((-\Delta)^*)$.

Considere L um objeto do dual $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))'$, definido por

$$\langle L, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle g, \gamma_1 v \rangle, \quad v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.2.10}$$

sendo γ_1 o traço de ordem um em $H^2(\Omega)$. Resulta de (3.2.8):

$$\left| \begin{array}{l} \text{Existe um único } u \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ (-\Delta)^* u = L, \text{ no sentido de } (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))' \end{array} \right.$$

De modo equivalente tem-se:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Existe um único } u \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ \langle L, v \rangle = \langle (-\Delta)^* u, v \rangle \text{ para todo } v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{3.2.11}$$

De (3.2.9), (3.2.10) e (3.2.11), obtém-se:

$$(u, -\Delta v) = \langle f, v \rangle - \langle g, \gamma_1 v \rangle \tag{3.2.12}$$

para todo $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, isto é, u é uma solução definida por transposição do Problema (P_1). A unicidade de u segue notando que a aplicação (3.2.7) é sobrejetora.

- Mostra-se que $-\Delta u = f$ em $H^{-1}(\Omega)$.

De fato, tomando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (3.2.12) segue a afirmação.

- Verifica-se que $\gamma_0 u = g$ em $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Com efeito, como $u \in L^2(\Omega)$ e $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ vem pelo Teorema 3.1.1 da Introdução que $\gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e é válida a fórmula de Green:

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle = (u, \Delta v) - \langle \Delta u, v \rangle, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado de (3.2.12) resulta

$$\langle g, \gamma_1 u \rangle = (u, \Delta v) - \langle \Delta u, v \rangle, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

As duas últimas igualdades acarretam o resultado desejado.

- Continuidade da aplicação

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega)$$

u solução de (3.2.1).

Sejam $h \in L^2(\Omega)$ e v solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v = h \quad \text{em} \quad \Omega \\ u|_\Gamma = 0 \end{array} \right.$$

Então $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e

$$||v||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} \leq C|h|. \tag{3.2.13}$$

De (3.2.12) resulta

$$(u,h) = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle.$$

Logo

$$|(u,h)| \leq ||f||_{H^{-1}(\Omega)}\, ||v||_{H_0^1(\Omega)} + ||g||_{H^{-1/2}(\Gamma)}\, ||\gamma_1 v||_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

que implica de (3.2.13)

$$|(u,h)| \subset \left[||f||^2_{H^{-1}(\Omega)} + ||g||^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right]^{1/2} |h|.$$

Daí vem

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq C\left[||f||^2_{H^{-1}(\Omega)} + ||g||^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right]^{1/2}$$

provando a continuidade da aplicação. ■

Da unicidade de soluções definidas por transposição de (P_1) vem que os Problemas (3.2.5) e (3.2.1) são equivalentes.

Caso II Considere-se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Denomina-se solução de (P_1), neste caso, a uma função $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\left|\begin{array}{l} ((u,v)) = \langle f, v\rangle \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega) \\ \gamma_0 u = g \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma) \end{array}\right. \tag{3.2.14}$$

Demonstra-se, a seguir, existência, unicidade e dependência contínua, como foi feito no Caso I.

De fato, considere a função

$$T\colon H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^1(\Omega),$$

tal que $Tg = w$ sendo $\gamma_o w = g$, e γ_0 o traço em $H^1(\Omega)$. Daí resulta que o problema variacional

$$\left|\begin{array}{l} z \in H_0^1(\Omega) \\ ((z,v)) = \langle f, v\rangle - ((w,v)) \quad \text{para cada} \quad v \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.2.15}$$

é bem posto no sentido de Hadamard. Portanto $u = z + w$ pertence a $H^1(\Omega)$ é solução do problema:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega) \\ \gamma_0 u = g \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma) \end{array} \right. \tag{3.2.16}$$

que é o problema (3.2.14).

A unicidade segue de forma usual.

Resta provar a dependência contínua. Realmente, considere as sucessões (f_ν) e (g_ν) de $H^{-1}(\Omega)$ é $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente, convergentes nos respectivos espaços para f e g. Tem-se $Tg_\nu = w_\nu \to Tg$ em $H^1(\Omega)$. Seja z_ν a solução de (3.2.15) correspondente ao par $\{f_\nu, g_\nu\}$. Resulta que para cada $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$((z_\nu - z_\mu, v)) = \langle f_\nu - f_\nu, v \rangle - ((u_\nu - u_\mu, v)), \quad \text{para cada} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Considerando-se $v = z_\nu - z_\mu$ em $H_0^1(\Omega)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} ||z_\nu - z_\mu||^2_{H_0^1(\Omega)} \ &\leq ||f_\nu - f_\mu||_{H^{-1}(\Omega)} \, ||z_\nu - z_\mu||_{H_0^1(\Omega)} + \\ &+ ||w_\nu - w_\mu||_{H^1(\Omega)} \, ||z_\nu - z_\mu||_{H_0^1(\Omega)} \, . \end{aligned}$$

Daí resulta que (z_ν) é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Logo converge para $z \in H_0^1(\Omega)$ e

$$((z, v)) = \langle f, v \rangle - ((w, v)) \quad \text{para cada} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $u_\nu = z_\nu + w_\nu \to u = z + w$ em $H^1(\Omega)$, provando-se que a aplicação linear

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \to u \in H^1(\Omega),$$

sendo u solução de (16), é contínua. ■

Caso III Neste caso examina-se a solução de (P_1) quando $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^\alpha(\Gamma)$, sendo $-\frac{1}{2} < \alpha < +\frac{1}{2} \cdot$ O método consiste em aplicar determinados resultados de interpolação de espaços de Sobolev (cf. J.L. Lions - E. Magenes [11]).

De fato, foi demonstrado nos Casos I e II que as aplicações

$$\begin{aligned} \{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto u \in H^1(\Omega), \qquad & \text{linear, contínua;} \\ \{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega), \qquad & \text{linear, contínua,} \end{aligned}$$

sendo u solução do problema (P_1), em cada caso. Interpolando-se os espaços, obtém-se:

$$[H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)]_\theta = H^{(1-\theta)\frac{1}{2}+\theta(-\frac{1}{2})}(\Gamma) = H^{(1/2)-\theta}(\Gamma)$$

sendo $0 \leq \theta \leq 1$. Portanto, tomando-se $\frac{1}{2} - \theta = \alpha$, obtém-se $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\cdot$

Analogamente, obtém-se:

$$[H^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{(1/2)-\alpha} = H^{(1/2)+\alpha}(\Omega)$$

notando-se que $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$.

Conseqüentemente:

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^\alpha(\Gamma) \to u \in H^{(1/2)+\alpha}(\Omega), \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2},$$

é linear e contínua, sendo u a única solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = g \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array} \right. \tag{3.2.17}$$

com $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^\alpha(\Gamma)$, para $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\cdot$ ■

Análise da Aplicação Traço γ_0 – Do Caso I resulta que

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto u \in Y \tag{3.2.18}$$

é uma aplicação linear e contínua. Ela é sobrejetiva por propriedades do traço γ_0. Pela unicidade da solução do (P_1), no Caso I, resulta que a aplicação (3.2.14) é injetiva. Do Caso II, obtém-se, também, que a aplicação:

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \mapsto u \in H^1(\Omega) \tag{3.2.19}$$

é linear, contínua e bijetiva.

Aplicando-se resultados de interpolação resulta:

$$[H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma),\, H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)]_{(1/2)-\alpha} = H^{-1}(\Omega) \times H^\alpha(\Gamma)$$

e

$$[H^1(\Omega), Y]_{(1/2)-\alpha} = Y_\alpha = \{u \in H^{(1/2)+\alpha}(\Omega),\ \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\},$$

$-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \cdot$ Logo, de (3.2.18) e (3.2.19) e dos resultados de interpolação, acima fixados, obtém-se:

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^\alpha(\Gamma) \mapsto u \in Y_\alpha\,, \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\,,$$

sendo u solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = g \quad \text{sobre} \quad \Gamma, \end{array}\right.$$

é uma aplicação linear, contínua e bijetiva. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, resulta que a aplicação inversa:

$$u \in Y_\alpha \to \{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^\alpha(\Gamma), \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\,,$$

é linear, contínua e bijetiva. Portanto a aplicação traço γ_0:

$$u \in Y_\alpha \mapsto \gamma_0 u \in H^\alpha(\Gamma), \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\,, \tag{3.2.20}$$

é linear e contínua. ■

Observação 27 *Note que se $u \in Y$ então $u \in L^2(\Omega)$. Conseguintemente, existe uma sucessão (φ_μ) de objetos de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\mu \to u$ em $L^2(\Omega)$. Não se tem, entretanto, necessariamente, que $\varphi_\mu \to u$ em Y. De modo preciso, não resulta daí, necessariamente, que $\Delta\varphi_\mu \to \Delta u$ em $H^{-1}(\Omega)$, pois isto acarretaria que (φ_μ) seria uma sucessão de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$, logo u pertenceria a $H_0^1(\Omega)$. Logo não resulta, necessariamente, que $\gamma_0\varphi_\mu \to \gamma_0 u$ em $H^{-1/2}(\Gamma)$. Análogo raciocínio aplica-se ao espaço $Y_0 = \{u \in H^{1/2}(\Omega); \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\}$. Neste caso, de (20) vem que $\gamma_0 u \in L^2(\Gamma), \quad u \in Y_0$. Note-se que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^{1/2}(\Omega)$, cf. J.L. Lions - E. Magenes [11].* ■

Caso IV Analisa-se, no presente parágrafo, o problema (P_1) de Dirichlet, quando $f \in L^2(\Omega)$. As conclusões, aqui obtidas, serão empregadas no estudo do Teorema de Traço e da Fórmula de Green da Seção 3.4.

Do resultado de regularidade de soluções de problemas elíticos, cf. H. Brezis [19], resulta que se v for solução do problema:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v = f \quad \text{em} \quad \Omega, \;\; f \in L^2(\Omega) \\ v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array} \right.$$

então $v \in H^2(\Omega)$ e $||v||_{L^2(\Omega)} \leq C|f|$, sendo $C > 0$ uma constante independente de f. Isto acarreta, como feito no Caso II, que a aplicação

$$\{f, g\} \in L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma) \mapsto u \in H^2(\Omega), \tag{3.2.21}$$

sendo u solução do problema:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ \gamma_0 u = g, \end{array} \right.$$

é linear, contínua e bijetiva. Considera-se (3.2.18). Observe-se que para $0 \leq \theta \leq 1$, tem-se:

$$[H^{3/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)]_\theta = H^{(3/2)-2\theta}(\Gamma) \tag{3.2.22}$$

e

$$[H^2(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta = H^{2(1-\theta)}(\Omega). \tag{3.2.23}$$

Considere o espaço $\mathcal{H}^0$, cf. Capítulo 2, paragrafo 2.8,

$$\mathcal{H}^0 = \{u \in L^2(\Omega); \; \Delta u \in L^2(\Omega)\}, \tag{3.2.24}$$

com a estrutura Hilberteana:

$$(u, v)_{\mathcal{H}^0} = (u, v) + (\Delta u, \Delta v).$$

Resulta, portanto, de (3.2.22) e (3.2.23) que para $0 \leq \theta \leq 1$, tem-se:

$$[L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma), \; L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)]_\theta = L^2(\Omega) \times H^{(3/2)-2\theta}(\Gamma)$$

e

$$[H^2(\Omega), \mathcal{H}^0]_\theta = \mathcal{H}^{2(1-\theta)}.$$

Observe que $\mathcal{H}^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$, é o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}^\alpha = \{u \in H^\alpha(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\} \tag{3.2.25}$$

munido do produto escalar

$$(u, v)_{\mathcal{H}^\alpha} = (u, v)_{H^\alpha(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v).$$

Considere $\alpha = 2(1-\theta)$. Então $\frac{3}{2} - 2\theta = -\frac{1}{2} + \alpha$. Decorre do exposto e por aplicação de argumentos análogos aos empregados no Caso III, que a aplicação linear

$$\{f, g\} \in L^2(\Omega) \times H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma) \mapsto u \in \mathcal{H}^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \tag{3.2.26}$$

sendo u a solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = g \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array} \right.$$

é contínua e bijetiva. Também a aplicação traço γ_0 :

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \mapsto \gamma_0 u \in H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma), \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \tag{3.2.27}$$

é contínua. ■

3.3 Problema de Neumann

No presente parágrafo investiga-se a solução do problema

$$(P_2) \qquad \left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array} \right.$$

sendo f e h funções reais definidas, respectivamente, em Ω e sobre Γ.

De início, como foi feito no Problema de Dirichlet, vai-se definir solução de (P_2) quando f e h são funções não regulares.

Procede-se de forma heurística. Formalmente, obtém-se:

$$\int_\Omega (-\Delta u + u) v \, dx = \int_\Omega u(-\Delta v + v) \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\Gamma + \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\Gamma.$$

Como não se tem informação sobre u restrito a Γ deve-se impor a condição $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$. Supondo $u \in L^2(\Omega)$ vem que $-\Delta v + v$ deve pertencer a $L^2(\Omega)$. Isto e a primeira restrição implicam que v deve pertencer ao espaço

$$W = \{v \in H^2(\Omega);\ \gamma_1 v = 0\} \tag{3.3.28}$$

que por sua vez acarreta $v \in H^{3/2}(\Gamma)$, portanto pode-se considerar $h \in H^{-3/2}(\Gamma)$. Também considere $f \in L^2(\Omega)$.

O anterior motiva a seguinte definição: Sejam

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad h \in H^{-3/2}(\Gamma).$$

Então $u \in L^2(\Omega)$ que verifica

$$(u, -\Delta v + v) = (f, v) + \langle h, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) H^{3/2}(\Gamma)} \tag{3.3.29}$$

para todo $v \in W$, é denominada *solução definida por transposição* do Problema (P_2).

Proposição 3.3.1 *Sejam*

$$f \in L^2(\Omega) \quad e \quad h \in H^{-3/2}(\Gamma).$$

Então o Problema (P_2) possui uma única solução $u \in L^2(\Omega)$ definida por transposição. Além disso, a aplicação linear

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega)$$

onde u é solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad em \quad L^2(\Omega) \\ \gamma_1 u = h \quad em \quad H^{-3/2}(\Gamma), \end{array} \right. \tag{3.3.30}$$

é contínua.

Demonstração: Seja A o operador definido pela terna $\{H^1(\Omega), L^2(\Omega), (u,v)_{H^1(\Omega)}\}$. Então $A = -\Delta + I$ e como Ω é regular, vem que

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega);\ \gamma_1 u = 0\} = W$$

onde W foi definido por (3.3.28). Também para cada $f \in L^2(\Omega)$ o problema de Neumann

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array} \right. \tag{3.3.31}$$

admite uma única solução $u \in D(A)$, sendo

$$||u||_{H^2(\Omega)} \le C|f|, \tag{3.3.32}$$

C uma constante independente de f e u (ver H. Brezis [19]). O espaço vetorial $D(A)$ com o produto escalar

$$(u,v)_{D(A)} = (-\Delta u + u,\ -\Delta v + v)$$

é um espaço de Hilbert.

Do exposto vem

$$A\colon D(A) \mapsto L^2(\Omega) \tag{3.3.33}$$

é uma isometria linear sobrejetiva. Resulta então que o adjunto

$$A^*\colon L^2(\Omega) \mapsto D(A)'$$

é uma isometria sobrejetiva, sendo:

$$\langle (-\Delta + I)^*\, u, v \rangle_{D(A)'D(A)} = (u, -\Delta v + v). \tag{3.3.34}$$

Define-se em $D(A)$ a forma linear L dada por:

$$\langle L, v \rangle = (f,v) + \langle h, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) H^{3/2}(\Gamma)}\,, \quad v \in D(A). \tag{3.3.35}$$

Tem-se:

$$|\langle L, v\rangle| \leq |f|\,|v| + ||h||_{H^{-3/2}(\Gamma)}\,||\gamma_0 v||_{H^{3/2}(\Gamma)}$$

que implica de (3.3.32)

$$|\langle L, v\rangle| \leq C\Big[|f|^2 + ||h||^2_{H^{-3/2}(\Gamma)}\Big]^{1/2}||v||_{D(A)}$$

provando a continuidade de L em $D(A)$, portanto L é um objeto de $D(A)'$.

Decorre, daí e da sobrejetividade de A^*, que existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(-\Delta + I)^*\,u = L \quad \text{em} \quad D(A)'$$

ou

$$\langle(-\Delta + I)^*\,u, v\rangle = \langle L, v\rangle, \quad \forall\, v \in D(A). \tag{3.3.36}$$

Combinando (3.3.34), (3.3.35) e (3.3.36) vem que

$$(u, -\Delta v + v) = (f, v) + \langle h, \gamma_0 v\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) H^{3/2}(\Gamma)}\,, \quad \forall\, v \in D(A) \tag{3.3.37}$$

isto é, u é uma solução definida por transposição de (P_2). A unicidade de u é conseqüência da sobrejetividade da aplicação A dada em (3.3.33).

- Mostra-se que $-\Delta u + u = f$ em $L^2(\Omega)$.

  Com efeito, considerando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ obtém-se o resultado.

- Mostra-se que $\gamma_1 u = h$ em $H^{-3/2}(\Gamma)$.

De fato, considera-se o espaço $\mathcal{H}^0$, cf. Capítulo 2, parágrafo 2.7. Resulta dos resultados aí obtidos, que a aplicação traço γ

$$u \in \mathcal{H}^0 \mapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\} \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$$

é linear e contínua e vale a seguinte fórmula de Green:

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) - \langle\gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) H^{3/2}(\Gamma)} + \langle\gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) H^{1/2}(\Gamma)}$$

para todo $v \in H^2(\Omega)$ e $u \in \mathcal{H}^0$.

Como $u \in \mathcal{H}^0$ vem então que $\gamma_1 u \in H^{-3/2}(\Gamma)$ e

$$(-\Delta u + u, v) = (u, -\Delta v + v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) H^{3/2}(\Gamma)}$$

para todo $v \in D(A)$, ou

$$(f, v) = (u, -\Delta v + v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) H^{3/2}(\Gamma)}, \quad \forall\, v \in D(A). \tag{3.3.38}$$

De (3.3.37) e (3.3.38) vem o resultado desejado.

- Continuidade da aplicação linear

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega)$$

onde u é solução de (3.3.30).

De fato, seja $\xi \in L^2(\Omega)$ e v solução de (3.3.30) com ξ em lugar de f. Da condição (3.3.37) resulta

$$(u, \xi) = (f, v) + \langle h, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) H^{3/2}(\Gamma)}$$

para todo $v \in D(A)$. Da estimativa (3.3.32) obtém-se $||v||_{H^2(\Omega)} \leq C|\xi|$, portanto

$$\begin{aligned} |(u, \xi)| &\leq C||\{f, g\}||_{L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma)}\, ||v||_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C||\{f, g\}||_{L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma)}\, |\xi| \end{aligned}$$

o que implica

$$|u| \leq C||\{f, g\}||_{L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma)}$$

mostrando a continuidade da aplicação. ■

Nota-se que pela unicidade das soluções definidas por transposição do Problema (P_2), os problemas (3.3.29) e (3.3.30) são equivalentes.

Observação 28 *Tem-se que a aplicação linear*

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma) \mapsto u \in \mathcal{H}^0$$

onde u é a solução de (3.3.30), é contínua e bijetiva.

Considere-se, agora, $f \in L^2(\Omega)$ *e* $h \in H^{1/2}(\Gamma)$. *Seja* $w \in H^2(\Omega)$ *tal que* $\gamma_1 u = h$. *Então, do Teorema de Traço (cf. Capítulo 2, parágrafo 2.8), resulta que* w *pode ser escolhido de modo que*

$$||w||_{H^2(\Omega)} \leq C||h||_{H^{1/2}(\Gamma)} . \tag{3.3.39}$$

Para este w, *seja* v *a solução do problema:*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v + v = f - \Delta w - w \quad em \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad sobre \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

Resulta que para esta escolha de w, *a solução* $v \in H^2(\Omega)$ *e de (3.3.32) e (3.3.39) obtém-se:*

$$||v||_{H^2(\Omega)} \leq C[|f| + |\Delta w| + |w|] \leq C(|f| + ||h||_{H^{1/2}(\Gamma)}). \tag{3.3.40}$$

Tomando-se $u = v + w$, *obtém-se:*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad em \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad sobre \quad \Gamma, \end{array} \right. \tag{3.3.41}$$

resultando de (3.3.39) e (3.3.40) que

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C(|f| + ||h||_{H^{1/2}(\Gamma)}).$$

Tem-se que u *é única.*

Conclui-se, portanto, que a aplicação linear

$$\{f, g\} \in L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \mapsto u \in H^2(\Omega), \tag{3.3.42}$$

sendo u *solução de (3.3.41), é contínua e bijetiva.* ■

No que se segue, serão aplicados resultados de interpolação para a obtenção da solução do problema de Neumann em outros espaços de Sobolev (cf. J.L. Lions - E. Magenes,[11]).

De fato, para $0 \leq \theta \leq 1$, obtém-se:

$$[H^{1/2}(\Gamma), H^{-3/2}(\Gamma)]_\theta = H^{(1/2)-2\theta}(\Gamma)$$

e

$$[H^2(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta = H^{2(1-\theta)}(\Omega).$$

Seja $\alpha = 2(1-\theta)$ então $\frac{1}{2} - 2\theta = -\frac{3}{2} + \alpha$. Resulta da Proposição 3.3.1 e (3.3.42) que a aplicação linear, com $0 \leq \alpha \leq 2$,

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma) \rightarrow u \in H^\alpha(\Omega),$$

é contínua, sendo u a única solução do problema:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ \gamma_1 u = h \quad \text{sobre} \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

Igualmente da Proposição 3.3.1, (3.3.42) e do teorema do gráfico fechado, resulta que a aplicação linear, com $0 \leq \alpha \leq 2$,

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \rightarrow \{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma)$$

é contínua.

O espaço $\mathcal{H}^\alpha$ foi definido em (3.2.25), isto é,

$$\mathcal{H}^\alpha = \{u \in H^\alpha(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Resulta, daí, que a aplicação traço γ_1 dada por:

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \rightarrow \gamma_1 u \in H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma) \tag{3.3.43}$$

é contínua para $0 \leq \alpha \leq 2$.

Em particular, para $\alpha = \frac{3}{2}$, conclui-se que o traço γ_1 dado por:

$$u \in \mathcal{H}^{3/2} \rightarrow \gamma_1 u \in L^2(\Omega)$$

é contínua. ■

3.4 Teorema do Traço. Fórmula de Green

A notação desta seção será a que foi fixada na seção anterior. Verifique as notações $\mathcal{H}^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$, γ_0 e γ_1.

Teorema 3.4.1 *A aplicação traço*

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \to \gamma u = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\} \in H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma), \tag{3.4.44}$$

para $0 \leq \alpha \leq 2$, *é linear e contínua. Tem-se a seguinte Fórmula de Green:*

$$\begin{aligned}(-\Delta u, v) \ &= (u, -\Delta v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)} + \\ &+ \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle_{H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(1/2)-\alpha}(\Gamma)},\end{aligned} \tag{3.4.45}$$

para $0 \leq \alpha \leq 2$, $u \in \mathcal{H}^\alpha$ *e* $v \in \mathcal{H}^{2-\alpha}$.

Demonstração: Reescrevendo (3.2.27), Caso IV, vem que a aplicação linear γ_0

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \to \gamma_0 u \in H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma), \quad 0 \leq \alpha \leq 2,$$

é contínua.

De (3.3.43), cf. Seção 3.3, Problema de Neumann, resulta que a aplicação linear γ_1

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \to \gamma_1 u \in H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma), \quad 0 \leq \alpha \leq 2,$$

é contínua.

Resulta que a aplicação traço $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ é linear e contínua de $\mathcal{H}^\alpha$ em $H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma) \times H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma)$, com $0 \leq \alpha \leq 2$. Permutando α por $2-\alpha$ em (3.4.44) resulta que a aplicação traço $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, tal que

$$v \in \mathcal{H}^{2-\alpha} \to \gamma v = \{\gamma_0 v, \gamma_1 v\} \in H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)\, H^{(1/2)-\alpha}(\Gamma),$$

$0 \leq \alpha \leq 2$, é contínua.

Considere-se u e v em $H^2(\Omega)$. Obtém-se:

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) - (\gamma_1 u, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} + (\gamma_0 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)} . \tag{3.4.46}$$

Note-se que:

$$(\gamma_1 u, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)}$$

e

$$(\gamma_0 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)} = \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle_{H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(1/2)-\alpha}(\Gamma)}.$$

Portanto, modifica-se (3.3.43), obtendo-se:

$$\begin{aligned} (-\Delta u, v) \; &= (u, -\Delta v) = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-(3/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)} + \\ &+ \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle_{H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(1/2)-\alpha}(\Gamma)} , \quad u, v \in H^2(\Omega). \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Observe, também, que $[H^2(\Omega), \mathcal{H}^0]_{1-(\alpha/2)} = \mathcal{H}^\alpha$, com $0 \leq \alpha \leq 2$, implicando que $H^2(\Omega)$ é denso em $\mathcal{H}^\alpha$. Desta densidade e da continuidade de γ definida em (3.4.44), resulta que a igualdade (3.4.47) é válida para todo $u \in \mathcal{H}^\alpha$ e $v \in H^2(\Omega)$. Aplicando, novamente, o mesmo raciocínio a resultado obtido, conclui-se que (3.4.47) é válida para todo $u \in \mathcal{H}^\alpha$ e $v \in \mathcal{H}^{2-\alpha}$, que é a Fórmula de Green procurada. ■

Considere-se o operador A definido na Seção 3.3, Problema de Neumann, isto é, $A = -\Delta + I$ com domínio

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega); \gamma_1 u = 0\}.$$

Sejam (w_μ) e (λ_μ) os vetores próprios e valores próprios, respectivamente, de A. Note-se que $\lambda_\mu \geq 1$ para todo $\mu \in \mathbb{N}$. Tem-se, para $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$D((-\Delta)^\alpha) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \sum_{\mu=1}^{\infty} (\lambda_\mu - 1)^{2\alpha} \, |(u, w_\mu)|^2 < \infty \right\}$$

e

$$(-\Delta)^\alpha \, u = \sum_{\mu=1}^{\infty} (\lambda_\mu - 1)^\alpha \, (u, w_\mu) w_\mu$$

(cf. M. Milla Miranda [25]). É claro que $D((-\Delta)^\alpha) = D(A^\alpha), \; 0 \leq \alpha \leq 1$.

Proposição 3.4.1 *Tem-se:*

$$(-\Delta u, v) = ((-\Delta)^{\alpha}\, u, (-\Delta)^{1-\alpha}\, v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)}\,, \tag{3.4.48}$$

para $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ *e* $u \in \mathcal{H}^{2\alpha}$, $v \in D(A)$. *Para* $\alpha = \frac{1}{2}$, *vale a fórmula:*

$$(-\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\, H^{1/2}(\Gamma)}\,, \tag{3.4.49}$$

sendo $u \in \mathcal{H}^1$ *e* $v \in H^1(\Omega)$. *(Esta expressão já foi obtida no Capítulo 2, Seção 2.5.2).*

Demonstração: Seja $v \in D(A)$. Da Fórmula de Green (3.4.45), obtém-se:

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-(3/2)+\alpha}(\Gamma)\, H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)}\,,$$

para $v \in \mathcal{H}^{2\alpha}$. Note-se que$D(A) \subset D(A^{1-\alpha})$, e que para $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\mathcal{H}^{2\alpha} \subset D(A^{\alpha}) = H^{2\alpha}(\Omega)$. Então, sendo $D(A^{\alpha}) = D((-\Delta)^{\alpha})$, $0 \leq \alpha \leq 1$, resulta que a última fórmula pode ser escrita na forma (3.4.48). A expressão (3.4.49) é obtida aplicando (3.4.48) com $\alpha = \frac{1}{2}$ e observando que $D(A) \hookrightarrow D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$ e $D(A)$ denso em $D(A^{1/2})$. ■

Bibliografia

[1] M. Artola – *Variational inequalities, Autumn course on mathematical and numerical methods in fluid dynammics*, Trieste, 1973.

[2] R.A. Cipolati – *Uma aplicação do teorema de Lions-Stampacchia a um problmea de elasticidade*, Tese de Mestrado, IM-UFRJ, 1976.

[3] D.G. Figueiredo e F. Treves – E*spaços vetoriais topológicos e distribuições*, Notas de Matemática $n^{\underline{0}}$ 41, Rio de Janeiro.

[4] E. Gagliardo – *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerce di Mat. vol. VIII (1958), 102–137.

[5] D. Huet – *Distributions and Sobolev spaces*, University of Maryland, 1970.

[6] C.H. Hönig – *Aplicações da topologia à análise*, IMPA-CNPq (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1976.

[7] V.K. Khoan – *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles*, Tome II, Vuibert, Paris 1972.

[8] J.L. Lions – *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal, 1965.

[9] J.L. Lions – *Cours d'analyse numérique*, Hermann, Paris, 1974.

[10] J.L. Lions – *Équations aux dérivées partielles et calcul des variations* (Cours IHP) 1967, Paris.

[11] J.L. Lions, E. Magenes – *Problèmes aux limites non homogènes*, Vol. I, Dunod, Paris, 1968.

[12] L.A. Medeiros e P.H. Rivera – *Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais*, IM-UFRJ, 1965.

[13] R. Riesz, B.Sz. Nagy – *Functional Analysis, F. Ungak*, N.Y. 1955.

[14] L. Schwartz – *Théorie des distributions*, Vol. I, II, Hermann, Paris, 1951.

[15] S. Sobolev – *Applications of functional analysis in mathematical physics*, A.M.S. 1963.

[16] K. Yosida – *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1965.

Bibliografia Complementar

[17] R.A. Adams – *Sobolev Spaces*, Academic Press, N.Y., 1975.

[18] J.A. Aubin – *Approximation of Elliptic Boundary Value Problems*, Wiley Interscience, N.Y., 1972.

[19] H. Brezis – *Analyse Fonctionelle (Théorie et Aplications)*, Masson, Paris, 1973.

[20] M.P. do Carmo – *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, N.J., USA, 1976.

[21] G. Chavant – *Analyse Fonctionelle et Discretisation*, INRIA, France, 1977.

[22] R. Dautray e J.L. Lions – *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, V.3, Springer-Verlag, 1983.

[23] S. Kesavan – *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Easten Limited, New Delhi, 1990.

[24] N. Meyers and J. Serrin – $H = W$, Proceedings Nat. Acad. Sci. USA, 51 (1964), 1055–1056.

[25] M. Milla Miranda – *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1990.

[26] R. Temam – *Navier-Stokes Equations (Theory and Numerical Analysis)*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

Instituto de Matemática, UFRJ

Caixa Postal 68530

CEP 21941–909, Rio de Janeiro, RJ, Brasil