# Sobre o Modelo Matemático Navier-Stokes*

por

**Luis Adauto Medeiros**

## Introdução

Tem-se como objetivo principal fazer uma dedução do modelo matemático para o escoamento de fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos, por meio de argumentos elementares e intuitivos, dirigido às pessoas interessadas em ciência, em geral.

Inicia-se com considerações físicas geométricas, intuitivas para obter o que se entende por fluxo de fluido através de uma superfície, para obter a equação de continuidade que traduz, matematicamente, o princípio de conservação de massa. Por meio desta equação, define-se o que se entende por fluido incompressível. Da lei de conservação de quantidade de movimento encontra-se o modelo que se procura, conhecido sob a denominação de equações de Navier-Stokes.

Concluindo, descreve-se o método para o estudo matemático do modelo, distinguindo-se os casos em que a dimensão do espaço é $n = 2$ ou no caso $n \leq 4$.

Relaciona-se uma pequena bibliografia no final do artigo, refletindo a visão do autor sobre o problema. Observe-se que a bibliografia é excessi-

* Conferência de Divulgação, Instituto de Matemática - UFRJ, 2006

vamente vasta e aqui encontra-se uma pequena amostra.

## 1. Considerações Físicas e Geométricas

Considere-se um fluido em movimento. Para fixar idéia, pensa-se em água fluindo em um canal. Represente por $\Omega$ um aberto limitado contido no ambiente onde se encontra o fluido. Pensa-se $\Omega$ cheio do fluido, com fronteira regular $\Gamma$. O espaço onde $\Omega$ está imerso é o $\mathbb{R}^3$, construido dos pontos $x = (x_1, x_2, x_3)$. Represente-se por $\Gamma$ a fronteira de $\Omega$ que é uma superfície do $\mathbb{R}^3$. Com $\vec{n}$ representa-se a normal unitária externa à fronteira $\Gamma$ de $\Omega$. Denota-se por $\vec{u}$ o vetor de componentes $(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, denominado a velocidade do fluido, isto é, das partículas do fluido. Denota-se $\vec{u}$ por $\vec{u}(x,t)$ a velocidade no ponto $x$ no instante $t$.

Considere-se uma porção da $d\Gamma$ da superfície $\Gamma$. Denomina-se fluxo através de $d\Gamma$, a massa de fluido que atravessa $d\Gamma$, na direção da normal, $\vec{n}$, na unidade de tempo. Calcula-se, de modo intuitivo, o fluxo, considerando a velocidade $\vec{u}$ das partículas. De fato, no instante $\Delta t$ uma partícula se desloca de $\vec{u}\Delta t$, na direção $\vec{u}$. Considerando os pontos de $d\Gamma$, no instante $\Delta t$, o total de partículas atravessando $d\Gamma$ é a massa de fluido contida no prisma de altura $u\Delta t$, $u$ módulo de $\vec{u}$, e base $d\Gamma$. Desejando-se este fluxo na direção da normal $\vec{n}$, projeta-se $\vec{u}$ sobre $\vec{n}$, obtendo-se $u_n\Delta t$ para altura do prisma, sendo $u_n = \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{u} = (\vec{u}, \vec{n})$, produto escalar no $\mathbb{R}^3$. Portanto o total de partículas atravessando $d\Gamma$ na unidade de tempo $\Delta t$, na direção da normal $\vec{n}$, mede-se pelo total de partículas de fluido contido no prisma de base $d\Gamma$ e altura $u_n\Delta t$, isto é, seu volume é dado por

$$d\Gamma \times u_n \Delta t.$$

O fluxo sendo a massa de fluido contida neste prisma, será dado por

$$\rho\, u_n\, \Delta t\, d\Gamma.$$

Com $\rho = \rho(x,t)$ representa-se a densidade do fluido, massa por unidade de volume.

No plano tem-se a visão geométrica na Fig. 1.

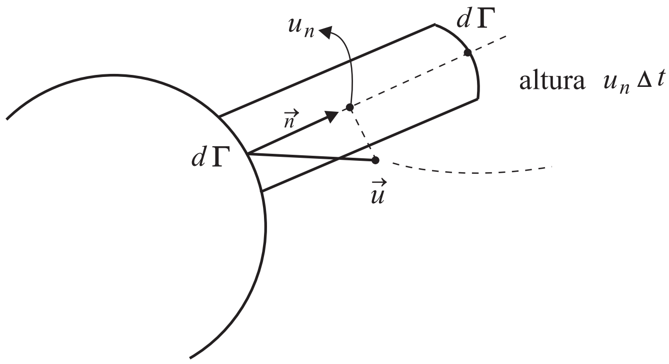


**Fig. 1**

Convenciona-se que o fluxo é positivo se calculado na direção positiva de $\vec{n}$ e negativo na direção oposta.

Portanto, o fluxo através $\Gamma$, fronteira de $\Omega$, no instante $\Delta t = 1$, será o somatório dos fluxos elementares $\rho\, u_n\, \Delta t$, isto é:

$$\int_\Gamma \rho(x,t) u_n(x,t)\, d\Gamma, \tag{1}$$

integral sobre a superfície $\Gamma$.

## 2. Equação de Continuidade

Admite-se o princípio de conservação de massa de fluido: "a variação da massa de fluido no interior de $\Omega$, em relação ao tempo, é igual ao fluxo de fluido através da fronteira $\Gamma$ de $\Omega$."

Traduz-se, a seguir, matematicamente, este princípio. De fato, sendo $\rho(x,t)$ a densidade do fluido, a massa de fluido contida em $\Omega$ é dada por:

$$M(t) = \int_\Omega \rho(x,t)\,dx,$$

sendo $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ a medida no $\mathbb{R}^n$. A variação, em relação ao tempo, é:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx. \tag{2}$$

Suponha-se a variação devido ao fluido entrando em $\Omega$, isto é,

$$-\int_\Gamma \rho(x,t) u_n(x,t)\,d\Gamma. \tag{3}$$

O princípio de conservação de massa diz que as integrais (2) e (3) são iguais, para todo aberto limitado $\Omega$, com fronteira $\Gamma$. Note-se que se supõe $\Omega$ limitado e do mesmo lado de $\Gamma$. Algo como a Fig. 2

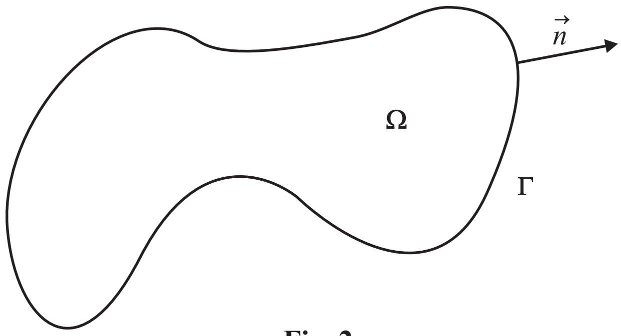


**Fig. 2**

Portanto, do princípio de conservação de massa, resulta, da igualdade das integrais (2) e (3):

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx + \int_\Gamma \rho\, u_n\,d\Gamma = 0,$$

para todo $\Omega$. Transformando a integral de superfície por meio do teorema da divergência, obtém-se:

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u})\right] dx = 0,$$

para todo $\Omega$. Supondo-se o integrando uma função contínua, obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \text{ pontualmente em } \Omega. \tag{4}$$

Note-se, a componente $u_i$ da velocidade $\vec{u}$ é $\dfrac{dx_i}{dt}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ vetor do $\mathbb{R}^3$, posição da partícula $x$ no tempo $t$, isto é, $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Daí obtém-se

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\text{grad } \rho, \vec{u}). \tag{5}$$

Efetuando o cálculo, obtém-se:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = \rho \operatorname{div} \vec{u} + (\text{grad } \rho, \vec{u}). \tag{6}$$

Substituindo (5) e (6) em (4), obtém-se:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega. \tag{7}$$

É claro que (4) e (7) são equivalentes. A (7) ou (4), denomina-se equação de continuidade ou lei de conservação de massa.

Diz-se que um fluido é incompressível e homogêneo quando sua densidade é constante ou, equivalentemente, $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ em todo $\Omega$, isto é,

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega. \tag{8}$$

## 3. Equações de Navier-Stokes

É um modelo matemático para descrição do movimento de fluidos homogêneos, densidade $\rho$ constante, incompressíveis, $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ e viscosos. A dedução deste modelo será obtida por meio do princípio de conservação de quantidade de movimento. Estamos supondo

$$\rho \text{ constante e } \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega. \tag{9}$$

Considere-se um prisma de faces $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ contido em $\Omega$, cujo volume é $\Delta x = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$ e massa $\rho\Delta x$. A quantidade de movimento desta massa, é $\rho\Delta x\vec{u}$, sendo $\vec{u}$ a velocidade. Da definição de integral tripla, conclui-se que a quantidade de movimento da massa de $\Omega$ é dada por:

$$m(t) = \int_\Omega \rho\vec{u}(x,t)\,dx. \tag{10}$$

O princípio diz: "a variação da quantidade de movimento $m(t)$ de $\Omega$, em relação ao tempo, é igual ao somatório das forças aplicadas ao $\Omega$."

A variação da quantidade de movimento de $\Omega$ é:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_\Omega \rho\,\frac{d\vec{u}}{dt}\,dx. \tag{11}$$

As forças aplicadas em $\Omega$, são de dois tipos:

i) volumétricas aplicadas a $\Omega$ de densidade $f\overrightarrow{(x,t)} = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$.

ii) tensões internas, e viscosidades na fronteira $\Gamma$ de $\Omega$, cujas componentes admite-se fa forma:

$$F_i(x,t) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(x,t)\eta_j\,,$$

$i = 1,2,3$. Os números reais $\eta_j$, $j = 1,2,3$, são as componentes da normal unitária $\vec{n}$, externa à $\Gamma$.

Supõe-se as funções $\sigma_{ij}(x,t)$, $x \in \overline{\Omega}$ e $t \geq 0$, contínuas e continuamente diferenciáveis em relação a $x$ para todo $t \geq 0$. As funções $f_i(x,t)$ são supostas integráveis em $\Omega$ para todo $t > 0$. A matriz $\sigma_{ij}(x,t)$, $i,j = 1,2,3$, é denominada "tensor de tensões".

Deduz-se, do princípio de conservação da quantidade de movimento, a equação seguinte:

$$\int_\Omega \rho \frac{d\vec{u}}{dt}\, dx = \int_\Omega f(\overrightarrow{x}, t) dx + \int_\Gamma F(\overrightarrow{x}, t) d\Gamma \tag{12}$$

Escrevendo a (12) para as componentes dos vetores dos integrandos, obtém-se:

$$\int_\Omega \rho \frac{du_i}{dt}\, dx = \int_\Omega f_i(x,t)\, dx + \int_\Gamma \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(x,t)\eta_j \, d\Gamma, \tag{13}$$

para $i = 1,2,3$.

Do Lema de Gauss, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \sigma_{ij}(x,t)\eta_j \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(x,t)\, dx,$$

que substituido em (13), resulta:

$$\int_\Omega \rho \frac{du_i}{dt}\, dx = \int_\Omega f_i(x,t)\, dx + \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, dx, \tag{14}$$

para $i = 1.2.3$.

Para fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos encontra-se que $\sigma_{ij}(x,t)$ tem a representação:

$$\sigma_{ij}(x,t) = -p(x,t)\delta_{ij} + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{15}$$

$p(x,t)$ número positivo e $\nu > 0$ dita viscosidade do fluido, cf. Landau-Lifschitz [5]. Sendo $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, obtém-se

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Note-se que $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Logo, $\dfrac{\partial p}{\partial x_j}\,\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ restando $\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$, portanto:

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p}{\partial x_j}\,\delta_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \tag{16}$$

Tem-se: $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ em $\Omega$, logo

$$\nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \nu \Delta u_i\,. \tag{17}$$

Substituindo (16) e (17) em (4) obtém-se:

$$\int_\Omega \rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,dx = \int_\Omega f_i(x,t)\,dx + \int_\Omega \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i\right) dx \tag{18}$$

$i = 1, 2, 3$, para todo $\Omega$ imerso no fluido, resultando, devido a continuidade dos integrandos em (18):

$$\rho\,\frac{du_i}{dt} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \text{ em } \Omega \tag{19}$$

$i = 1, 2, 3$. A (19) denomina-se sistema de Navier-Stokes, para fluidos homogêneos, incompressíveis viscosos. Note-se que $\dfrac{du_i}{dt}$ é a aceleração do fluido.

Modifica-se (19), observando-se que $\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ para $x = (x_1, x_2, x_3)$. Portanto, a velocidade das partículas é $u_j(x,t) = \dfrac{dx_j}{dt}$, obtendo-se:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,u_j\,,$$

que substituida em (12) resulta:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_{j=1}^{3} u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ em } \Omega, \tag{20}$$

com $i = 1, 2, 3$, para $t \in (0, T)$, $T > 0$. Note que supõe-se $\rho = 1$, pois ela é constante.

Trata-se de um sistema de três equações diferenciais parciais nas incógnitas $(u_1, u_2, u_3)$ e na pressão $p$. O problema matemático consiste em saber se um problema de valor inicial e de contorno, para (20), é bem posto no sentido de Hadamard. Isto significa: existe solução, é única e depende continuamente dos dados do problema.

De fato, dado $\Omega$ aberto limitado, não vazio do $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\Gamma$ de classe $C^2$, define-se o cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, do $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^x \times \mathbb{R}_t$, com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. O problema matemático consiste em determinar $u_i \colon Q \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é, o vetor $\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_n(x,t))$, solução do problema de valor inicial e de fronteira seguinte:

$$
(21) \qquad \left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \, \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \dfrac{\partial p}{\partial x_i} \text{ em } Q \\[2ex]
u_i = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma \\[1ex]
\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{em} \quad Q \\[1ex]
u_i(x, 0) = u_{0i}(x) \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{array}\right.
$$

Represente-se o vetor $\vec{u}(x,t)$ por $u(x,t)$; $\operatorname{grad} p = \left( \dfrac{\partial p}{\partial x_1}, \dfrac{\partial p}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial p}{\partial x_n} \right)$ por $\nabla p$ e

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right); \quad \Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_n).
$$

Daí obtém a notação:

$$
\sum_{j=1}^{n} u_j \, \frac{\partial u}{\partial x_j} = \left( \sum_{j=1}^{n} u_j \, \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{n} u_j \, \frac{\partial u_2}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} u_j \, \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right).
$$

Com esta notação, escreve-se o sistema de Navier-Stokes (21) sob a forma:

$$
(22) \qquad \left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \nabla p \text{ em } Q \\
\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad Q \\
u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma \\
u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{array}\right.
$$

Para investigar existência e unicidade e dependência contínua, aplica-se o método de Faedo-Galerkin. Precisa-se de um breve resumo sobre os espaços a serem empregados.

## 4. Espaços Funcionais

Com $\mathcal{D}(\Omega)$ representa-se o espaço das funções $\phi \colon \Omega \to \mathbb{R}$, com suporte compacto em $\Omega$, infinitamente continuamente diferenciáveis. Denota-se por $(\mathcal{D}(\Omega))^n$ o produto cartesiano de $n$ cópias iguais a $\mathcal{D}(\Omega)$. Considere-se o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ e o produto cartesiano $(H_0^1(\Omega))^n$ munido do produto escalar:

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} ((u_i, v_i))_{H_0^1(\Omega)} \, .$$

e norma:

$$||u||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2_{H_0^1(\Omega)} \, .$$

Resulta que $(H_0^1(\Omega))^n$ é um espaço de Hilbert. A desigualdade de Poincaré implica considerar-se em $(H_0^1(\Omega))^n$, a norma equivalente:

$$||v||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\nabla v_i|^2_{L^2(\Omega)}$$

para todo vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $(H_0^1(\Omega))^n$.

Note-se que

$$|\nabla v_i|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx,$$

sendo $dx = dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_n$ a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$.

Considere-se o subespaço de Hilbert $V$ de $(H_0^1(\Omega))^n$ definido por:

$$V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^n; \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega\}.$$

Representa-se por $(L^2(\Omega))^n$ o produto cartesiano de $n$ fatores iguais a $L^2(\Omega)$, munido do produto escalar:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i v_i \, dx.$$

A norma em $(L^2(\Omega))^n$ é:

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i^2 \, dx.$$

Representa-se por $H$ a aderência de $\mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n; \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ em } \Omega\}$ em $(L^2(\Omega))^n$. Demonstra-se que $\mathcal{V}$ é denso em $V$.

## 5. Formulação Matemática do Sistema de Navier-Stokes

Considere-se o sistema (22) e procura-se dar sentido ao que se entende por solução. Para $u, v \in V$, define-se a forma bilinear:

$$a(u, v) = \nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx.$$

Demonstra-se que $a(u, v)$ é bilinear, contínua e $V$-elítica.

Motivado pelo termo não linear em (22), define-se a forma trilinear em $V$:

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j \, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, w_i \, dx.$$

**Lema 1**. $\quad b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0.$

**Demonstração**: De fato, tem-se:

$$b(u,v,w) - b(u,w,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, w_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, v_i \right) dx =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j \, \frac{\partial}{\partial x_j} \, (v_i w_i) dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \, dx = 0,$$

para $u, v, w \in V$, pois o traço em $\Gamma$ é zero e a divergência é zero.

**Problema 1**. Dados

$$f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)), \; u_0 \in H, \tag{23}$$

determinar $u$ e $p$, sendo $p \in \mathcal{D}'(Q)$. de modo a obter:

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \, \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \nabla p \text{ em } \mathcal{D}'(Q), \tag{25}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{26}$$

**Problema 2**. Dados

$$f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)), \; u_0 \in H, \tag{27}$$

determinar

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{28}$$

satisfazendo

$$(u(t),v) + a(u(t),v) + b(u(t),u(t),v(t)) = (f(t),v) \tag{29}$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$ para toda $v \in V$.

$$u(x,0) = u_0\,. \tag{30}$$

Demonstra-se: toda solução do Problema 1 é solução do Problema 2. A demonstração de que a solução do Problema 2 é solução do Problema 1 é a parte difícil do método. Ela envolve a caracterização das formas lineares contínuas $L$ pertencentes ao espaço $(H^{-1}(\Omega))^n$, $H^{-1}(\Omega)$ dual de $H_0^1(\Omega)$, que se anulam em $V$, isto é, vetores com divergência nula. De modo preciso, o resultado afirma: "Se $L \in (H^{-1}(\Omega))^n$ e $L(v) = 0$ para todo $v \in V$, existe uma função $p \in L^2(\Omega)\big/\mathbb{R}$, tal que

$$L(v) = \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx. \text{ "}$$

Tendo-se em mente a equivalência dos dois problemas, resolve-se o segundo por técnicas de Análise Funcional. Adota-se o método de aproximação de Faedo-Galerkin e resultados de compacidade. O segundo problema denomina-se formulação variacional do sistema de Navier-Stokes.

Note-se, todavia, que a formulação variacional é bem posta no caso $n = 2$, isto é, no plano $\mathbb{R}^2$. Neste caso, por meio do teorema de Aubin [1] e desigualdade de Sobolev, obtém-se as convergências das aproximações de Faedo-Galerkin e a unicidade, restringindo-se a dimensão a $n = 2$. Para o caso $n \leq 4$ não foi demonstrada a unicidade. Para a existência quando $n \leq 4$, há um teorema de compacidade de J.L. Lions [9] permitindo obter convergências das aproximações de Faedo-Galerkin. A unicidade não foi demonstrada.

## Bibliografia


[1] J.P. Aubin - Un théorème de compacité. C.R. Acad. Sci. Paris (Juin 1963) 5043-5044.

[2] G. Duvaut - Mécanique des Milieux Continus. Masson, Paris 1990.

[3] J. Leray - Sur les mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace. Acta Math. 63 (1934) 191-248.

[4] J. Leray - Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois. J. Math. Pures et Apl. t. XIII (1944) 331-481.

[5] L. Landau et E. Lifchitz - Mécanique des Fluides. Éditions Mir - Moscow - 1971.

[6] O.A. Ladyzhenskaya - The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Gordon and Breach Science Publishers, Paris 1949.

[7] J.-L. Lions - Sur l'existence des solutions des équations de Navier-Stokes. C.R. Acad. Sci. Paris (Mai 1959) 2847-2849.

[8] J.-L. Lions, G. Prodi - Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2. C.R. Acad. Paris t. 248 (1959) 3519-3521.

[9] J.-L. Lions - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires. Dunod, Paris 1959.

[10] E. Persico - Introduzioni alla Física Matemática Zenichelli, Bologna Italy, 1971.

[11] R. Temam - Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, North Holland, N.Y. 1979.

[12] L. Tartar - Topics in Nonlinear Analysis. Univ. Paris Sud, Orsay, France 1978.

[13] L. Tartar - Some Methods for Solving Nonlinear Evolution Problems. Université Paris IX, Paris 1976.