Aspectos do Teorema Fundamental do Cálculo

Luis Adauto Medeiros

Conferência proferida na
Faculdade de Matemática - UFPA

(Belém – Março de 2008)

“Então porque pinta?

Por nada. Procuro

simplesmente reproduzir o que vejo”

W. Somerset Morgan

Primeira Fase

Deve-se a Newton (1643-1727) a introdução do conceito de primitiva de uma função. Denomina-se primitiva de uma função f, a uma função F tal que sua derivada F' seja igual a f. Newton empregava esta nomenclatura para definir os conceitos de velocidade e aceleração por meio da noção de espaço percorrido por uma partícula. Adota-se a notação

$$F' = f \qquad \text{ou} \qquad \int f = F + \text{ constante.}$$

Diz-se que $\displaystyle\int f$ é a integral indefinida da f ou primitiva de f.

Segunda Fase

Leibniz (1646-1716)

Pensava no cálculo de áreas por meio da noção de limite obtendo um novo conceito matemático, denominado integral. Com a notação atual, considera-se uma função f definida em um intervalo, tomando valores reais, positiva. Considere-se o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ definido do modo seguinte:

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\big\},$$

denominado conjunto ordenada de f em $[a,b]$.

Calculava-se a área do conjunto ordenada para certas funções, aí residindo, penso eu, o conceito de integral definida.

Terceira Fase

Cauchy (1789-1857)

Fixa-se a atenção para funções reais, definidas em um intervalo fechado $[a,b]$ da reta $\mathbb{R}$.

Para estas funções, Cauchy definiu, de modo claro, as noções de limite, continuidade, derivada e integral. Relacionou a integral com a derivada, isto é, relacionou os conceitos de Leibniz e Newton para o caso das funções contínuas.

Integral de Cauchy

Considere-se uma função contínua

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R},$$

uma partição P de $[a,b]$ por meio dos pontos:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b. \tag{1}$$

Escolhe-se ξ_k tal que $x_{k-1} < \xi_k < x_k$, $k = 1, \ldots, n$ e define-se a soma

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k).$$

Consulte-se a Figura 1.

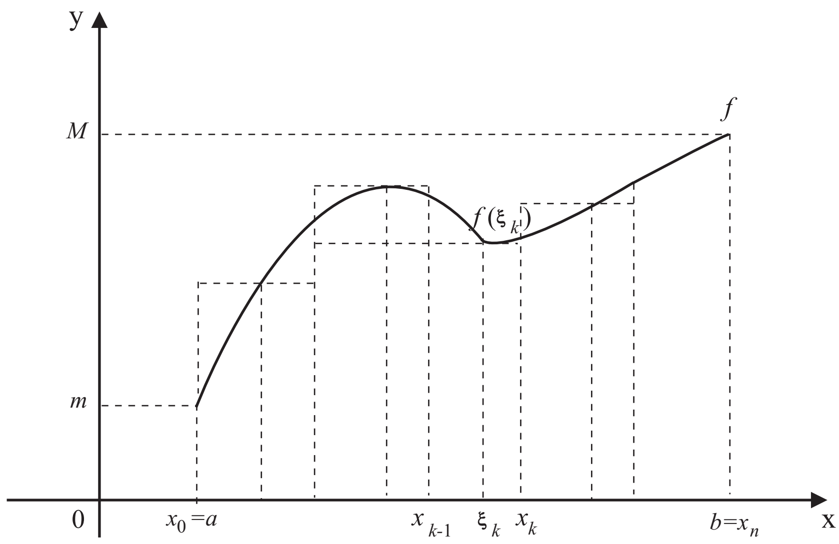

Fig. 1

Cauchy demonstrou que quando $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, existe o limite finito de S_P quando $\max(x_k - x_{k-1})$ converge para zero, qualquer que seja a partição P de $[a, b]$. A este limite ele denominou *integral da função contínua* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Representou por

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

notação que, segundo ele, deve-se a Fourier.

Relacionou, por meio do teorema a seguir, as noções de integral e derivada.

Teorema de Cauchy. Suponha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua, derivável, com derivada $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então vale a igualdade:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \tag{2}$$

Observação 1. Este denomina-se Teorema Fundamental do Cálculo.

Demonstração: Considere-se uma partição P do intervalo $[a,b]$, cf. (1). Por cálculo simples, verifica-se:

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})].$$

Sendo $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, resulta:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

teorema do valor intermediário de Cauchy, com $x_{k-1} < \xi_k < x_k$.

Daí resulta que

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f'(\xi_k). \tag{3}$$

Sendo $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, ela é integrável segundo Cauchy. Portanto, considerando o limite em (3), quando $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$, obtém-se:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

■

Sendo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua é bem definida a função

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds,$$

cf. Figura 2.

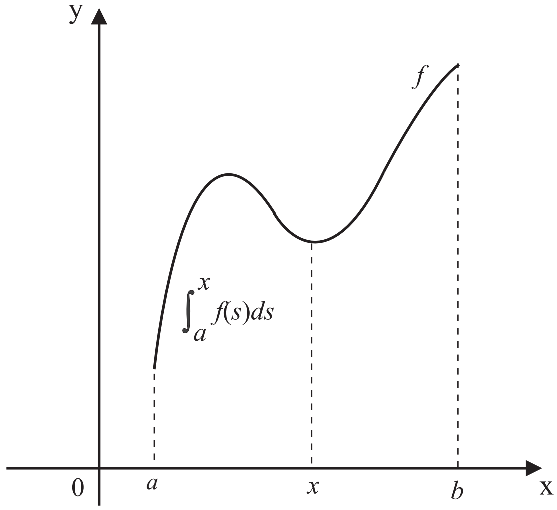

Fig. 2

É simples verificar que F é uma primitiva de f. De fato, para $h > 0$ tal que
$a < x + h < b$, obtém-se:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(s)\, ds = hf(\xi),$$

com $x < \xi < x + h$, pois f é contínua. Resulta, da continuidade da f, que quando $h \to 0$ obtém-se:

$$F'(x) = f(x). \tag{4}$$

■

Assim, é *grande* a classe das primitivas de funções contínuas. De (4) e da continuidade da f e do Teorema de Cauchy, obtém-se:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{5}$$

Deste modo, para o cálculo da integral de Cauchy é suficiente o conhecimento de uma primitiva. Este método é fundamental nas aplicações. A relação (5) entre a integral e uma de suas primitivas é conhecida por *fórmula de Newton-Leibniz.*

Quarta Fase

Riemann (1826-1866)

Darboux (1842-1917)

O conceito de integral de Riemann é uma extensão do método de Cauchy, ao caso em que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é *apenas limitada*, não necessariamente contínua, como no caso de Cauchy.

De fato, suponha-se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e P uma partição de $[a,b]$ como em (1). Repete-se a metodologia como no caso de Cauchy, obtendo-se:

$$\mathcal{S}_P = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k),$$

com $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada.

Se $\mathcal{S}_P$ possui limite finito, quando $\max(x_k - x_{k-1})$ converge para zero, diz-se que f é integrável à Riemann e ao limite denomina-se integral de Riemann da f limitada representando-se por:

$$(R) \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Obtém-se, também, um teorema fundamental do cálculo como segue.

Teorema de Riemann. Supõe-se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada, integrável à Riemann, derivável com $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável à Riemann. Então vale a igualdade:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Demonstração: Análoga ao caso contínuo de Cauchy.

$\blacksquare$

Lebesgue provou que a classe das funções integráveis à Riemann não é tão grande quando comparada às contínuas. Recorda-se, a seguir, o argumento de Lebesgue.

Definição 2. Diz-se que um subconjunto $E \subset [a,b]$ possui medida nula, quando, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma família enumerável de intervalos abertos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, satisfazendo às condições:

(i) $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, os I_k cobrem E

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{amp} I_k < \varepsilon$.

Lebesgue provou que uma condição necessária e suficiente para que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada, seja integrável à Riemann é que o conjunto dos pontos de descontinuidade da f, possua medida nula.

Analisando o teorema fundamental do cálculo, segundo Riemann reformula-se com $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ a menos de um conjunto de medida nula, o mesmo acontecendo à sua derivada $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Com objetivo de melhorar o conceito de integral de Riemann, Darboux definiu as integrais inferior e superior para funções limitadas. Será feita uma rápida revisão.

Considere-se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada, e uma partição P de $[a,b]$, cf. (1). Represente-se por $J_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$ e define-se:

$$s_k = \inf_{x \in J_k} f(x), \qquad S_k = \sup_{x \in J_k} f(x),$$

ambos finitos porque $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada.

São definidas as somas inferior e superior de Darboux, referentes a partição P, do modo seguinte:

$$s_P = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) s_k\,; \qquad S_P = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) S_k\,.$$

Quando P varia obtém-se os conjuntos de números reais $\{s_P\}$ e $\{S_P\}$, de somas inferiores e superiores. Prova-se que $\{s_P\}$ é limitado superiormente e $\{S_P\}$ inferiormente. Logo, o primeiro possui um supremo e o segundo um ínfimo, finitos. Define-se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P \{s_P\}, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P \{S_P\}.$$

Estes números são denominados, respectivamente, integral inferior e superior, de Darboux da função limitada f.

Tem-se:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Quando houver igualdade diz-se que f é integrável em $[a,b]$ e esta integral é a de Riemann.

Exemplo 1. Considere a função definida em $[a,b]$ por

$$\chi(x) = \left|\begin{array}{ll} 1 & \text{se } x \text{ racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ irracional} \end{array}\right.$$

Em qualquer partição P de $[a, b]$, há nos intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ racionais e irracionais. Resulta, daí, que

$$\underline{\int_a^b} \chi(x)\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} \chi(x)\, dx = 1.$$

Portanto χ não é integrável à Riemann-Darboux.

$\blacksquare$

Quinta Fase

Lebesgue (1875-1941)

Em 1901 Lebesgue publicou uma pequena nota no "C.R. Acad. Sci. Paris, 132, (1901) pp. 86-88", completando um século em 2001. Aliás, o conteúdo desta nota não ocupa mais de uma página. Nela, Lebesgue muda de modo profundo a maneira de definir a integral idealizada por Riemann-Darboux.

Dada a relevância para o desenvolvimento da Análise Matemática, por ocasião do centenário da nota de Lebesgue, op. cit., J.M. Bony, G. Choquet, G. Lebeau, publicaram: "Le centenaire de l'integrale de Lebesgue, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, (2001) pp. 85-90", salientando a profunda mudança na Análise Matemática motivada pelas idéias de Lebesgue.

Para definir seu novo conceito de integral, Lebesgue faz a observação que é repetida a seguir.

Supõe $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, limitada, crescente, sendo m, M, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f em $[a, b]$, veja Figura 3.

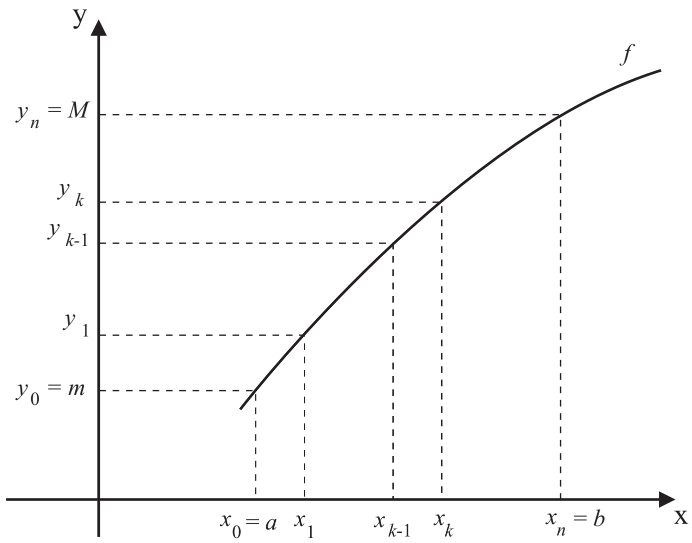

Fig. 3

Considere-se uma partição P de $[a,b]$ em intervalos $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\ldots,n$. Esta determina uma partição em intervalos $[y_{k-1},y_k]$, $k=1,\ldots,n$, de $[m,M]$. Reciprocamente, em face de ser f crescente em $[a,b]$, uma partição de $[m,M]$ em intervalos $[y_{k-1},y_k]$, $k=1,\ldots,n$, determina uma partição de $[a,b]$ em intervalos $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\ldots,n$. Portanto, no caso crescente, qualquer método de partição de $[a,b]$ ou $[m,M]$ conduz a um mesmo conceito de integral, considerando-se:

$$s_P=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})y_{k-1} \quad \text{e} \quad S_P=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})y_k\,. \tag{6}$$

Conclui Lebesgue que no caso em que f é crescente, limitada, obtém-se as integrais inferior e superior de Riemann-Darboux com partições de $[a,b]$ ou $[m,M]$, conduzindo ao mesmo conceito de integral. O caso decrescente limitado é análogo.

Suponha $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ limitada mas não necessariamente monótona, cf. Figura 4.

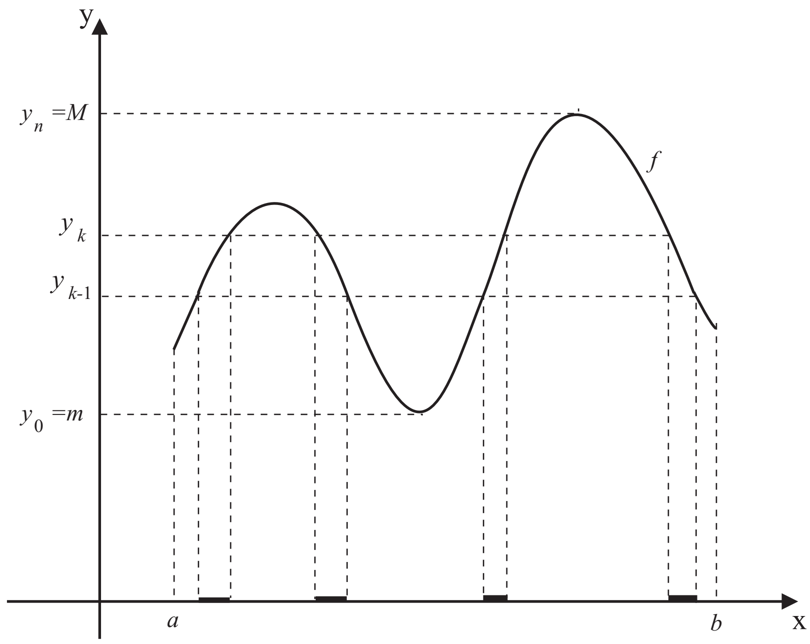

Fig. 4

Uma partição em $[a, b]$ em intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, permite definir as somas de Darboux conduzindo a um conceito de integral de Riemann.

Entretanto, fazendo-se uma partição $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \ldots, n$, $y_0 = m$, $y_n = M$, *conclui-se que em* $[a, b]$ *não se tem uma partição em intervalos, veja* Fig. 4, *para um caso simples.* Em $[a, b]$ obtém-se os conjuntos:

$$\{x \in [a, b];\ y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\},$$

que, no caso Fig. 4, compõe-se da união de quatro intervalos, sem ponto comum. *Se f for muito oscilante em $[a, b]$ a partição de $[m, M]$ determina subconjuntos bem gerais em $[a, b]$.*

Assim, segue-se um método heurísitco para concluir a nova definição proposta por Lebesgue.

De fato, da partição $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \dots, n$, $y_0 = m$, $y_n = M$, de $[m, M]$, resulta em $[a, b]$ a partição

$$E_k = \big\{x \in [a, b];\, y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\,,\ k = 1, \dots, n\big\}, \tag{7}$$

mas em subconjuntos E_k .

Desejando-se manter as somas (6) para obter o novo conceito de Lebesgue, surgem os problemas:

(i) Como atribuir aos E_k dados por (7) um número positivo que corresponda a "medida" dos E_k como $x_k - x_{k-1}$ mede o comprimento dos intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$?

Suponha resolvido este problema. A cada E_k , dado por (7), atribui-se um número positivo representado por $\mu(E_k)$, que se lê "medida de conjunto E_k", generalizando o conceito de amplitude do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. A estes conjuntos E_k aos quais atribui-se uma medida, *Lebesgue denominou mensuráveis. Os intervalos* $[x_{k-1}, x_k]$ *são mensuráveis.*

Desta forma, as somas (6) são reescritas, no caso de partição em $[m, M]$ em intervalos $[y_{k-1}, y_k]$, $y_0 = m$, $y_n = M$, $k = 1, \dots, n$, sob a forma:

$$s_P = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\, \mu(E_k) \quad \text{e} \quad S_P = \sum_{k=1}^{n} y_k\, \mu(E_k). \tag{8}$$

Resolvida esta etapa, surge um problema crucial:

(ii) Para quais funções limitadas $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é possível atribuir uma "medida" $\mu(E_k)$ aos conjuntos E_k , da partição de $[a, b]$? Dito de modo equivalente, para quais funções $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, limitadas, os conjuntos E_k de $[a, b]$ são mensuráveis?

Deste modo, para responder a questão (ii) *Lebesgue restringe as funções limitadas à classe que ele denominou "funções mensuráveis."*

Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada, denominou "mensurável" quando para todo par de números $\alpha < \beta$, o conjunto

$$\big\{x \in [a,b];\ \alpha < f(x) < \beta\big\},$$

for "mensurável".

Conclui-se que tudo fica em ordem para as funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitadas e mensuráveis. Ele observa que as funções contínuas a menos de conjunto de medida nula são exemplos de funções mensuráveis.

Conclusão. Aceitando-se as noções de conjunto e função mensurável, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for limitada e mensurável as somas s_P e S_P definidas em (8) estão bem definidas. Assim, define-se as integrais inferior e superior, respectivamente, por $\sup\limits_P\{s_P\}$ e $\inf\limits_P\{S_P\}$. Quando estas integrais forem iguais, a este valor comum denomina-se integral de Lebesgue da função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, representada por

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lebesgue provou que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for limitada e mensurável, então f é integrável.

Uma primeira versão do teorema fundamental do cálculo a semelhança de Cauchy e Riemann é simples.

Teorema de Lebesgue. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada, mensurável, derivável com derivada $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f' é integrável, à Lebesgue, e

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Observação 2. Com a metodologia de Lebesgue, as propriedades das funções são válidas a menos de um conjunto de medida nula. Diz-se que a propriedade vale quase sempre.

Idéia da Demonstração

- f é contínua quase sempre em $[a, b]$ porque é derivável. Estende-se f, por continuidade, ao intervalo $[a, b+1]$ definindo:

$$f(x) = f(x) + (x - b)f(b) \quad \text{se} \quad b < x < b + 1.$$

- Considera-se a sucessão $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\phi_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right].$$

As ϕ_n são mensuráveis porque f é contínua em $[a, b+1]$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = f'(x)$

- f' é mensurável porque é limite de ϕ_n mensuráveis. (Por hipótese f' é limitada.) Logo f' é integrável à Lebesgue.

- Teorema do valor intermediário de Cauchy:

$$\phi_n(x) = f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right),\ 0 < \theta < 1.$$

Portanto, as funções ϕ_n são limitadas por f' é limitada por hipótese. Logo ϕ_n são mensuráveis e limitadas obtendo-se:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dx.$$

Tem-se

$$\int_a^b \phi_n(x)\,dx = n\int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right)dx - n\int_a^b f(x)\,dx.$$

Faça na primeira integral $t = x + \dfrac{1}{n}$, obtendo-se:

$$\int_a^b \phi_n(x)\,dx = n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - n\int_a^b f(t)\,dt.$$

Daí obtém-se:

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi_n(x)\,dx = n\int_{a+\frac{1}{n}}^{a} f(t)\,dt + n\int_a^{b+\frac{1}{n}} f(t)\,dt- \\ - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(t)\,dt\end{aligned}$$

ou

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \lim_{n\to\infty} n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

■

Comparando-se os enunciados obtém-se: para Cauchy f' deve ser contínua em $[a,b]$, para Riemann-Darboux f' deve ser integrável (logo contínua quase sempre) e para Lebesgue f' deve ser limitada.

Desejando-se ensinar a integral de Lebesgue, nos cursos básicos de matemática, seguindo a metodologia idealizada por Lebesgue, é necessário ensinar a medida de Lebesgue, as funções mensuráveis para em seguida dar a definição de integral. Com o progresso da análise matemática na segunda metade do século XX, encontrou-se métodos mais eficientes para o ensino deste imprescindível tópico na formação dos estudantes. Por esta razão *Frederick Riesz* idealizou um método para o ensino da integral de Lebesgue bem mais didático que o original de Lebesgue.

Uma formulação precisa do Teorema Fundamental do Cálculo, será dada a seguir, idealizada por Lebesgue em uma classe mais restrita de funções.

Definição 3. Diz-se que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita de subintervalos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ de $[a,b]$, com $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$, satisfazendo

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

tem-se, necessariamente,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Claro que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for absolutamente contínua ela é uniformemente contínua logo contínua. Para concluir este fato é suficiente considerar $n = 1$ na definição anterior.

Considere-se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e a partição P de $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

definindo-se:

$$V_P = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Se supremo de V_P, quando varia a partição P de $[a,b]$, for finito, diz-se que f é de variação limitada em $[a,b]$.

Diz-se que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana, quando existe $K > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in [a,b]$ se tem:

$$|f(x) - f(y)| < K|x - y|.$$

As funções deriváveis com derivada limitada são exemplos de funções Lipschitizianas.

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitiziana. Então dada a partição P de $[a,b]$, obtém-se:

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq K|x_k - x_{k-1}|.$$

Logo $V_P \leq K(b-a)$, provando que f é de variação limitada.

Considere a função contínua

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} x \cos \dfrac{\pi}{2x}, \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad \text{se} \quad x = 0. \end{array} \right.$$

Esta não é de variação limitada.

Basta considerar a partição de $[a,b]$ dada por:

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

obtém-se:

$$V = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

que não é limitada, pois $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ diverge.

As funções de variação limitadas f em $[a,b]$, possuem derivadas f' limitadas quase sempre. As funções absolutamente contínuas são de variação limitada.

Daí, tem-se o Teorema Fundamental do Cálculo de Lebesgue.

Teorema de Lebesgue. Suponha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, absolutamente contínua. Então f é derivável quase sempre em $[a,b]$, sua derivada f' é integrável em $[a,b]$ e se tem:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \qquad \blacksquare$$

Observações Finais

Há várias generalizações das integrais de Riemann e Lebesgue, permitindo outras formulações do Teorema Fundamental do Cálculo. No contexto de Lebesgue são bem conhecidas as de O. Perron e A. Denjoy.

Em 1960 foi investigado por R. Heinstock um conceito de integral baseado no processo de Riemann, do qual sai uma formulação do Teorema Fundamental do Cálculo. Ele denominou Integral de Riemann Generalizado. Também Kurzweill obteve uma generalização da integral de Riemann motivado pelo estudo do teorema de existência para equações ordinárias. Por esta razão, esta integral denomina-se de Kurzweill-Heinstok. Consulte-se a exposição: R.G. Bartle - Return to the Riemann Integral - Am. Math. Monthly (1966), pp. 1625-1632.

■