LIÇÕES DE ANÁLISE MATEMÁTICA

PARTE 1

Luis Adauto Medeiros (IM-UFRJ)
Sandra Mara Malta (LNCC-MCT)
Juan Límaco (IM-UFF)
Haroldo Rodrigues Clark (IM-UFF)

Rio de Janeiro - RJ
2006

M488L

Medeiros, Luis Adauto da Justa, 1926-
Lições de análise matemática/Luis Adauto Medeiros, Sandra Mara Malta, Juan Limaco, Haroldo Rodrigues Clark. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2005

2pt, ; 31cm

Inclui Bibliografia.

1. Análise matemática. I. Malta, Sandra Mara Cardoso II. Limaco Ferrel, Juan III. Clark, Haroldo Rodrigues IV.Universidade Fede-ral do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática

CDD 515

ISBN: 85-87674-12-9

Prefácio

Estas Lições de Análise Matemática estão divididas em duas partes e contém as exposições feitas pelos autores em 1999 no IM-UFF e no verões de 2001 e de 2003 no LNCC-MCT.

O objetivo da Parte 1 é examinar as noções básicas da análise matemática em dimensão um, iniciando com o processo construtivo dos números reais segundo Dedekind. A seguir, são examinadas as noções de limite, continuidade, continuidade uniforme, derivada e a integral no sentido de Riemann. Convém salientar a quem pretender empregar este texto no ensino que o capítulo sobre números reais deve ser visto como introdutório, não entrando em detalhes sobre a construção dos números reais. Deve-se explorar o aspecto geométrico da natureza do corte de Dedekind e as operações vistas sem muitos detalhes. É suficiente apenas que seja entendida a noção de número real por meio dos cortes de Dedekind e a noção de classes contíguas de números reais e sua equivalência com o corte. Esta idéia aparecerá nas várias demonstrações que se seguem nos capítulos posteriores. No ensino da matemática as figuras geométricas são fundamentais para o entendimento das idéias.

A Parte 2 contém alguns complementos e uma coleção de exercícios com resolução que permitem ao aluno visualizar os conceitos introduzidos na Parte 1 aplicados em exemplos objetivos. Acredita-se que num primeiro estudo esta é uma boa metodologia de ensino.

Os exames aplicados durante os cursos para a verificação da aprendizagem constaram da demonstração de um resultado da Parte 1 e de dois exercícios da Parte 2 ou de exercícios análogos.

Agradecemos ao colega Nelson Nery, professor do DM - UFPB, pelas sugestões e observações ao texto inicial, as quais melhoraram substancialmente esta segunda tiragem.

Os Autores
Rio de Janeiro, junho de 2006.

Sumário

Capítulo 1

Números Reais

1.1 Introdução

O objetivo do presente capítulo é fazer um esboço da construção dos números reais, a partir dos números racionais, pelo método dos cortes idealizados por Dedekind. Inicia-se com a dificuldade de resolver a equação $x^2 - 2 = 0$ nos racionais para motivar a definição dos irracionais. A noção de classe contígua será empregada em várias demonstrações nos capítulos que se seguem.

Admite-se que o leitor conheça a aritmética dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

dos inteiros

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\},$$

e dos racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nos racionais são definidas as operações:

(a) Adição: a cada par a, b de números racionais associa-se um único racional $a + b$ denominado soma de a com b, satisfazendo às condições:

- comutatividade: $a + b = b + a$, para todo $a, b, \in \mathbb{Q}$,
- associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$,
- existe um racional 0 tal que $0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{Q}$. O racional 0 denomina-se o *zero de* $\mathbb{Q}$
- para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe $-a \in \mathbb{Q}$, denominado o simétrico de a, tal que $a + (-a) = 0$.

(b) Multiplicação: a cada par a, b de números racionais associa-se um único número racional ab, denominado produto dos racionais a e b, satisfazendo as condições:

- comutatividade: $ab = ba$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}$,
- associatividade: $(ab)c = a(bc)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$,
- distributividade: $a(b + c) = ab + ac$ para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$,
- existe um racional 1 tal que $1a = a$ para todo $a \in \mathbb{Q}$. O racional 1 denomina-se unidade de $\mathbb{Q}$
- para todo $a \neq 0$ existe um racional a^{-1}, denominado inverso de a, tal que $aa^{-1} = 1$.

Portanto, $\mathbb{Q}$ com as operações anteriores é um *corpo*. Geométricamente o corpo $\mathbb{Q}$ é representado por meio dos pontos de uma reta na qual foi escolhida uma origem, que representa o racional 0, um sentido e uma unidade de medida.

Além disso, existe no corpo $\mathbb{Q}$ uma relação de ordem $a \leq b$, dita a menor ou igual a b, tornando $\mathbb{Q}$ um corpo ordenado. Apesar de dados dois racionais a e b quaisquer haver sempre um racional c[1] tal que $c = (a + b)/2$, eles não são suficientes para preencher os pontos da reta. No que se segue estuda-se um problema que tornará clara esta asserção.

Inicia-se recordando um problema de matemática da história dos Gregos. Conta-se que no templo de Apolo, situado na ilha de Delos-Grécia, existia um altar com forma geométrica de uma figura que hoje é conhecida como cubo. Havendo uma peste em Atenas um habitante da cidade, em busca de auxílio divino, dirigiu-se à Delos para consultar sobre a extinção da peste. A divindade respondeu que se fosse edificado um altar no templo de Apolo cujo volume medisse o dobro do existente, mantendo-se a mesma forma, a peste seria eliminada.

Em termos matemáticos a formulação do problema seria simples. Dado um cubo de aresta a, construir um cubo de aresta x cujo volume seja o dobro do volume do cubo conhecido. Conseqüentemente, deveria ser resolvida a equação algébrica:

$$x^3 = 2a^3,$$

[1] diz-se que os racionais são densos em si na ordem

ou, considerando-se $a = 1$, ter-se-ia $x^3 = 2$.

A dificuldade residiria em construir a solução desta equação por meio, apenas, dos instrumentos divinos dos Gregos - a régua e o compasso. Demonstra-se que não existe em $\mathbb{Q}$ a solução da equação $x^3 = 2$.

Este fato será empregado para completar o corpo $\mathbb{Q}$ obtendo-se o corpo dos reais onde existe x tal que $x^3 = 2$. Para simplificar o cálculo aritmético considera-se, a seguir, no Problema 1, uma versão plana do problema apresentado, a qual servirá de motivação para introduzir a definição dos números irracionais segundo Richard Dedekind (1831-1916). Cumpre salientar que os gregos não resolveram este problema.

Problema 1 - Calcular o lado de um quadrado cuja área seja o dobro da área de um quadrado conhecido.

Considere um quadrado de lado a e seja x o lado do quadrado que se deseja determinar. Tem-se, $x^2 = 2a^2$ como equação que traduz o enunciado do problema. Supondo $a = 1$, o que não particulariza o problema, encontra-se a equação

$$x^2 = 2. \tag{1.1}$$

Os números, até aqui, conhecidos, são os do corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais.

A equação (1.1) não possui solução x em $\mathbb{Q}$, isto é, não existe racional x solução de (1.1). De fato, se assim fosse existiria um racional $x = p/q$, $q \neq 0$, p, q sem divisor comum, tal que $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é par, isto é, $p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$. Conseqüentemente,

$$4m^2 = 2q^2 \quad \text{ou} \quad q^2 = 2m^2$$

provando que q^2 é par, isto é, q par. Portanto, p e q são pares o que conduz a uma contradição pois, por hipótese, eles são primos entre si (não possuem divisor comum). Conclui-se que a equação (1.1) não possui solução no corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais.

O estudo da equação (1.1) servirá de motivação para ampliar o corpo $\mathbb{Q}$, obtendo-se um corpo denominado *corpo dos reais* e denotado por $\mathbb{R}$. Com efeito, inicia-se estudando aproximações racionais da solução x de (1.1).

Denomina-se raiz quadrada de 2 *a menos de uma unidade, por falta*, ao maior número inteiro n tal que

$$n^2 < 2 < (n+1)^2. \tag{1.2}$$

O número $n+1$ é denominado de raiz quadrada de 2 *a menos de uma unidade por excesso.* É claro que $n = 1$ em (1.2) implica que a solução de (1.1) satisfaz: $1 < x < 2$.

A seguir, serão feitas aproximações decimais da solução x de (1.1), que encontra-se entre 1 e 2.

Denomina-se raiz quadrada de 2 a menos de 1/10 por falta, ao maior número inteiro de décimos cujo quadrado é menor do que 2. Isto equivale a

$$\left(\frac{n}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{n+1}{10}\right)^2. \tag{1.3}$$

O número $(n+1)/10$ é a raiz quadrada de 2 por excesso a menos de um décimo. Para o cálculo desta aproximação divida-se o segmento de reta $[1, 2]$ em 10 partes iguais por meio dos pontos

$$1,\ 1.1,\ 1.2,\ 1.3,\ 1.4,\ 1.5,\ 1.6,\ 1.7,\ 1.8,\ 1.9,\ 2.$$

Obtém-se

$$(1.4)^2 < 2 < (1.5)^2.$$

Assim, 1.4 é a solução aproximada de (1.1) a menos de 1/10 por falta e 1.5 por excesso. Logo, a solução x da equação (1.1) encontra-se no segmento de extremos 1.4 e 1.5.

Para a obtenção das soluções aproximadas de (1.1) a menos de $1/10^2$ por falta e por excesso, divide-se o segmento de reta [1.4, 1.5] em dez partes iguais por meio dos pontos:

$$1.4,\ 1.41,\ 1.42,\ 1.43,\ 1.44,\ 1.45,\ 1.46,\ 1.47,\ 1.48,\ 1.49,\ 1.5.$$

Procedendo-se como no caso anterior obtém-se:

$$(1.41)^2 < 2 < (1.42)^2,$$

isto é, 1.41 é a solução de (1.1) a menos de 1/100 por falta e 1.42 por excesso. Logo, a solução x da equação (1.1) encontra-se no intervalo da reta de extremos 1.41 e 1.42.

Continuando o processo, de modo análogo aos casos acima, são encontradas as soluções aproximadas a menos de

$$1/10^3,\ 1/10^4,\ \ldots,\ 1/10^n.$$

Serão construídas as classes de aproximações F, por falta, e E, das por excesso, da solução da equação (1.1), isto é,

$$\begin{aligned} F &= \{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \ldots\}, \\ E &= \{2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ 1.4143,\ \ldots\}. \end{aligned}$$

Os quadrados dos números de F são menores que 2 e os de E são maiores. De modo geral, os números de F são da forma: $1a_1a_2\dots a_n$ e, os de E, da forma, $1a_1a_2\dots(a_n+1)$, sendo a_i um algarismo de 0 a 9. Tem-se, portanto,

$$1a_1a_2\dots a_n\dots < x < 1a_1a_2\dots(a_n+1)\dots$$

Representando-se por x_n os elementos de F, e por y_n os de E, tem-se

$$y_n - x_n = \frac{1}{10^n}, \quad y_n > x_n, \quad \text{para todo} \quad n = 1, 2, \dots .$$

Proposição 1.1 - Dado $\delta = 1/10^k$, $k = 1, 2, \dots$, qualquer, existem $x \in F$, $y \in E$ tais que $y - x < \delta$.

Demonstração: De fato, seja $n \in \mathbb{Z}$, tal que $1/10^n < 1/10^k$. Logo, quaisquer $x_n \in F$ e $y_n \in E$ com $n > k$ são tais que $y_n - x_n < \delta$.

Proposição 1.2 - Para cada $\delta = 1/10^k$, k inteiro positivo, existem $x \in F$, $y \in E$ tais que $2 - x^2 < \delta$ e $y^2 - 2 < \delta$.

Demonstração: Como na Proposição 1.1, dado $\delta = 1/10^k$ existem $x \in F$ e $y \in E$ tais que $y - x < \delta/4$. Sendo x e y tais que $1 < x$ e $y < 2$, obtém-se

$$y + x < 4 \quad \text{e} \quad y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) < 4(y-x) < \delta.$$

De $x \in F$ e $y \in E$ resulta que $x^2 < 2$ e $y^2 > 2$. Logo, adicionando e subtraindo 2 à desigualdade acima, encontra-se $(y^2-2)+(2-x^2) < \delta$, isto é

$$(y^2 - 2) < \delta \quad \text{e} \quad (2 - x^2) < \delta.$$

Proposição 1.3 - Não existe máximo em F nem mínimo em E.

Demonstração: De fato, para cada $x \in F$, aproximação por falta, existe uma aproximação $x_1 > x$ ainda por falta. O mesmo acontece com a classe E das aproximações por excesso.

Por meio da construção das classes F e E (e de suas propriedades) é possível definir a solução x da equação (1.1) como idealizado por *Richard Dedekind*.

Considera-se uma clase, L, dos números racionais positivos x, tais que $x^2 < 2$, o número zero e os racionais negativos. O restante dos racionais, constitue o complemento de L em $\mathbb{Q}$, representado por R. Segue-se que $F \subset L$ e $E \subset R$. Não existe um racional máximo de L ou mínimo de R. Portanto, é natural definir-se um objeto α, não racional, não pertencente a L nem a R mas aproximado por L e R. Este objeto define-se como sendo a única solução da equação (1.1) e representa-se por $\sqrt{2}$. Ele é denominado raiz quadrada de 2 e não estando nem em L e nem em R, sendo $\mathbb{Q} = L \cup R$, diz-se que a solução x de (1.1) *é um número irracional*.

1.2 Cortes de Dedekind

O processo anterior para a definição de solução da equação $x^2 = 2$, isto é, da raiz quadrada de 2, serve como motivação para introduzir a noção de número irracional, segundo Dedekind.

Definição 1.1- Um *Corte de Dedekind*, no corpo $\mathbb{Q}$, é um par (A, B) de classes de racionais satisfazendo às seguintes condições:
(D1) A e B contém todos os racionais $\mathbb{Q}$ de modo que cada número

racional ou pertence a A ou a B;
(D2) Cada racional de A é menor que cada racional de B.

Observação 1.1 - Analisando um corte como na Definição 1.1 deduz-se que cada uma das alternativas, abaixo, pode acontecer:
(a) A classe A possui máximo (B não possui mínimo);
(b) A classe B possui mínimo (A não possui máximo);
(c) A não possui máximo nem B possui mínimo.
Nos casos (a) e (b) o par (A, B) define um número racional r que é o máximo de A ou o mínimo de B. A seguir, ilustrar-se este fato com um exemplo:

Exemplo 1.1 - Suponha A o conjunto dos racionais $x \leq 3/4$ e B o racionais $y > 3/4$. Logo, (A, B) é um corte em Q definindo o racional $3/4$.

No caso (c) não há máximo em A nem mínimo em B. Como em $\sqrt{2}$, diz-se que o par (A, B) define um *novo objeto denominado o número irracional*.

O método empregado para definir $\sqrt{2}$ por corte de Dedekind pode ser adotado para definir $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, ... Define-se também o número irracional π por meio dessa mesma metodologia (ver Boletim do GEPEM, no. 30, Ano XVII, 1o. semestre (1992), p. 22-27) reproduzido, a seguir, na seção 1.9, Complementos e Exercícios.

Portanto, quando se pensa em número irracional pensa-se no corte (A, B) nas condições 3. Diz-se o número $\alpha = (A, B)$. Ele é o separador das classes de racionais e não pertence a A nem a B.

Com este processo o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais foi aumentado dos irracionais pelo método dos cortes de Dedekind constituindo um novo corpo, denominado corpo dos números reais e representado por $\mathbb{R}$. Posteriormente, serão definidas as operações em $\mathbb{R}$.

Deseja-se, a seguir, estender a $\mathbb{R}$ a noção de corte. Para tal é necessário definir uma relação de ordem.

1.3 Relações de Igualdade e Ordem em $\mathbb{R}$

Dados os números reais $\alpha = (A_1, B_1)$ e $\beta = (A_2, B_2)$, diz-se que $\alpha = \beta$ quando $A_1 = A_2$ e $B_1 = B_2$. Quando α e β forem racionais, α o máximo de A_1, β o mínimo de B_2, então a igualdade das classes exclui α e β tendo-se $\alpha = \beta$. Esta relação binária é de fato uma relação de equivalência, ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva.

Considere os números reais $\alpha = (A_1, B_1)$ e $\beta = (A_2, B_2)$. Diz-se que $\alpha < \beta$ quando A_1 estiver contida em A_2 e B_2 em B_1.

Dados dois números reais α e β tem-se um dos três casos:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta \quad \text{ou} \quad \alpha > \beta.$$

A relação binária $\alpha < \beta$ (ou $\alpha > \beta$) é uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ que coincide com a relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

Dados dois racionais r e s o número racional $(r+s)/2$ está situado entre r e s. Assim, diz-se que o corpo $\mathbb{Q}$ é denso em si, como já foi mencionado.

Uma questão fundamental na construção de $\mathbb{R}$, por meio de cortes de Dedekind em $\mathbb{Q}$, é saber se repetindo o processo em $\mathbb{R}$ encontram-se novos objetos não pertencentes a $\mathbb{R}$. Demonstra-se, no próximo resultado, que todo corte de Dedekind em $\mathbb{R}$ determina um objeto em $\mathbb{R}$. Isto equivale a dizer que $\mathbb{R}$ *é contínuo*.

Proposição 1.4 - Todo corte de Dedekind em $\mathbb{R}$ determina um objeto de $\mathbb{R}$.

Demonstração: Seja (S_1, S_2) um corte de Dedekind em $\mathbb{R}$. Um corte em $\mathbb{R}$ define-se de modo análogo ao corte em $\mathbb{Q}$. Portanto, obtém-se:
(C1) Todo número real pertence exclusivamente a S_1 ou a S_2;
(C2) Todo número $s_1 \in S_1$ é menor que todo $s_2 \in S_2$.
Deve-se provar que S_1 possui um máximo ou S_2 um mínimo. Considere (R_1, R_2) um corte em $\mathbb{Q}$ construído pelos racionais, R_1, de S_1, e, R_2, de S_2. Então (R_1, R_2) define um número $\alpha \in \mathbb{R}$ e α pertence a S_1 ou a S_2.

Será demonstrado que se $\alpha \in S_1$ ele é máximo de S_1 ou que se $\alpha \in S_2$ ele é mínimo de S_2. De fato, suponha que $\alpha \in S_1$. Seja $\beta \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta > \alpha$ e $r \in \mathbb{R}$ com $\alpha < r < \beta$. Então, sendo $r > \alpha$ tem-se $r \in R_2 \subset S_2$, pois $\alpha = (R_1, R_2)$. Tem-se, porém, $\beta > r$ então $\beta \in S_2$. Portanto, todo número real maior que α pertence a S_2. Logo, não existe em S_1 um número real maior que α. Assim, α é máximo de S_1. (Diz-se por esta razão que $\mathbb{R}$ é contínuo).

1.4 Classes Contíguas de Racionais

Observe que para definir o conceito de número real, por meio do corte de Dedekind, considera-se um par de classes (A_1, A_2) contendo todos os racionais. A noção de classe contígua vai permitir definir o número real sem utilizar todos os racionais.

Definição 1.2 - Diz-se que dois subconjuntos infinitos H e K de números racionais são *classes contíguas* quando verificam as condições:
(K1) Todo número de H é menor que todo número de K;
(K2) Para cada $\epsilon > 0$ existem $h \in H$ e $k \in K$ tais que $k - h < \epsilon$.

Proposição 1.5 - Se (A_1, A_2) é um corte de Dedekind nos racionais então A_1 e A_2 são classes contíguas de racionais.

Demonstração: De fato, a condição (K1) é imediatamente verificada por ser (A_1, A_2) um corte de Dedekind. Para verificar (K2) considere $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ quaisquer e $\epsilon > 0$ dado em $\mathbb{R}$. Seja $0 < \sigma < \epsilon$ um racional e defina a progressão aritmética de racionais: $a_1,\, a_1 + \sigma,\, a_1 + 2\sigma,\, \ldots,\, a_1 + n\sigma, \ldots$. Representanto por $a_1 + n\sigma$ o primeiro racional em A_2, então obtém-se $a_1 + (n-1)\sigma \in A_1$, $a_1 + (n+1)\sigma \in A_2$ e $(a_1 + n\sigma) - (a_1 + (n-1)\sigma) = \sigma < \epsilon$.
Portanto, para $\epsilon > 0$ existe $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\alpha_2 - \alpha_1 < \epsilon$.

Demonstra-se que também vale a recíproca da Proposição 1.5, isto é, todo par de classes contíguas de racionais define um corte de Dedekind. De fato, seja (H, K) um par de classes contíguas de $\mathbb{Q}$. Define-se um corte (A_1, A_2) em $\mathbb{Q}$ do seguinte modo:

- A_1 é constituída por todos os racionais menores ou iguais que algum número de H;

- é constituída por todos os racionais maiores ou iguais que qualquer número de K.

Logo, obtém-se que (A_1, A_2) é um corte de Dedekind em $\mathbb{Q}$. De modo análogo define-se classes contíguas em $\mathbb{R}$ e sua equivalência com um corte em $\mathbb{R}$.

Nas aplicações empregam-se aproximações racionais dos números reais. Assim, diz-se que um racional m/n é um valor aproximado do número real α, a menos de $1/n$ por falta quando

$$\frac{m}{n} < \alpha < \frac{m+1}{n}.$$

O número racional $(m+1)/n$, diz-se valor aproximado por excesso, a menos de $1/n$. Na prática são consideradas aproximações decimais, isto é, $n = 10$.

Exemplo 1.2 - Com uma calculadora encontra-se o valor 1.7320508 para a $\sqrt{3}$. Como foi estudado na motivação, veja Problema 1, este número é uma aproximação racional por falta a menos de $1/10^7$. Com esta aproximação dê a idéia de como construir um par de classes contíguas definindo $\sqrt{3}$.

1.5 Operações sobre Números Reais

A seguir são definidas as operações aritméticas sobre números reais obtendo-se o corpo dos reais, representado por $\mathbb{R}$.

O número zero de $\mathbb{R}$, denotado por 0 é definido pelo corte (A_1, A_2), sendo A_1 os números reais negativos e A_2 os positivos. Deste modo, $\alpha = (A_1, A_2)$ será um real positivo quando A_1 contiver racionais positivos e α será negativo quando A_2 contiver negativos.

(a) Adição: Dados dois subconjuntos A e B de racionais representa-se por $A + B$ a coleção dos racionais $x = a + b$ sendo $a \in A$ e $b \in B$.

Considere-se os números racionais $\alpha = (A_1, A_2)$, $\beta = (B_1, B_2)$ e forme-se os subconjuntos $A_1 + B_1$ e $A_2 + B_2$ de racionais. Prova-se que as classes $A_1 + B_1$ e $A_2 + B_2$ são contíguas. De fato, todo racional da primeira é menor que todo da segunda. Dado $\epsilon > 0$ existem $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$ tais que $a_2 - a_1 < \epsilon/2$. Pela mesma razão existem $b_1 \in B_1$ e $b_2 \in B_2$ tais que $b_2 - b_1 < \epsilon/2$. Daí resulta que $(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) < \epsilon$. Logo, $A_1 + B_1$ e $A_2 + B_2$ são contíguas e $(A_1 + B_1, A_2 + B_2)$ é um corte de Dedekind em $\mathbb{Q}$ conforme a Proposição 1.5. O número γ definido por este corte é dado por $\alpha + \beta$ e escreve-se $\gamma = \alpha + \beta$.

Dado $\alpha = (A_1, A_2)$ o número $\alpha' = (-A_2, -A_1)$ é tal que $\alpha + \alpha'$ é o corte que define o número real zero (0). O número real α' denomina-se o simétrico de α. Assim, $\alpha = (A_1, A_2)$ é positivo quando o racional $0 \in A_1$ e negativo quando $0 \in A_2$.

Definição 1.3 - Denomina-se *módulo ou valor absoluto* de um real α, ao próprio α, se $\alpha \geq 0$, e $-\alpha$, se $\alpha < 0$. Representa-se por $|\alpha|$, o módulo de α. Sendo α e β dois números reais prova-se as seguintes propriedades:

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|,$$
$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|,$$
$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|.$$

(b) Multiplicação: Considere-se dois cortes $\alpha = (A_1, A_2)$ e $\alpha' = (B_1, B_2)$, deseja-se definir o produto $\alpha \cdot \alpha'$. Divide-se em dois casos:

- Se α e α' são positivos, o produto é o corte (A, B) onde A contém todos os números negativos e os produtos ab com $a \in A_1$, $b \in B_1$ e $a \geq 0$, $b \geq 0$;
- Se α e α' forem negativos o produto é o produto dos simétricos;
- Se α é positivo e α' é negativo seu produto é o simétrico do produto de (A_1, A_2) pelo simétrico de (B_1, B_2).

Assim, com estas operações, $\mathbb{R}$ é de fato um corpo contendo $\mathbb{Q}$ como subcorpo.

1.6 Potências de Números Reais

Dado α um real positivo e n um inteiro positivo, define-se $\alpha^n = \alpha\alpha \ldots \alpha$, com n parcelas iguais a α. Quando $n = 0$ define-se $\alpha^0 = 1$ e para $n < 0$ (n negativo) define-se $\alpha^n = 1/\alpha^{-n}$.

Note-se que em $\mathbb{R}$ vale a propriedade que se $\alpha > 0$ e $n > 0$ inteiro, existe $\beta \in \mathbb{R}$ solução de $\beta^n = \alpha$. Tal fato foi cuidadosamente feito para $n = 2$ e $\alpha = 2$. Esta propriedade não vale em $\mathbb{Q}$ em geral, como foi visto anteriormente.

Dado $n > 0$, inteiro, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta^n = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ conhecido (veja Parte 2 destas notas, seção 3). Define-se $\beta = \alpha^{1/n}$. Portanto, define-se potência de expoente racional p/q por

$$\alpha^{p/q} = (\alpha^p)^{1/q}.$$

Para definir o caso de expoente real procede-se da seguinte forma. Primeiro, se $\alpha > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ qualquer, considera-se β definido pelo corte (A, B) com A e B racionais. Tomam-se as classes dos racionais

A' e B' definidas do seguinte modo: diz-se que o racional $a' \in A'$ quando a' é menor que algum α^b com $b \in \mathbb{R}$. Sendo $\alpha > 1$ conclui-se que o par (A, B) define um corte de Dedekind em $\mathbb{Q}$, logo define um número real γ que, por definição, toma-se como $\gamma = \alpha^\beta$. Logo, $\beta^\alpha = \gamma$. Por outro lado, se $\alpha < 1$ toma-se

$$\alpha^\beta = 1 \Big/ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\beta$$

e reduz-se ao caso $\alpha > 1$. Define-se também $1^\beta = 1$.

Para os números reais negativos, isto é, quando $\alpha < 0$ os resultados obtidos nos parágrafos anteriores não valem em geral. Assim, $(-1)^{1/2}$ não está definido em $\mathbb{R}$, isto é, a equação $x^2 = -1$ não possui solução em $\mathbb{R}$. De fato, se $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ tem-se $x^2 > 0$.

Observa-se que dados os números reais positivos a e x, $a \neq 1$ demonstra-se que existe um único real y tal que $a^y = x$. O número real y denomina-se o logarítmo de x na base a e representa-se por $y = \log_a x$. Quando $a = 10$ obtém-se os logarítmos decimais. No estudo das sucessões (Capítulo 3) será calculado um número real representado por e. Os logarítimos tendo por base o número e foram criados por *Néper*, são denominados, portanto, *neperianos* e representados por $\ln x$. Tem-se que $y = \ln x$ significa $e^y = x$.

1.7 Interpretação Geométrica

Os números reais são interpretados, geometricamente, como pontos de uma reta na qual escolheu-se um ponto para representar o número zero, um sentido e uma unidade de medida. De fato, considera-se uma reta r e uma unidade de medida. Seja 0 um ponto que é o zero, e $0P$ um segmento que representa a unidade de medida. No ponto P coloca-se o número 1. Assim, serão representados os números $\ldots, \pm n, \ldots, \pm 2, \pm 1, 0$. Neste ente geométrico introduz-se um processo de multiplicar e adicionar segmentos obtendo-se uma estrutura algébrica de corpo. Acrescenta-se um postulado que dá a continuidade da reta. Intuitivamente significa dizer que cortando-se a reta r encontra-se sempre um ponto de r. Verifica-se que este objeto geométrico, denominado pontilhada, é um corpo isomorfo ao corpo dos números reais. Daí dizer-se o corpo $\mathbb{R}$ dos reais ou a reta numérica $\mathbb{R}$. Logo, quando se pensa no número real x pensa-se no extremo do segmento de reta de origem em 0 e terminando em P, com abcissa x. A abcissa é a medida do segmento OP afetada do sinal menos, se P antecede 0, ou sinal mais se P precede 0.

Note-se que estas considerações são meramente intuitivas mas podem ser feitas rigorosamente. Caso o leitor deseje ver detalhes desta construção dos números reais veja L. Landau - *Foundations of Analysis, Chelsea, N.Y., 1948.* Ver também Richard Dedekind - *Essay of Theory of Numbers, Dover Publ. Inc., N.Y., 1963.*

1.8 Sucessões em Ninho

Dado um conjunto Y, denomina-se sucessão, em Y a uma função $f : \mathbb{N} \to Y$, definida em $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ com valores em Y. Sendo $f(n)$ um objeto de Y, representado por y_n, denota-se uma sucessão por $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Veja Capítulo 3.

Denomina-se segmento ou intervalo fechado de $\mathbb{R}$, de extremos $a < b$, ao conjunto de números reais x tais que $a \leq x \leq b$ e representa-se por $[a, b]$.

Define-se (conforme Dirichlet (1887)) como função $f : X \to Y$, um objeto constituído por dois conjuntos - X o domínio da função, Y o conjunto contradomínio da função - e uma regra geral que a cada $x \in X$ associa um único $y \in Y$. Denota-se uma função f por

$$f : X \to Y; \quad y = f(x) \quad \text{ou} \quad x \to f(x).$$

Considere a sucessão de intervalos fechados $[x_n, y_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, da reta numérica $\mathbb{R}$, a qual representa-se por I_n.

Definição 1.4 - Diz-se que $I_n = [x_n, y_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ é uma *sucessão em ninho, de* $\mathbb{R}$, se são satisfeitas as seguintes condições:
(N1) A sucessão I_n é decrescente, isto é, $I_n \supset I_{n+1}$ para $n = 1, 2, \ldots$
(N2) Para cada $\epsilon > 0$ em $\mathbb{R}$ existe n tal que $y_n - x_n < \epsilon$.

Observação 1.2 - Note que a propriedade $(N1)$ equivale a dizer que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, sendo $x_n < y_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

Proposição 1.6: (*Cantor 1845-1918*) Seja $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em ninho de $\mathbb{R}$. Então, existe um único ξ de $\mathbb{R}$ pertencente a I_n para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Demonstração: É suficiente provar que a sucessão ninho $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ determina um corte de Dedekind em $\mathbb{R}$, logo define um número real. Analisando as condições (N1) e (N2), da Definição 1.4, deduz-se que as classes (K1) e (K2) formadas por $\{x_n \in \mathbb{R}; n = 1, 2 \ldots\}$ e

$\{y_n \in \mathbb{R}; n = 1, 2 \ldots\}$ são contíguas, logo definem um corte de Dedekind em $\mathbb{R}$, portanto um número $\xi \in I_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ pois $x_n < y_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Para provar que ξ é único suponha-se que exista $\xi' \in I_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Então, da condição (N2), tem-se para cada $\epsilon > 0$, que $|\xi - \xi'| < y_n - x_n < \epsilon$. Logo, $\xi = \xi'$.

1.9 Exemplos e Exercícios

1. Considere-se as soluções aproximadas $x_n \in F$ e $y_n \in E$ da equação $x^2 = 2$, conforme construídas no Problema 1 do presente Capítulo. Tem-se que $y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ e a sucessão $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = [x_n, y_n]$ é uma sucessão em ninho. Logo,

$$\sqrt{2} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Com o símbolo $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ indica-se a coleção dos pontos pertencentes a I_n para todo n.

2. Denomina-se aproximação de $1/3$, a menos de uma unidade por falta, ao maior número de unidades m tal que $m < 1/3 < m+1$. Portanto, tem-se que $m+1$ é a aproximação por execesso. Encontra-se $0 < 1/3 < 1$. A aproximação por falta a menos de $1/10$ é o maior número de décimos $m/10$ tais que $m/10 < 1/3 < (m+1)/10$. Encontra-se $m = 3$ ou $0.3 < 1/3 < 0.4$ Segue-se que 0.4 é a aproximação por excesso de $1/3$ a menos de $1/10$. De modo análogo são encontradas as aproximações a menos de $1/10^2, \ldots, 1/10^3, \ldots$. Obtém-se as classes de aproximações:

$$
\begin{aligned}
F &= 0,\ 0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ \ldots,\ \frac{m}{10^n},\ \ldots \\
E &= 1,\ 0.4,\ 0.34,\ 0.334,\ \ldots,\ \frac{m+1}{10^m},\ \ldots.
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$x_n = \frac{n}{10^n} \qquad \text{e} \qquad y_n = \frac{n+1}{10^n}$$

obtém-se que o racional $1/3$ é definido pelas classes contíguas

$$\{x_n;\ n = 1, 2, \ldots\} \qquad \text{e} \qquad \{y_n;\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

3. *O número π e o Corte de Dedekind.* O número π é uma constante caracterizada pela "razão"entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Se R for o raio de uma circunferência de comprimento C então π seria $C/2R$. Demonstra-se que π não é um racional (veja Parte 2, Complemento **87**). Entre os métodos para obtenção das aproximações de π destaca-se o *método dos isoperímetros ou de Schwab* idealizado em 1813, o qual obtém $1/\pi$, logo π. Com efeito, quando toma-se uma circunferência medindo 2 unidades, tem-se $R = 1/\pi$. Por conseguinte, conhecendo-se aproximações do raio R da circunferência medindo 2 unidades obtém-se as de $1/\pi$.

Considere um polígono regular P isoperimétrico a uma circunferência de raio $1/\pi$. Se r for o raio da circunferência circunscrita e a o apótema, que é o raio da inscrita ao polígono, tem-se a relação:

$$2\pi r > 2\pi\frac{1}{\pi} > 2\pi a \qquad \text{ou} \qquad r > \frac{1}{\pi} > a.$$

Isto equivale a dizer que o apótema é uma aproximação de $1/\pi$ por falta e o raio da circunscrita uma aproximação por excesso. Por meio do polígono regular P isoperimétrico à circunferência de raio $1/\pi$ constrói-se o poligono P_1 isoperimétrico a P mas com o dobro de lados. Foi visto que o raio da circunferência inscrita a P_1, isto é, r_1, é menor que o raio r da inscrita ao polígono P, enquanto que o apótema a_1 de P_1 é maior que o apótema a de P. Assim, tem-se

$$a < a_1 < \frac{1}{\pi} < r_1 < r.$$

A seguir, faz-se uma construção efetiva para a obtenção das aproximações racionais de $1/\pi$, inciando-se com um quadrado. Considere um quadrado de perímetro igual a 2 unidades e lado l_4. Portanto, $4l_4 = 2$, isto é, $l_4 = 1/2$. Seja r_1 o raio da circunferência no qual o quadrado está inscrito, isto é, a circunferência circunscrita ao quadrado. Tem-se $l_4 = r_1\sqrt{2}$. Logo, conhecendo-se l_4 conhece-se r_1. O raio da circunferência inscrita é o apótema a_1 do quadrado de perímetro 2. Segue-se que $a_1 = l_4/2$. Deste modo, tem-se da primeira etapa da construção que

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

A etapa seguinte consiste em considerar o polígono isoperimétrico ao quadrado de perímetro 2 mas com o dobro do número de lados, isto é, um octógono. Demonstra-se que, o raio r_2 da circunferência inscrita e o apótema do novo polígono isoperimétrico são

$$a_2 = \frac{a_1 + r_1}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{r_1 a_2}.$$

Continuando o processo, *mutatis mutandis*, encontra-se

$$a_3 = \frac{a_2 + r_2}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{r_2 a_3}.$$

De modo geral,

$$a_k = \frac{a_{k-1} + r_{k-1}}{2} \quad \text{e} \quad r_k = \sqrt{r_{k-1} a_k}.$$

Relembre que os apótemas crescem e os raios decrescem, então

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots < \frac{1}{\pi} < \ldots < r_k < r_{k-1} < \ldots < r_2 < r_1.$$

Portanto, fica bem definida uma sucessão de intervalos fechados dada por $I_k = [a_k, r_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, sendo $(a_n)_{k \in \mathbb{N}}$ crescente, $(r_n)_{k \in \mathbb{N}}$ decrescente e $a_k < 1/\pi < r_k$ para $k = 1, 2, \ldots$. Para provar que $(I_n)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em ninho resta apenas observar que

$$r_k - a_k = \frac{r_1 - a_1}{4^k - 1}$$

para $k = 2, 3, \ldots$. Sendo $r_1 - a_1 = (\sqrt{2} - 1)/4$ conclui-se que $(I_n)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em ninho, logo

$$\frac{1}{\pi} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Assim, $1/\pi$ é definido por um corte de Dedekind, cf. Proposição 1.6. Isto implica o mesmo para o seu inverso π.

4. Obtenha as aproximações de $1/\pi$ nas etapas $k = 4$ e $k = 10$. Então, calcule as correspondentes aproximações de π.

5. Tendo $1/\pi$ como o único objeto de $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ defina as classes contíguas e o corte que dá origem a $1/\pi$, e a π.

6. Defina por meio do corte de Dedekind a solução de $x^5 - 2 = 0$ (veja Parte 2, Complemento **3**).

7. Qual o corte de Dedekind que define $5/7$?

8. Seja (A, B) um corte de Dedekind em $\mathbb{R}$ definindo α. Prove que existe uma sucessão em ninho $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

9. Considere a equação $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ com a_n inteiros. Se o racional p/q for raiz da equação então p é divisor de a_n e q é divisor de a_0. Logo, aplicando este resultado moste que $x^2 - 2$ não possui raiz racional e que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não é racional (veja Parte 2, Complemento **1**).

10. Leia numa calculadora o número que indica $\sqrt[3]{2}$ e com ele defina um par de classes contíguas que definem o irracional $\sqrt[3]{2}$. Qual o corte de Dedekind definindo este número? Prove, por meio do Exercício 9, que este número é irracional.

1.9.1 Nota Histórica sobre Richard Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916), nasceu em Brunswich, Alemanha, foi aluno de Gauss com quem estudou integrais eulerianas, assunto de sua tese de doutorado. Seu primeiro trabalho como professor foi no Politécnico de Zurich, onde trabalhou de 1857-1861.

Nesta ocasião, tendo dúvidas sobre o texto que deveria seguir com seus alunos, criou os números irracionais, para tornar inteligível suas aulas de análise matemática. Na verdade, ele fez uma organização matemática nos números racionais e definiu os irracionais por um método que o denominou *cortes.* Atualmente, conhecido sob a denominação de *Cortes de Dedekind.* Método este, empregado neste texto para construir os conceitos de limite e continhidade de funções.

A construção do método de Dedekind baseia-se essencialmente na noção de ordem dos números racionais. A contribuição de Dedekind na construção da matemática, não se limita apenas aos *cortes.* Ele investigou e contribuiu na teoria dos números e foi determinante no estudo dos fundamentos da matemática do final do século XIX, inicio do XX. Dentre várias contribuições, registra-se que a noção de *ideal*, de tanta importância em Álgebra e Análise, foi criado por Dedekind, ao investigar propriedades dos números inteiros. Seu trabalho contendo os *cortes*, encontra-se no livro: Richard Dedekind - Essays on the Theory of Numbers (tradução para o inglês, do original alemão), Dover Publications 1963.

É muito educativo ler o prefácio deste livro, onde ele conta as dificuldades encontradas no, *manual de matemática*, adotado para o ensino no Politécnico de Zurich.

1.9.2 Nota Histórica sobre John Napler

John Napler (1550-1617), matemático escossês, Barão de Machiston, dedicou sua vida a investigação de um método, permitindo substituir no cálculo numérico, multiplicações e divisões por adições e subtrações e que simplificasse o cálculo de raízes dos números, facilitando o trabalho dos astrônomos. O instrumento criado por Napler para atender a tais questões foi por ele denominado *Logaritmo*. Sua idéia original foi associada ao cálculo das funções circulares. Alguns autores observam que a expressão

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

é uma transformação de um produto em uma soma e pode ter sido uma motivação para Napler (uma mera conjectura).

Para definir o novo conceito matemático ele considerou a correspondência entre os termos de uma progressão geométrica r, r^2, $\ldots, r^n, \ldots$ de razão r positiva e os termos da progressão aritmética dos expoentes, isto é, 1, 2, $\ldots$, n, $\ldots$. Note que o produto $r^m \cdot r^n = r^{m+n}$ corresponde a $m+n$. Esta correspondência já havia sido observada por Arquimedes, 410 A.C., mas sem as consequências obtidas por Napler. A progressão $1, 2, \ldots, n, \ldots$ é denominada de logaritimos dos termos da progressão geométrica r, $r^2, \ldots, r^n, \ldots$. Portanto, o logaritimo de r^n é n, para todo $n \in \mathbb{N}$. O termo logaritimo é um vocábulo grego que significa "número de razões". De fato, n é o número de razões r contidas em r^n. O Napler é também chamado Neper. Daí, os logaritimos *Neperianos*.

1.9.3 Nota Histórica sobre Georg Cantor

Georg Cantor (1845-1918), pertencia a uma família de israelitas que imigrou de Portugal para a Dinamarca, fixando-se a seguir na Rússia. Cantor nasceu em Saint Pétersburg em 3 de março de

1845. Teve sua formação inicial na Rússia, mas sua educação foi feita na Alemanha a partir dos 15 anos. Contrariando os planos de seu pai, quem imaginava fazê-lo engenheiro, resolveu dedicar-se a investigação científica. Foi aluno de Kummer, Weierstrass e Kronecher. Sofria de depressão profunda, falecendo na Alemanha em 1918. Teve a admiração de Dedekind, quem o estimolou a pesquisar matemática.

Cantor investigou sobre a teoria dos conjuntos infinitos, definindo o conceito de cardinal ou potência de um conjunto, desenvolvendo a aritmética dos números cardinais dos conjuntos infinitos. No estudo das séries de Fourier, encontrou inspiração para desenvolver sua teoria dos conjuntos. Semelhantemente a Dedekind, também, construiu uma teoria dos números reais, baseada na noção de sucessão de racionais. A idéia de Cantor aparece no estudo dos espaços métricos, enquanto a de Dedekind, no estudo dos conjuntos ordenados. Juntamente com Dedekind, poder-se-ia dizer que foram os construtores e organizadores da Análise Matemática do século XIX inicio do XX.

Capítulo 2

Conjuntos Lineares

Os conjuntos a serem considerados no presente texto serão sempre partes do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Assim, denomina-se conjunto linear C a uma qualquer parte ou subconjunto de $\mathbb{R}$. Note-se que C pode ser o próprio $\mathbb{R}$. Por exemplo, os subconjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais, $\mathbb{Z}$ dos números inteiros ou $\mathbb{Q}$ dos números racionais são exemplos de conjuntos lineares. Outros exemplos surgirão.

2.1 Intervalos Abertos e Fechados

Definição 2.1 - Sejam a e b dois números reais, sendo $a < b$. Denomina-se intervalo fechado de extremos a e b ao conjunto dos números reais x tais que $a \leq x \leq b$.

Sendo $\mathbb{R}$ identificado a uma reta, um intervalo fechado identifica-se a um segmento desta reta, como mencionado no Capítulo 1. Denota-se o intervalo fechado de extremos a e b por $[a, b]$. Ele é um conjunto linear. Simbolicamente escreve-se:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

Note que com $\{\ldots\}$ indica-se um conjunto e no interior das chaves vem a definição dos objetos do conjunto. Os números a e b são chamados de extremidades de $[a, b]$. a é dito extremidade inicial, ou origem, do intervalo, e b de extremidade final, ou simplesmente, extremidade do intervalo $[a, b]$.

Definição 2.2 - Denomina-se intervalo aberto de extremos a e b, $a < b$, ao conjunto de números reais x tais que $a < x < b$ e representa-se por (a, b). Assim,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

Tem-se, também, os intervalos do tipo $(a, b]$ e $[a, b)$ dados por:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$

aberto à esquerda e fechado à direita;

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$$

fechado à esquerda e aberto à direita.

Observação 2.1 - Dado um intervalo de extremos a e b, com $a < b$, o número $b - a$ denomina-se a amplitude do intervalo.

2.2 Vizinhança de um Ponto

Note que, como $\mathbb{R}$ está sendo identificado à uma reta, é comum o uso de expressões tais como, o número real x ou o ponto x, para designar-se um elemento de $\mathbb{R}$.

Definição 2.3 - Dado um número real x, denomina-se vizinhança de x, a um qualquer intevalo aberto, de $\mathbb{R}$, contendo x. Fixado um ponto x, de $\mathbb{R}$, observa-se que tal ponto possui uma infinidade de vizinhanças, representadas por $V(x)$.

Observe que uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}$ é um conjunto linear. Por exemplo, dado o número real 2 uma vizinhaça de 2 é, por exemplo, o intervalo $(1, 3)$. Há infinitas vizinhanças de 2.

As vizinhanças de um ponto $x \in \mathbb{R}$ possuem as seguintes propriedades:

(V1) Se $V(x)$ e $V'(x)$ forem vizinhanças de $x \in \mathbb{R}$ então a intersecção $V(x) \cap V'(x)$ é vizinhança de x. Note que o símbolo $\cap$ significa uma operação definida entre conjuntos. Assim, dados dois conjuntos V e V', denomina-se intersecção de V com V', representando-a por $V \cap V'$, ao conjunto formado pelos objetos que pertencem a V e V' simultaneamente. Logo, quando $V = (1, 3)$ e $V' = (0, 2)$ tem-se $V \cap V' = (1, 2)$.

(V2) Se $V(x)$ for uma vizinhança de x e $y \in V(x)$ então existe uma vizinhança $V(y) \subseteq V(x)$. Note que o símbolo $\subseteq$ é uma relação binária entre os conjuntos V e V'. Diz-se que $V \subseteq V'$ quando todo objeto de V pertence a V'. Por exemplo, $V = (1, 2)$ e $V' = (0, 3)$

tem-se $V \subset V'$.

(V3) Se $x, y \in \mathbb{R}$, com x distinto de y, existe uma $V(x)$ e uma $V(y)$ tais que $V(x)$ e $V(y)$ não possuem pontos em comum. Escreve-se simbolicamente $V(x) \cap V(y) = \emptyset$, sendo $\emptyset$ a parte vazia de $\mathbb{R}$.

2.3 Ponto de Acumulação de um Conjunto

Definição 2.4 - Diz-se que x é um ponto de acumulação de C, onde C é um conjunto linear, quando cada vizinhança $V(x)$ do ponto x, possuir infinitos pontos de C, distintos de x.

O ponto de acumulação, x, pode, ou não, pertencer a C. Por exemplo, se $C = (1, 2)$ todos os seus pontos são de acumulação. Se $C = \{1,\ 1/2,\ \ldots,\ 1/n,\ \ldots,\}$, então zero é um ponto de acumulação de C não pertencente a C.

Definição 2.5 - Diz-se que um conjunto C é finito quando ele contém n objetos. Quando não for finito, C diz-se infinito.

Proposição 2.1 - Se C possui ponto de acumulação ele é infinito.

Demonstração: Suponha x_0 um ponto de acumulação de C e que ele seja finito, isto é, $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Considere os números positivos

$$|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \ldots, |x_0 - x_n|$$

e seja $|x_0 - x_i|$ o menor dos números para $i \leq n$ fixo. Seja $r_i = \frac{1}{2}|x_0 - x_i|$ então a vizinhança de x_0

$$V(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ x_0 - r_i < x < x_0 + r_i\}$$

não possui ponto de C distinto de x_0 . Logo, x_0 não é ponto de acumulação, o que contradiz a hipótese. Portanto, C é um conjunto infinito. Logo, os conjuntos finitos não possuem pontos de acumulação.

A seguir, serão analisados os conjuntos infinitos no que concerne a existência de pontos de acumulação.

2.4 Conjuntos Limitados

Definição 2.6 - Diz-se que um conjunto infinito de números reais C, é limitado superiormente, quando existe b, tal que $x \leq b$, para todo $x \in C$.

Ele diz-se limitado inferiormente quando existe a, tal que $a \leq x$, para todo $x \in C$.

Quando $a \leq x \leq b$, para todo $x \in C$, diz-se que C é limitado. Caso não exista b nestas condições então C não é limitado superiormente. Analogamente, quando não existe a diz-se que C não é limitado inferiormente.

Teorema 2.1 - (*Bolzano* (1781)-*Weierstrass* (1815)) Todo conjunto C infinito e limitado, possui ponto de acumulação.

Demonstração: Seja $C \subset \mathbb{R}$ um conjunto infinito e limitado, isto é, C está contido num intervalo fechado $[a, b]$. Divide-se $[a, b]$ em dois sub-intervalos por meio do ponto médio c, obtendo os sub-intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$. Ao menos um destes intervalos contém infinitos pontos de C. Admite-se que seja o intervalo $[a, c]$ e o representa-se por

$[a_1, b_1]$. Repete-se, a operação, agora em relação ao intervalo $[a_1, b_1]$, isto é, divide-se $[a_1, b_1]$ em dois sub-intervalos $[a_1, c_1]$ e $[c_1, b_1]$; em algum deles, por exemplo em $[a_1, c_1]$, há infinitos pontos de C. Denota-se $[a_1, c_1]$ por $[a_2, b_2]$. Repete-se o processo *ad infinitum* obtendo-se os intervalos:

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots .$$

Logo,

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots, \ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots \quad \text{e}$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \ b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}, \ldots, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \ldots$$

Portanto, tem-se duas classes (A, B) de números reais, com

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}.$$

Prova-se, a seguir, que o par (A, B) é um par de classes contíguas.

(C1) Se $a_i \in A$ e $b_j \in B$, então $a_i < b_j$. De fato, seja $i = j$. Então tem-se, $a_i < b_i$ por construção. Por outro lado, se $i < j$, resulta que $[a_i, b_i] \supset [a_j, b_j]$ e, finalmente, para $i > j$ encontra-se $[a_i, b_i] \subset [a_j, b_j]$ já que $a_i < b_i < b_j$;

(C2) Tem-se $b_n - a_n < (b-a)/2^n$ para todo n. Logo, (A, B) é um par de classes contíguas e, deste modo, define um corte em $\mathbb{R}$, o qual determina um número real $m \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \leq m \leq b_n$ para todo n. O número m é ponto de acumulação de C. De fato, da desigualdade anterior tem-se:

$$m - a_n < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad e \quad b_n - m < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Conseqüentemente, o intervalo

$$\left(m - \frac{b-a}{2^n}, m + \frac{b-a}{2^n}\right)$$

contém (a_n, b_n). Portanto, toda vizinhaça de m, contendo (a_n, b_n), possui infinitos pontos de C, provando que m é ponto de acumulação.

Um ponto x de um conjunto C que não seja de acumulação diz-se isolado. Exemplo, no conjunto $C = \{1,\ 1/2,\ \ldots,\ 1/n,\ \ldots\}$ seus pontos são isolados e o único ponto de acumulação, o zero, não pertence ao conjunto.

2.4.1 Conjuntos Fechados

Definição 2.7 - Diz-se que C é fechado, quando contém todos os seus pontos de acumulação. Se C não contém seus pontos de acumulação, C não é fechado.

O conjunto derivado de C, denotado por C', é constituido de todos os pontos de acumulação de C. Assim, diz-se que C é fechado quando $C' \subseteq C$. Por exemplo, se $C = \{1,\ 1/2,\ \ldots,\ 1/n,\ \ldots\}$, tem-se $C' = \{0\}$, não sendo $C' \subset C$. Logo, C não é fechado. Quando $C = \{1, 1 + 1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$, tem-se o derivado $C' = \{1\}$ e $C' \subset C$, provando que C é fechado. Um intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado.

2.4.2 Conjuntos Abertos

Definição 2.8 - Diz-se que C é um conjunto aberto, quando todo ponto x, de C, possui uma vizinhança $V(x) \subseteq C$.

É usual dizer que um ponto $x \in C$ é um ponto interior de C quando existe $V(x) \subseteq C$. O conjunto dos pontos interiores de C representa-se por $\dot{\mathrm{C}}$. Assim, C é aberto quando contém seu interior, ou seja, o conjunto $\dot{\mathrm{C}}$. Os intervalos abertos são exemplos de conjuntos abertos. Os intervalos do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$ não são abertos.

Os conjuntos abertos e fechados da reta possuem propriedades que são de interesse relevante para o estudo geral da análise matemática. De maneira semelhante , a noção de vizinhança e as suas propriedades. A seguir, serão apenas mencionadas estas propriedades a título de informação.

Considere uma parte C de $\mathbb{R}$. Diz-se que D é o complemento, ou complementar, de C, quando D contém apenas os pontos de $\mathbb{R}$ que não pertencem a C. Assim, se $C = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 1\}$ o seu complemento é $D = \{x \in \mathbb{R};\ x > 1\}$.

Propriedades dos Fechados:

- O complemento de um conjunto fechado é um conjunto aberto;
- A interseção de uma família de conjuntos fechados é um conjunto fechado;
- A união de uma família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Propriedades dos Abertos:

- O complemento de um conjunto aberto é um conjunto fechado;
- A união de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto;

• A interseção de uma família finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Não serão dadas as demonstrações destas propriedades dos conjuntos abertos e fechados da reta $\mathbb{R}$. Note que também não são propostas como exercício para o leitor. Foram registradas apenas a título de informação, aliás, como já mencionado, de importância para estudos posteriores. Entretanto, caso o leitor fique curioso por mais informações, pode consultar com proveito: M.H. Newmann, *Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge Univ. Press - London, 1951.

2.5 Supremo e Ínfimo

Definição 2.9 - O supremo de um conjunto linear C, denotado por $\sup C$, é um número S, satisfazendo as condições:

(S1) $b \leq S$, existe para todo $b \in C$;

(S2) dado $b < S$, existe $x \in C$ tal que $x > b$.

O supremo S pode, ou não, pertencer C. No caso de pertencer a C, é dito máximo de C. O supremo de um conjunto linear, $C \subset \mathbb{R}$, pode ser $+\infty$.

Exemplo 2.1 - Considere

$$C = \left\{ \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \right\}.$$

Então,

(S1) $1 > n/(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(S2) Seja $b < 1$. Existe um número de C maior que b, isto é, existe

$n \in \mathbb{N}$ tal que $b < n/(n+1)$. Portanto, 1 é o supremo de C.

Em situações práticas (S2) é expressa como segue:

(S2') Se $S' \in \mathbb{R}$ é tal que $b < S'$, para todo $b \in C$, então $S \leq S'$. Noutras palavras, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in C$, tal que $S - \epsilon < x$.

Definição 2.10 - O ínfimo de um conjunto linear C, denotado por $\inf C$, é um número $I \in \mathbb{R}$ satisfazendo às seguintes condições:

(I1) $b \geq I$ para todo $b \in C$;

(I2) dado $b > I$ existe $x \in C$ tal que $x < b$.

Exemplo 2.2 - Considere

$$C = \left\{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots\right\}.$$

Então,

(I1) $1 < \frac{n+1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(I2) Seja $b > 1$. Existe um número de C menor que b, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b > (n+1)/n$. Portanto, 1 é o ínfimo de C.
Assim como no caso do supremo, em situações práticas **(I2)** é expressa por:

(I2') Se $I' \in \mathbb{R}$ é tal que $b > I'$, para todo $b \in C$, então $I' \leq I$. Ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $x \in C$ tal que $x < I + \epsilon$.

Observe que o conjunto C de racionais que são as aproximações de raiz de 2 por falta, é limitado superiormente. Note que seu supremo é $\sqrt{2}$, que não pertence a $\mathbb{Q}$. Assim, existem conjuntos de racionais limitados superiormente cujo supremo não é racional. O resultado que se segue, de grande interesse neste estudo, mostrará que os números reais $\mathbb{R}$ não possuem este defeito.

Teorema 2.2 - Todo conjunto não vazio, C, de números reais, limitado superiormente, possui um único supremo, S, em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Considera-se uma partição dos números reais $\mathbb{R}$ em duas classes R_1 e R_2 definidas do seguinte modo:

- a classe R_1, formada por todos os números reais menores que algum número de C;

- a classe R_2, formada pelo restante dos números reais.

Observe que, sendo C limitado superiormente, as classes R_1 e R_2 são não vazias, e todo número real pertence exclusivamente a R_1 ou R_2. Para provar que o par (R_1, R_2) é um corte em $\mathbb{R}$ deve-se provar que todo número real de R_1 é menor que qualquer real de R_2. De fato, suponha que existe $r_1 \in R_1$ que seja maior que algum $r_2 \in R_2$, isto é, $r_2 < r_1$. Se $r_1 \in R_1$, por construção de R_1, segue que $r_1 < x$ para algum $x \in C$. Logo, $r_2 \in R_2$ e $r_2 < x$ para algum $x \in C$, o que é contraditório pois r_2 é, por construção, maior que todo $x \in C$. Portanto, concluí-se que todo $r_1 \in R_1$ é menor ou igual a todo $r_2 \in R_2$. Logo, o par (R_1, R_2) é um corte em $\mathbb{R}$ e, deste modo, determina um número real S tal que $r_1 \leq S \leq r_2$, quaisquer que sejam $r_1 \in R_1$ e $r_2 \in R_2$. A seguir, demonstra-se que S é o supremo de C. Deve-se provar que:

(S1) S é maior ou igual a qualquer $x \in C$. De fato, suponha $x \in C$ e $S < x$. Logo, existe um número real r tal que $S < r < x$. Como $r < x$ resulta que $r \in R_1$. Logo, $S < r \in R_1$, o que é contraditório pois $r_1 \leq S$ para todo $r_1 \in R_1$;

(S2) Considere $b < S$ e que não existe $x \in C$ tal que $b < x < S$. Então nenhum $b < S$ pertence a R_1, que é uma contradição (Os números de R_1 são menores que algum x de C). Deste modo, fica demonstrada a existência do supremo para um conjunto C de números reais não vazio e limitado superiormente. Finalmente, prova-se a unicidade do supremo. Suponha que C possua dois supremos S' e S. Deve-se ter ou $S < S'$ ou $S > S'$. Suponha, para fixar idéia, que $S' < S$. Pela propriedade (S2) existe um $x \in C$ tal que $S' < x < S$, que é contraditório pois S' é o supremo de C. Logo, o supremo de C existe e é único.

De modo semelhante ao apresentado no *Teorema do Supremo*, prova-se que todo conjunto linear não vazio C limitado inferiormente possui um único ínfimo I.

Uma aplicação imediata do Teorema 2.2 é que não existe um número real x tal que $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se existisse resultaria que $\mathbb{N}$, não vazio, é limitado superiormente. Logo, pelo Teorema 2.2, $\mathbb{N}$ possui um supremo b, isto é, $n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, $n + 1 \in \mathbb{N}$, logo $n + 1 \leq b$ ou $n \leq b - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $b - 1$ seria também um supremo, o que é uma contradição. Logo, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.6 Conjuntos Compactos

A classe dos conjuntos compactos é de grande interesse no estudo da análise matemática. Caso o leitor continue seus estudos de análise matemática irá encontrar esta noção em várias situações. No momento, embora as definições sejam gerais, tem-se em mente apenas o caso dos conjuntos lineares

Definição 2.11 - Denomina-se cobertura de um conjunto C, a uma família de conjuntos abertos tal que cada objeto de C pertença a algum conjunto aberto da família.

Exemplo 2.3: (i) Considere $C = (0, 1]$. A família de intervalos abertos

$$\Big(-1, \frac{1}{2}\Big),\ \Big(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\Big),\ \Big(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\Big)$$

cobre C.

(ii) Seja $C = \{1, 2, \ldots, n\}$. Os abertos

$$\Big(1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\Big),\ \Big(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\Big), \ldots, \Big(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\Big)$$

cobrem C.

Definição 2.12 - Diz-se que um conjunto C é compacto quando de cada cobertura aberta de C extrai-se um subcobertura de C com um número finito de conjuntos.

Teorema 2.3 - (*Heine* (1821) - *Borel* (1871)) Todo conjunto linear C limitado e fechado é compacto.

Demonstração: Quando C é finito o teorema é verdadeiro. Suponha C infinito. Sendo C limitado, então C está contido em algum intervalo $[a, b]$. Seja $c = (a+b)/2$ o ponto médio de $[a, b]$, e define-se $C_1 = C \cap [a, c]$ e $D = C \cap [c, b]$. Suponha que C seja limitado e fechado mas não seja compacto. Esta hipótese implica a existência de uma cobertura T de C tal que nenhuma sub-família finita de T cobre C. Resulta o mesmo para C_1 e D pois $C_1 \cup D = C$. Suponha-se que nenhuma subfamília finita de T cobre C_1. Para D é análogo. Portanto, C_1 é infinito, limitado ($C_1 \subset C \subset [a,b]$) e fechado pois $C_1 = C \cap [a,c]$ (interseção de dois fechados). Conseqüentemente, C_1 está nas mesmas condições de C. Note-se que a amplitude de $[a,c]$ é a metade de $[a,b]$. Tem-se $C_1 \subset [\alpha,\beta] \subset [a,c]$. Seja γ o ponto médio de $[\alpha,\beta]$. Constrói-se de modo semelhante o conjunto $C_2 = C_1 \cap [\alpha,\gamma]$ que possui as mesmas propriedades de C. Com C_2 define-se, analogamente, C_3 nas mesmas condições de C e continua-se o processo indefinidamente. Os intervalos $[a,b], [a,c], [\alpha,\gamma], \ldots$ contendo os conjunto $C_1, C_2, C_3, \ldots$, respectivamente, são tais que os extremos inferiores $M = \{a, \alpha, \ldots\}$ e os extremos superiores $N = \{b, c, \gamma, \ldots\}$ formam um par de classes contíguas de números reais. Logo, definem um número real r tal que $m \leq r \leq n$, para todo $m \in M$ e $n \in N$. O número r é o ponto de acumulação de C e como C é fechado então $r \in C$. De fato, pode-se afirmar que r é ponto de acumulação de C porque qualquer intervalo aberto contendo r contém algum dos conjuntos $C_1, C_2, \ldots$ que contêm pontos de C. Note-se que T é uma cobertura de C tal que nenhuma subcobertura finita cobre C. Como $r \in C$, resulta que r pertence a algum T_0 que é aberto, pois a cobertura é de abertos. Logo, existe uma vizinhança $V(r) \subset T_0$. Porém, $V(r)$ contém algums dos C_1, C_2, $\ldots$ e, portanto, um destes conjuntos é coberto por um só membro T_0 da família T que é contraditório, pois nenhuma subfamília finita de T cobre qualquer dos conjuntos C_1, C_2, $\ldots$.

Observação 2.2 - Examinando a demonstração do Teorema de Heine-Borel é oportuno chamar atenção do leitor para a técnica de demonstração que é semelhante a adotada no caso do Teorema de Bolzano-Weierstrass. É igualmente oportuno chamar a atenção do leitor que dada a importância destes dois resultados básicos da análise é conveniente consultar: *M.H.A. Newman, opt.cit.*, em um contexto mais geral.

Observação 2.3 - Sendo um intervalo, $[a, b]$, fechado limitado, é, também, compacto. Por isto, diz-se "o intervalo compacto"$[a, b]$, para distingui-lo dos intervalos (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$.

Capítulo 3

Sucessões e Séries

3.1 Sucessões de Números Reais

O presente capítulo destina-se ao estudo de propriedades das sucessões e séries de números reais.

Definição 3.1 - Dados os conjuntos E e F, denomina-se produto cartesiano, de E e F, ao conjunto $E \times F$ definido como a coleção de todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in E$ e $y \in F$. Escreve-se simbolicamente:

$$E \times F = \{(x, y);\ x \in E \quad \text{e} \quad y \in F\}$$

Considerando-se uma função $f : E \to F$, denomina-se *gráfico de f* ao subconjunto, do produto cartesiano $E \times F$, formado pelos pares (x, y), tais que $y = f(x)$. Para a definição de função veja Capítulo 1, seção 1.8.

Exemplo 3.1 - Suponha $E = F = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. O gráfico de f é a coleção dos pares (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tais que $y = x^2$.

Quando E é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, a função $f : \mathbb{N} \to F$ denomina-se *sucessão*. No caso particular $F = \mathbb{R}$ a sucessão $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ denomina-se sucessão de números reais. Denota-se uma sucessão $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $u_n = f(n)$, para $n \in \mathbb{N}$, ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (u_n). O gráfico de uma sucessão é a coleção dos pontos $\{(n, y);\ n \in \mathbb{N} \text{ e } y = f(n) \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 3.2 - São exemplos de sucessões:

- $u_n = \dfrac{1}{n}$ ou $\left(\dfrac{1}{n}\right)$;
- $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ ou $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$;
- $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ ou $\left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercício 3.1 - Esboce os gráficos das sucessões do Exemplo 3.2.

Estudar uma sucessão (u_n) consiste em conhecer o seu comportamento para valores "grandes"de $n \in \mathbb{N}$ ou, como se diz habitualmente, "quando n tende para o infinito", cuja notação é "$n \to \infty$". No Exemplo 3.2 verifica-se que a terceira sucessão se comporta do seguinte modo:

- se n é par, então $u_{2n} = 1 + 1/2n$ se aproxima de 1;
- se n é ímpar, então $u_{2n-1} = -1 + 1/2n - 1$ se aproxima de -1.

A seguir, será formulada a definição de limite de uma sucessão onde os termos, "n tende para o infinito"e a sucessão se aproxima de um número, são definidos. A propósito consulte G. H. Hardy - *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1952, p.116.

Definição 3.2 - (*D'Alembert* (1765), *Cauchy* (1821)) Diz-se que um número L, é o limite de uma sucessão de números reais (u_n), quando para cada $\epsilon > 0$, existe um natural $n_0 = n_0(\epsilon)$, tal que

$$|u_n - L| < \epsilon, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n \geq n_0.$$

Diz-se que a sucessão (u_n) *converge para* L e denota-se esta fato por,

$$\lim_{n \to \infty} u_n = L \quad \text{ou} \quad u_n \to L.$$

Proposição 3.1 - Se uma sucessão (u_n) for convergente, seu limite será único.

Demonstração: De fato, suponha que (u_n) seja convergente para L e L_1, sendo $L \neq L_1$. Assim, da definição de limite, para cada $\epsilon > 0$, existem $n_0 = n_0(\epsilon)$ e $n_1 = n_1(\epsilon)$ tais que

$$|u_n - L| < \epsilon/2 \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0,$$
$$|u_n - L_1| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad n \geq n_1.$$

As duas condições valem para todo $n \geq \max(n_0, n_1)$. Portanto, para cada $\epsilon > 0$, obtém-se

$$|L - L_1| \leq |L - u_n| + |u_n - L_1| < \epsilon, \quad n \geq \max(n_0, n_1),$$

provando que $L = L_1$, pela arbitrariedade de ϵ.

Exemplo 3.3 - Seja $u_n = (n+1)/(n+2)$. Prova-se que (u_n) converge para 1. De fato, seja $\epsilon > 0$. Deve-se determinar $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| < \epsilon \quad \text{para} \quad n \geq n_0.$$

O que equivale,

$$\frac{1}{n+2} < \epsilon \quad \text{para} \quad n \geq n_0.$$

Tomando-se $0 < \epsilon < 1/2$, tem-se $1-\epsilon > 0$ e daí calcula-se $n_0(\epsilon)$ como sendo, por exemplo, o primeiro natural maior ou igual a $(1-2\epsilon)/\epsilon$. Portanto, sendo n_0 natural maior que $n_0(\epsilon)$, encontra-se a convergência acima citada.

Demonstra-se que se (u_n) e (v_n) forem convergentes então:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = \Big(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\Big)\Big(\lim\limits_{n\to\infty} v_n\Big)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$;
- se $u_n \neq 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} a \cdot u_n = a \cdot \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ para $a \in \mathbb{R}$.

3.1.1 Subsucessão

A noção de subsucessão é fundamental no estudo da convergência. Suponha uma sucessão $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to k_n$, de modo que

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots \quad (k_1 > 1).$$

Se (u_n) for uma sucessão, então a sucessão (u_{k_n}) será denominada uma subsucessão da sucessão (u_n).

Exemplo 3.4 - São exemplos de subsucessões:

- Seja $u_n = 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$. Se $k_n = 2n$, $u_{k_n} = 1/2n$ é uma subsucessão;

- Seja $u_n = (-1)^n + 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$. Se $k_n = 2n$ tem-se a subsucessão $u_{k_n} = 1 + 1/2n$ e para $k_n = 2n - 1$ a subsucessão $u_{k_n} = -1 + 1/(2n-1)\cdot$

Proposição 3.2 - Se (u_n) converge para L então toda subsucessão (u_{k_n}) converge para L.

Demonstração: De fato, k_n cresce com n, sendo $k_1 > 1$ e $k_2 > k_1$ então, $k_2 \geq 2$, $k_3 \geq 3, \ldots$. Para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_o(\epsilon)$, tal que

$$|u_n - L| < \epsilon \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n \geq n_0,$$

por hipótese. Se $n \geq n_0$ obtém-se $k_n \geq n_0$ e, portanto, $|u_{k_n} - L| < \epsilon$, para todo $k_n \geq n_0$, isto é, a subsucessão (u_{k_n}) converge para L.

Observação 3.1 - Note que $u_n = (-1)^n + 1/n$ não converge, porém possui duas subsucessões: $u_{k_n} = 1 + 1/2n$ e $u_{k_n} = -1 + 1/(2n+1)$ convergentes, respectivamente, para +1 e -1!

Esta observação motiva um novo conceito que é o de valor aderente de uma sucessão.

Definição 3.3 - *Denomina-se, valor aderente de uma sucessão* (u_n), a um número real a, tal que existe uma subsucessão, (u_{k_n}), de (u_n), convergente para a.

Uma consequência imediata da Definição 3.3 e das Proposições 3.1 e 3.2 é que se (u_n) converge para L, então L é o único valor aderente de (u_n). Além disso, note que a sucessão $u_n = (-1)^n + 1/n$, da Observação 3.1, possui dois valores aderentes: $a = +1$ e $a = -1$.

Diz-se que uma sucessão é limitada, quando $|u_n| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto equivale a dizer que o conjunto de números reais $\{u_n\}$ é limitado. No Capítulo 2 demonstrou-se um Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos infinitos limitados. Será aqui demonstrado um análogo para sucessões limitadas.

Teorema 3.1 -(*Bolzano-Weierstrass* para Sucessões) Toda sucessão limitada de números reais (u_n) possui ao menos um valor aderente. De modo equivalente, toda sucessão limitada de números reais possui pelo menos uma subsucessão convergente.

Demonstração: A técnica de demonstração é análoga àquela adotada para demonstrar o Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos infinitos limitados. Procede-se do seguinte modo: sendo (u_n) limitada, considera-se um intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ tal que $a < u_n < b$ para um número infinito de números naturais n. Repete-se o processo de bipartição obtendo as classes contíguas e determina-se um número real m e os intervalos $[a_n, b_n]$ tais que:

- $m - a_n < b_n - a_n$;
- $b_n - m < b_n - a_n$;
- $[a_n, b_n]$ contém termos u_n da sucessão (u_n) para uma infinidade de valores $n \in \mathbb{N}$.

Demonstra-se, a seguir, que m é um valor aderente da sucessão (u_n). De fato, pela construção existe um número infinito de valores

$k \in \mathbb{N}$ tais que u_k pertence a $(m - 1/2^n, m + 1/2^n) \supset [a_n, b_n]$. Considere um termo qualquer da sucessão neste intervalo representado por u_{k_1}. Resta ainda uma infinidade de valores de $k \in \mathbb{N}$ tais que u_k pertence a

$$(a_n, b_n) \subset \Big(m - \frac{1}{2^2}, m + \frac{1}{2^2}\Big) \subset \Big(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\Big).$$

Escolhe-se, novamente, um termo da sucessão, o qual é representado por u_{k_2}, com $k_2 > k_1$. Assim, sucessivamente, escolhe-se u_{k_n}, pertencente a $(m - 1/2^n, m + 1/2^n)$, tal que (u_{k_n}) é uma sub-sucessão satisfazendo

$$m - \frac{1}{2^n} < u_{k_n} < m + \frac{1}{2^n}.$$

Provando, assim, que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n} = m$. Conseqüentemente, m é valor aderente de (u_n).

Definição 3.4 - Diz-se que (u_n) é monótona crescente quando,

$$u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots$$

e que é monótona decrescente quando,

$$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots .$$

Quando estas relações de ordem forem dadas por $<$ ou $>$, diz-se que (u_n) é estritamente crescente ou estritamente decrescente, respectivamente.

Teorema 3.2 - Toda sucessão de números reais, (u_n), crescente e limitada superiormente, é convergente.

Demonstração: De fato, sendo (u_n) limitada superiormente o conjunto $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente e pelo Teorema do Supremo possui um único supremo S, i.e., $S = \sup\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Mostra-se que (u_n) converge para S. Com efeito, pela propriedade (S2') do supremo, para cada $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S - \epsilon < u_{n_0} < S$. Mas, por $(S1)$, $u_n \leq S$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por hipótese, (u_n) é crescente, ou seja, $S - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n < S + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Adicionando $-S$ a esta desigualdade obtém-se $-\epsilon < u_n - S < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Conclui-se que $|S - u_n| < \epsilon$.

Um resultado análogo, vale para sucessões decrescentes e considerando-se o ínfimo. Toda sucessão decrescente limitada inferiormente é convergente.

Exemplo 3.5 - Seja (u_n), com $u_n > 0$ definida por $u_1 = \sqrt{2}$ e $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$. Mostra-se, inicialmente, que (u_n) é crescente. Temos que

$$u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{2u_1} = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} > \sqrt{2} = u_1.$$

Logo, $u_2 \geq u_1$. Suponha que $u_n \geq u_{n-1}$. Prova-se que $u_{n+1} \geq u_n$. De fato, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \geq \sqrt{2u_{n-1}} = u_n$. Agora, resta mostra que (u_n) é limitada. De fato, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}} < 2$. Por indução sobre n conclui -se que (u_n) é limitada por 2, i.e., $u_n < 2$ para todo n. Portanto, (u_n) é uma sucessão crescente e limitada. Logo, pelo Teorema 3.2, (u_n) é convergente para um número L, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} u_{n-1} = L$$

pois (u_{n-1}) é subsucessão. Tomando o limite em $u_n = \sqrt{2u_{n-1}}$ encontra-se $L = \sqrt{2L}$, provando que $L = 2$ ou ainda que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

Exemplo 3.6 - Considere a sucessão (e_n) com $e_n = (1+1/n)^n$. Demonstra-se que (e_n) é monótona limitada, logo convergente. Sendo o binômio de Newton dado por

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \quad \text{onde} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

e $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, com $0! = 1$, e escolhendo $a = 1$ e $b = 1/n$, obtém-se

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{1}{n^r}.$$

Resulta

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1}\frac{1}{n} &= \frac{n!}{(n-1)!}\frac{1}{n} = \frac{n!}{n!} = 1; \\
\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right); \\
\binom{n}{3}\frac{1}{n^3} &= \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).
\end{aligned}$$

O termo de ordem r é:

$$\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{1}{n^r} =$$

$$\frac{1}{r!}\frac{1 \cdot\ 2 \cdot \ldots \cdot (n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)}{(n-r)!}\frac{1}{n^{r-1}} =$$

$$\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-2}{n}\right)\left(1-\frac{r-1}{n}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\ &+ \ldots+\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\\ &+ \ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Note-se que $\left(1-\frac{r}{n}\right)<1$ para $r=1,\ 2,\ldots,n-1$. Logo, da expressão acima obtém-se

$$\begin{aligned}e_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.\end{aligned}$$

Provando que (e_n) é limitada. Sendo

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e_{n+1}$$

verifica-se que (e_n) é crescente. Portanto, pelo Teorema 3.2, (e_n) é convergente. Seu limite representa-se por e que é denominado a base do sistema de logaritmos Neperianos. Tem-se

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Veja Capítulo 1, seção 1.10 .

3.1.2 Sucessões de Cauchy

Casos há em que não é possível calcular o limite explícito de uma sucessão. Para o estudo destes casos existe um critério, devido à

Cauchy, que permite deduzir a convergência de uma sucessão sem, todavia, conhecer o seu limite.

Uma sucessão (u_n) de números reais diz-se de Cauchy quando para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$|u_m - u_n| < \epsilon \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad m \geq n_0, n \geq n_0.$$

Preposição 3.3 - Se (u_n) for convergente para L então (u_n) será de Cauchy.

Demonstração: Sendo (u_n) convergente para L então para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$|u_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n \geq n_0.$$

Seja $m \geq n_0$, deste modo

$$|u_n - u_m| = |(u_n - L) + (L - u_m)| \leq$$

$$|u_m - L| + |u_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $m \geq n_0$ e $n \geq n_0$, provando que (u_n) é de Cauchy.

Teorema 3.3 - (*Teorema de Cauchy*) Se (u_n) for de Cauchy ela convergirá para um real L.

Demonstração: A idéia da demonstração consiste em reduzir ao Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessões. Demonstra-se que se (u_n) é de Cauchy ela é limitada, e o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante a existência de um valor aderente L para (u_n) concluindo-se que (u_n) converge para L. Procede-se por etapas:

(i) Se (u_n) é de Cauchy ela é limitada. De fato, como a condição vale para cada $\epsilon > 0$, toma-se $\epsilon = 1$ e resulta a existência de n_0 tal que

$$|u_m - u_n| < 1 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad m \geq n_0, n \geq n_0.$$

Tem-se,

$$|u_n| - |u_m| \leq \Big||u_n| - |u_m|\Big| \leq |u_m - u_n| < 1$$

para todo $m \geq n_0$, $n \geq n_0$. Fixando $m = n_0$, obtém

$$|u_n| < 1 + |u_{n_0}| \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n \geq n_0.$$

Seja $M = \max\Big\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{n_0-1}|\Big\}$ e $K = 1 + |u_{n_0}| + M$, então

$$|u_n| < K, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

provando que (u_n) é limitada.

(ii) Sendo (u_n) limitada ela possui um valor aderente L, isto é, (u_n) possui uma sub-sucessão (u_{n_k}) convergente para L (conforme o Teorema de Bolzano-Weirstrass). Logo, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$|(u_{n_k}) - L| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n_k \geq n_0.$$

(iii) A sucessão (u_n) converge para o valor aderente L. De fato,

$$|u_n - L| = |(u_n - u_{n_k}) + (u_{n_k} - L)| \leq |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - L|.$$

Sendo $n_k \geq n_0$ e $|u_n - u_m| < \frac{\epsilon}{2}$ para $m, n > n_0$, obtém-se da desigualdade acima que

$$|u_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n \geq n_0,$$

provando que (u_n) converge para L. Deste modo, concluímos que (u_n) é convergente.

Escólio. Uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão de números reais seja convergente é que ela seja de Cauchy.

Observação 3.2 - (a) Nos racionais uma sucessão de Cauchy não converge necessariamente para um racional. Por exemplo, a sucessão das aproximações por falta de $\sqrt{2}$ é de Cauchy mas não converge em $\mathbb{Q}$. De fato, considere-se as aproximações de $\sqrt{2}$, u_m e u_n com $m > n$. Tem-se

$$u_n = 1, a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{e} \quad u_m = 1, a_1 a_2 \dots a_m$$

sendo a_i um dos algarismos de 0 a 9. Logo, $a_i \leq 9$, para todo i (ver Capítulo 1). Portanto,

$$|u_m - u_n| \leq \frac{9}{10^n}\Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^{m-n}}\Big) < \epsilon$$

para cada $\epsilon > 0$ quando $m \geq n_0(\epsilon)$ e $n \geq n_0(\epsilon > 0)$. Assim, as aproximações por falta de $\sqrt{2}$ são de Cauchy mas não convergem para um racional.

De modo semelhante, um conjunto limitado de racionais não possui um supremo em $\mathbb{Q}$. Idem para o ínfimo. Diz-se, por esta razão, que *os racionais $\mathbb{Q}$ não são completos na ordem definida por menor ou igual.* Sob estes dois aspectos os reais $\mathbb{R}$, preenchem os defeitos dos racionais. Em $\mathbb{R}$ vale o teorema do supremo e toda sucessão de Cauchy é convergente. No entanto, em $\mathbb{R}$ a equação $x^2 + 1 = 0$ não possui solução. Os números complexos resolvem este problema. Como pode ser visto no parágrafo seguinte.

(b) A seguir, o corpo $\mathbb{R}$ será ampliado para resolver as equações algébricas. Em particular, a equação $x^2 + 1 = 0$ possuirá solução neste novo corpo. Procede-se de maneira heurística.

Suponha que $x^2 = -1$ possua solução $\sqrt{-1}$, o que até o momento não tem sentido. Então, considere os objetos do tipo $a+b\sqrt{-1}$, sendo a e b números reais e defina-se:

- Igualdade: $(a + b\sqrt{-1}) = (c + d\sqrt{-1}) \quad \text{se} \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d$;
- Adição: $(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = ((a + c), (b + d)\sqrt{-1})$;
- Multiplicação: $(a+b\sqrt{-1}).(c+d\sqrt{-1}) = (ac-bd, (ad+bc)\sqrt{-1})$.

Agora, motivado pelo argumento anterior, considere o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de pares de números reais $(a, b), (c, d)$ etc, com as operações:

- Igualdade: $(a, b) = (c, d)$ se $a = c$ e $b = d$;
- Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- Multiplicação: $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dos pares $(a, b), (c, d), \ldots$ com estas operações é um corpo, denominado *corpo dos números complexos e representado por* $\mathbb{C}$.

Os números reais $\mathbb{R}$ são uma parte dos complexos $\mathbb{C}$ constituída pelos pares do tipo $(a, 0)$, isto é, com a segunda coordenada nula. Geométricamente, os números complexos se identificam aos pontos do plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tem-se $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

• *Solução em* $\mathbb{C}$ *da equação* $x^2+1 = 0$. O número real 1 identifica-se ao número complexo $(1, 0)$ e o número real 0 ao par $(0, 0)$. Deve-se encontrar o par $(u, v) \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\begin{aligned} (u,v)^2 + (1,0) &= (0,0) \\ (u^2 - v^2, 2uv) + (1,0) &= (0,0) \\ (u^2 - v^2 + 1, 2uv) &= (0,0). \end{aligned}$$

Da igualdade em $\mathbb{C}$, obtém-se $u^2 - v^2 + 1 = 0$ e $2uv = 0$ As soluções são: $u = 0,\ \ v = 1$ e $u = 0,\ \ v = -1$. As soluções em $\mathbb{C}$ são os pares: $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Representa-se $(0, 1)$ por i, ou seja, $i = (0, 1)$. Sendo i uma solução de $(u, v)^2 + (1, 0) = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$, $0 = (0, 0)$, tem-se $i^2 + 1 = 0$. Logo, $i^2 = -1$. Portanto, o número complexo $(1, 0)$ denomina-se unidade real e o complexo $i = (0, 1)$ unidade imaginária. Notação para os números complexos:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy.$$

O Teorema de D'Alembert (1717-1783), diz que a equação algébrica

$$a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

com $a_i \in \mathbb{C}$ possui uma raiz em $\mathbb{C}$.

Denomina-se módulo de z o número positivo

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

O módulo $|z|$ do número complexo z mede o comprimento do vetor $0z$ do plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Deste modo, obtém-se

$$x = |z|\cos\theta \quad \text{e} \quad y = |z|\text{sen}\theta.$$

Portanto,

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{sen}\theta)$$

denominada representação de Euler (1707-1783) dos números complexos. O ângulo θ do eixo $0x$ com o vetor $0z$ denomina-se argumento do número complexo z.

A seguir, estuda-se um resultado sobre sucessões conhecido sob a denominação de Teorema de Cesaro (1888). Antes, porém, serão feitas certas considerações sobre limite de sucessões.

Considere-se uma sucessão (u_n) tal que para cada $k > 0$ exista $n_k \in \mathbb{N}$ com $u_n > k$ para todo $n \geq n_k$. Diz-se que a sucessão (u_n) *diverge* para $+\infty$ escrevendo-se

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

Por exemplo, seja $u_n = (n^2+1)/n$, então $(n^2+1)/n = n+1/n \geq 1$. Além disso, $1 + 1/n > n$. Logo, $(n^2+1)/n > k$ para $n \geq k$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. De modo análogo, define-se a divergência para $-\infty$.

Teorema 3.4 - (*Teorema de Cesaro*) Sejam (v_n) uma sucessão estritamente crescente e divergente e (u_n) uma sucessão tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lambda.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda.$$

Demonstração: Será feita no caso que $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, por hipótse, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$, tal que

$$\lambda - \epsilon < \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} < \lambda + \epsilon \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n \geq n_0.$$

Variando n de n_0 até $n_0 + k - 1$, obtém-se

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \epsilon)\left(v_{n_0+1} - v_{n_0}\right) < u_{n_0+1} - u_{n_0} < (\lambda + \epsilon)\left(v_{n_0+1} - v_{n_0}\right) \\
&(\lambda - \epsilon)\left(v_{n_0+2} - v_{n_0+1}\right) < u_{n_0+2} - u_{n_0+1} < (\lambda + \epsilon)\left(v_{n_0+2} - v_{n_0+1}\right) \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&(\lambda - \epsilon)\left(v_{n_0+k} - v_{n_0+k-1}\right) < u_{n_0+k} - u_{n_0+k-1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad < (\lambda + \epsilon)\left(v_{n_0+k} - v_{n_0+k-1}\right)
\end{aligned}$$

Somando-se membro a membro, tem-se

$$(\lambda - \epsilon)\left(v_{n_0+k} - v_{n_0}\right) < u_{n_0+k} - u_{n_0} < (\lambda + \epsilon)\left(v_{n_0+k} - v_{n_0}\right)$$

Para k maior que um certo k_0 obtém-se $v_{n_0+k} > 0$. Logo, dividindo membro a membro por v_{n_0+k} resulta:

$$(\lambda - \epsilon)\Big(1 - \frac{v_{n_0}}{v_{n_0+k}}\Big) + \frac{u_{n_0}}{v_{n_0+k}} < \frac{u_{n_0+k}}{v_{n_0+k}} < \frac{u_{n_0}}{v_{n_0+k}} + (\lambda + \epsilon)\Big(1 - \frac{v_{n_0}}{v_{n_0+k}}\Big)$$

Sendo o $\lim\limits_{k \to \infty} v_{n_0+k} = +\infty$, toma-se o limite de ambos os membros

$$\lambda - \epsilon < \lim_{k \to \infty} \frac{u_{n_0+k}}{v_{n_0+k}} < \lambda + \epsilon,$$

para cada $\epsilon > 0$. Logo,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{u_{n_0+k}}{v_{n_0+k}} = \lambda.$$

Corolário 3.1 - Seja $v_n = n$. Se $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lambda$, então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n/n = \lambda$. Serão apresentadas, a seguir, algumas aplicações imediatas do Teorema de Cesaro e do Corolário 3.1.

• *Média Aritmética* . Se a sucessão (u_n) converge para u a sucessão $\big((u_1 + u_2 + \ldots + u_n)/n\big)$ também converge para u. De fato, define-se $u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ e $v_n = n$. Assim, deseja-se calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$$

que é, pelo Teorema de Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

• *Média Geométrica.* Se (u_n), $u_n > 0$, converge para $u > 0$ então $(u_1 u_2 \ldots u_n)^{1/n}$ também converge para u De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \log(u_1 u_2 \ldots u_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log u_1 + \log u_2 + \ldots \log u_n}{n}$$

Logo, pela média aritmética, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \log(u_1 u_2 \ldots u_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \log u_n.$$

Deste modo,

$$\log\left(\lim_{n\to\infty}(u_1 u_2 \ldots u_n)^{1/n}\right) = \log \lim_{n\to\infty} u_n = \log u.$$

Conseqüentemente,

$$\lim_{n\to\infty}(u_1 u_2 \ldots u_n)^{1/n} = u.$$

- Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$. Pelo Teorema de Cesaro tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1) - \log n}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

- Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}$, desde que $u_n > 0$ e $\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$ converge para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, escrevendo

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{u_1 \frac{u_2}{u_1} \cdots \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \frac{u_n}{u_{n-1}}}.$$

Pelo resultado sobre a média geométrica, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$

Consulte sobre o Teorema de Cesaro: *F. Sevèri - Lezioni di Analisi*- Vol. Primo, N. Zanichelli ed. Bologna, 1946 - pg 276.

- Considere a sucessão (H_n) definida por

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Esta sucessão diverge. De fato, é fácil ver que ela é crescente, ou seja, $H_1 < H_2 < \ldots < H_n < \ldots$. Além disso, obtém-se

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}.$$

Sendo $n+1 < n+n$, $n+2 < n+n$, ..., $n+(n-1) < n+n$, resulta que

$$H_{2n} - H_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ou seja,

$$H_{2n} > H_n + \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} H_{2m} & > & H_m + \dfrac{1}{2} \\ H_{2^2m} & > & H_{2m} + \dfrac{1}{2} \\ H_{2^3m} & > & H_{2^2m} + \dfrac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{2^km} & > & H_{2^{k-1}m} + \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Somando membro a membro, tem-se

$$H_{2^km} > H_m + \frac{k}{2} > \frac{k}{2}.$$

Resulta que a subsucessão (H_{2^km}) de (H_m) é crescente mas não é limitada. Logo, quando $m \to \infty$ a subsucessão (H_{2^km}) diverge. Deste modo, conclui -se que a sucessão (H_m) é divergente, pois se convergisse então toda subsucessão convergiria.

3.2 Séries de Números Reais

Sabe-se, da aritmética dos números reais, adicionar um número finito de parcelas (propriedade associativa da adição), isto é, dados os números reais $u_1, u_2, \ldots, u_n$ calcula-se $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Na presente seção planeja-se dar sentido a generalização para uma soma com uma infinidade enumerável de parcelas. Dito de modo preciso, tem-se uma sucessão (u_n) e deseja-se dar sentido a soma $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, que representa-se por $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e denomina-se *série de termo geral* u_n.

Há várias maneiras de definir esta soma com uma infinidade enumerável de parcelas. Será adotada aqui uma idealizada por Cauchy que consiste em reduzir ao caso de um número finito de parcelas e empregar a noção de limite de uma sucessão (veja Parte 2, Complemento **22**). De fato, dada a sucessão (u_n) define-se a sucessão (s_n), sendo (s_n) denominada *soma parcial ou reduzida de ordem* n *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ \vdots & \;\vdots\; \vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \end{aligned}$$

Definição 3.5 - Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente quando a sucessão (s_n) das reduzidas for convergente. O limite de (s_n) denomina-se soma da série. Escreve-se, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Quando (s_n) não converge diz-se que a série não converge. Quando (s_n) diverge diz-se que a série diverge.

Exemplo 3.6 - Considere a sucessão (q^{n-1}), sendo $q \in \mathbb{R}$. Obtém-se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

sendo

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Então, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ se $|q| < 1$ e diverge se $|q| > 1$. Conseqüentemente, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ converge para $|q| < 1$ e diverge para $|q| > 1$. Esta série é denominada *série geométrica*. Quando $q = 1$ obtém-se $(s_n) = (n)$ e, portanto, a série diverge.

Exemplo 3.7 - Considere a sucessão $u_n = 1/(n(n+1))$ e calcule a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Sabe-se que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

com

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Portanto, $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, provando que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(veja Parte 2, Complemento **19**).

O processo geral para estudar uma sucessão, como foi visto, é o teorema de Cauchy. Assim, uma condição necessária e suficiente para a convergência de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é que: para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que

$$|s_m - s_n| < \epsilon \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad m \geq n_0 \quad \text{e}\, n \geq n_0.$$

Ao analisar esta condição, supondo $m > n$, tem-se:

$$s_m - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_m = \sum_{\nu=n+1}^{m} u_\nu.$$

Conseqüentemente, reescrevendo o Teorema de Cauchy, obtém-se: uma condição necessária e suficiente para que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ seja convergente é que para cada $\epsilon > 0$, exista $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $\Big| \sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k \Big| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$.

Exemplo 3.8 - Considere a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^\nu$ com $\nu \in \mathbb{R}$. Estuda-se a convergência desta série em função do parâmetro $\nu \in \mathbb{R}$. Esta série denomina-se *série de Dirichlet (1806-1859).*

Caso 1: Supondo que $\nu = 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ é denominada *série harmônica*, pois cada termo é a média harmônica entre o que precede e o que segue. Representando por H_n sua reduzida de ordem n escreve-se:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Como foi estudado na seção anterior esta sucessão (H_n) diverge, logo a série harmônica não converge. Recorde-se que dados dois números reais positivos a e b denomina-se média harmônica de a e b ao inverso da média aritmética dos seus inversos, isto é, o número h tal que $1/h = \big(1/a + 1/b\big)/2$. Calcule a média harmônica de $a = 1/(n-1)$ e $b = 1/(n+1)$ que será $1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso 2: Supondo $\nu < 0$, tem-se $1/n^\nu = n^\mu$, onde $\mu = -\nu > 0$. Portanto, a sucessão $H_n = 1^\mu + 2^\mu + \ldots + n^\mu$ não é limitada e, então, ela diverge. O mesmo acontece para $0 < \nu < 1$.

Caso 3: Finalmente, supondo $\nu > 1$ prova-se que a série converge. De fato, seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Então,

$$\begin{aligned}
H_n &= 1 + \Big(\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{3^\nu}\Big) + \Big(\frac{1}{4^\nu} + \frac{1}{5^\nu} + \frac{1}{6^\nu} + \frac{1}{7^\nu}\Big) \\
&+ \Big(\frac{1}{8^\nu} + \frac{1}{9^\nu} + \frac{1}{10^\nu} + \frac{1}{11^\nu} + \frac{1}{12^\nu} + \frac{1}{13^\nu} \\
&+ \frac{1}{14^\nu} + \frac{1}{15^\nu} + \frac{1}{16^\nu} + \frac{1}{17^\nu}\Big) + \ldots \\
&+ \left(\frac{1}{(2^p)^\nu} + \frac{1}{(2^p+1)^\nu} + \frac{1}{(2^p+2)^\nu} + \ldots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^\nu}\right)
\end{aligned}$$

até $n = 2^{p+1} - 1$. Como foram escolhidos os termos entre parenteses? Observe que para $p = 1, 2, \ldots$ encontra-se o número de termos n tais que $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Por exemplo, para $p = 1$ tem-se $2 \leq n < 2^2 = 4$, logo $n = 2$ e $n = 3$, ou seja,

$$\Big(\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{3^\nu}\Big).$$

Agora, para $p = 2$ obtém-se $2^2 \leq n < 2^3$ e os números $n = 4, 5, 6, 7$ com os respectivos termos:

$$\left(\frac{1}{(2^2)^\nu} + \frac{1}{5^\nu} + \frac{1}{6^\nu} + \frac{1}{7^\nu}\right).$$

Assim, sucessivamente, para o caso geral $2^p \leq n < 2^{p+1}$ encontra-se: $n = 2^p$, $n = 2^p + 1$, $n = 2^p + 2$,..., sendo o último $n = 2^{p+1} - 1$. Portanto, existem 2^p termos e

$$\left(\frac{1}{(2^p)^\nu} + \frac{1}{(2^p+1)^\nu} + \frac{1}{(2^p+2)^\nu} + \ldots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^\nu}\right)$$

Deste modo, fica respondida a pergunta de como foram encontrados os termos entre parenteses. Prova-se, agora, que (H_n) é crescente e limitada. De fato, escreve-se

$$\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{3^\nu} < 2 \cdot \frac{1}{2^\nu}$$

$$\frac{1}{(2^2)^\nu} + \frac{1}{5^\nu} + \frac{1}{6^\nu} + \frac{1}{7^\nu} < 2^2 \cdot \frac{1}{(2^2)^\nu}$$

$$\frac{1}{(2^p)^\nu} + \frac{1}{(2^p+1)^\nu} + \frac{1}{(2^p+2)^\nu} + \ldots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^\nu} < 2^p \cdot \frac{1}{(2^p)^\nu}$$

Logo,

$$H_n \leq 1 + \frac{1}{2^{\nu-1}} + \left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)^p.$$

Conseqüentemente, encontra-se que (H_n) é crescente e limitada já que sendo

$$\frac{1}{2^{\nu-1}} + \left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)^p$$

a reduzida de uma série geométrica de razão $1/2^{\nu-1} < 1$, pois $\nu > 1$, ela é convergente. Note que $2^p < n$, se $n \to \infty$ então $p \to \infty$. Concluindo, tem-se dos casos 1, 2 e 3 que para $\nu \in \mathbb{R}$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\nu}$ converge se $\nu > 1$ e diverge se $\nu \leq 1$ (veja Parte 2, Complemento **56**).

3.2.1 Critérios de Convergência

Regra de D'Alembert: Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos positivos, tem-se

(i) Se $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1$, para $n \geq n_0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge;

(ii) Se $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > k > 1$, para $n \geq n_0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Demonstração: Primeiramente, será demonstrado que (i) vale. Resulta $u_{\nu+1} < ku_{\nu}$ e fazendo $\nu = 1, 2, \ldots, n$ encontra-se

$$\begin{array}{rcl} u_2 & < & ku_1, \\ u_3 & < & ku_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n+1} & < & ku_n. \end{array}$$

Logo, obtém-se $u_n < ku_{n-1} < k(ku_{n-2} < \ldots < k^{n-1}(ku_1)$. Isto é,

$$u_n < k^n u_1.$$

Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é majorada pela série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^n u_1$ com $k < 1$. Logo, a série converge.

Agora demonstra-se o item (ii). Seja $k > 1$ e $u_{\nu+1} > ku_\nu$ para todo $\nu = 1, 2, \ldots, n$. De modo análogo ao caso anterior, tem-se $u_n > k^n u_1$, com $k > 1$. Logo, a série diverge.

Corolário 3.2 - Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$. Resulta que

(i) Se $\lambda < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge;

(ii) Se $\lambda > 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge;

(iii) Se $\lambda = 1$, então não há informação sobre a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Demonstração: Demonstra-se o item (i). Seja k um número qualquer tal que $\lambda < k < 1$. Pode-se determinar n_0 tal que

$$\lambda - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \epsilon, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n > n_0$$

com $\epsilon > 0$ dado. Sendo $\lambda < k < 1$ toma-se $\epsilon = k - \lambda$. Deste modo, $u_{n+1}/u_n < k$, $k < 1$. Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. Para o caso (ii) basta observar que $u_{n+1}/u_n > \lambda > 1$. E, para o caso (iii) considere o caso 1 do exemplo 3.8, onde $\lambda = 1$ e a séria hormônica é divergente. Por outro lado, o caso 3 do mesmo exemplo para $\nu = 2$ tem-se que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ é convergente.

Exemplo 3.9 - Seja a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu^n$ para $u \in \mathbb{R}$. Então, tem-se

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)u^{n+1}}{nu^n} = u\frac{n+1}{n}.$$

Logo, a série converge se $|u| < 1$.

Observação 3.3 - Quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ possui o termo u_n de sinal qualquer aplica-se a regra de D'Alembert à série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Regra de Cauchy: A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de termos positivos

(i) converge se $(u_n)^{1/n} < k < 1$;

(ii) diverge se $(u_n)^{1/n} > k > 1$;

(iii) nada se pode afirmar quando $\lambda = 1$.

Demonstração: Primeiramente, supõe-se que $(u_n)^{1/n} < k$. Logo, $u_n < k^n$, $k < 1$ e, deste modo, a série é majorada por uma série geométrica de razão $k < 1$. Conseqüentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. A demonstração do item (ii) resulta de $u_n > k^n$ com $k > 1$.

Corolário 3.3 - Seja $\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = \lambda$. Então,

(i) Se $\lambda < 1$ a série converge;

(ii) Se $\lambda > 1$ a série diverge;

(iii) Se $\lambda = 1$ nada se pode afirmar.

Exemplo 3.10 - Seja $u_n = \left(\frac{a+n}{a+(n-1)}\, u\right)^n$ com $a \in \mathbb{R}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente. De fato,

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{a+n}{a+(n-1)}\, u = \frac{1+a/n}{1+1/n(a-1)}\, u$$

então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = u$. Portanto, se $|u| < 1$ a série converge e se $|u| > 1$

a série diverge.

Proposição 3.4 - Se $u_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = \lambda$.

Demonstração: Reduz-se ao Teorema de Cesaro. Observando que

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{u_1 \frac{u_2}{u_1} \frac{u_3}{u_2} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

e provando-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$ (veja o Teorema de Cesaro - Média Geométrica.)

Quando os termos da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ são de sinal variável considera-se a convergência absoluta. Diz-se que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente quando a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ for convergente. Sendo

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} u_j\Big| \leq \sum_{j=1}^{n} |u_j|,$$

conclui-se que toda série absolutamente convergente é convergente. Os dois próximos resultados demonstram que a a recíproca dessa afirmativa não é verdadeira.

Teorema 3.4 - Seja (u_n) uma sucessão decrescente e convergente para zero. Então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ é convergente.

Demonstração: Considere $u_n > 0$ e as reduzidas de ordem ímpar e par separadamente. Sendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2p} + u_{2p+1} - \ldots$$

encontra-se

$$
\begin{aligned}
s_1 &= u_1; \\
s_3 &= u_1 - (u_2 - u_3); \\
s_5 &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5); \\
\vdots \;\; &\vdots \;\; \vdots \\
s_{2p+1} &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2p} - u_{2p+1}); \\
s_2 &= u_1 - u_2; \\
s_4 &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4); \\
s_6 &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6); \\
\vdots \;\; &\vdots \;\; \vdots \\
s_{2p} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots + (u_{2p-1} - u_{2p}).
\end{aligned}
$$

Sendo (u_n) decrescente tem-se $u_n \geq u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$
\begin{gathered}
s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \ldots \geq s_{2p+1} \geq \ldots, \\
s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2p} \leq \ldots,
\end{gathered}
$$

isto é, (s_{2p+1}) é decrescente e (s_{2p}) é crescente. Além disso, obtém-se $s_{2p+1} - s_{2p} = u_{2p+1}$. Mas, por hipótese, (u_n) converge para zero. Logo, para cada $\epsilon > 0$, existe $p_0 = p_0(\epsilon)$, tal que $s_{2p+1} - s_{2p} < \epsilon$, para todo $p \geq p_0$. Resulta que as classes de números reais $\{s_{2p}\}$ e $\{s_{2p+1}\}$ são contíguas. Portanto, elas definem um único número real s tal que

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} u_j.$$

Exemplo 3.11 - A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ é convergente mas não é absolutamente convergente, pois a série harmônica diverge.

3.2.2 O Espaço de Hilbert (1862-1943) $\ell^2(\mathbb{N})$

Considere o conjunto de todas as sucessões de números reais (u_n) cuja série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ seja convergente. Esta sucessão denomina-se de *quadrado somável* .

Mostra-se que o conjunto definido acima é não vazio. De fato, a sucessão $(1/n)$ é de quadrado somável já que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\nu}$ é convergente para todo $\nu > 1$, em particular, para $\nu = 2$.

Representa-se por $\ell^2(\mathbb{N})$ a coleção de todas as sucessões (u_n), de números reais, que possuem o quadrado somável. Em $\ell^2(\mathbb{N})$ define-se as seguintes operações algébricas:

- Multiplicação por um número real. Se $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, então (λu_n), também, pertence a $\ell^2(\mathbb{N})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Se $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ e $(v_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, então $(u_n + v_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. De fato, sabe-se que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ são convergentes. Além disso, observe que:

$$(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n y_n + v_n^2 \leq 2(u_n^2 + v_n^2).$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ é convergente, isto é $(u_n + v_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Portanto, com as operações acima $\ell^2(\mathbb{N})$ é um *espaço vetorial sobre o corpo dos reais* $\mathbb{R}$. Deste modo, os objetos de $\ell^2(\mathbb{N})$ são vetores e os de $\mathbb{R}$ são escalares.

Para efeito de estudo da Análise Matemática deve-se mostrar que em $\ell^2(\mathbb{N})$ além da estrutura algébrica de espaço vetorial existe uma outra estrutura que permite definir convergência de sucessão. Para isto introduz-se em $\ell^2(\mathbb{N})$ um *produto escalar* do seguinte modo.

Produto Escalar em $\ell^2(\mathbb{N})$: Dados os objetos $u = (u_n)$, $v = (v_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ define-se o produto escalar de u e v por

$$(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n. \tag{3.1}$$

O primeiro problema é saber se este produto está bem definido, isto é, se a série que aparece em (3.1) é convergente. De fato, dado dois números positivos a e b, tem-se $2ab \leq a^2 + b^2$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n| \leq \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2\Big)$$

e o segundo membro converge, por hipótese. Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ é convergente e o produto escalar está bem definido.

São as seguintes as propriedades do produto escalar:

- bilinearidade: linear em cada variável;
- simetria: $(u, v) = (v, u)$;
- positividade estrita: $(u, u) = 0$ se e somente $u = 0$.

Assim, $\ell^2(\mathbb{N})$ está dotado de produto escalar. A partir da noção de produto escalar já se pode definir o comprimento ou a *norma* de um vetor $u \in \ell^2(\mathbb{N})$. De fato, define-se a norma de um vetor $u \in \ell^2(\mathbb{N})$, denotando-se por $\|u\|$, como sendo o número real:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \tag{3.2}$$

São as seguintes as propriedades norma

- $\|u\| > 0$ e $\|u\| = 0$ se e somente se $u = 0$. Observe que se $u = 0$ a sucessão (u_n) é tal que $u_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \ell^2(\mathbb{N})$.

- $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Esta propriedade denomina-se *desigualdade triangular*, afirmando que em um triângulo o comprimento de um lado é menor que a soma dos outros dois.

A seguir, demonstra-se a desigualdade triangular. Na demonstração faz-se uso da *desigualdade de Cauchy* que diz: se (a_i) e (b_i) são duas sucessões de $\ell^2(\mathbb{N})$, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\Big)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Deste modo, obtém-se da definição (3.2) que:

$$\|u+v\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i + v_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} |u_i||v_i| + \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2.$$

Então de (3.3) tem-se

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2\Big)^{1/2} + \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 \\ &= \Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2\Big)^{1/2}\Big]^2 \end{aligned}$$

Finalmente, tomando a raiz quadrada de ambos os lados chega-se a desigualdade triangular.

Observe que uma sucessão (u_ν), de objetos de $\ell^2(\mathbb{N})$, é tal que para cada $\nu \in \mathbb{N}$, u_ν é uma sucessão de quadrado somável.

Convergências em $\ell^2(\mathbb{N})$: Diz-se que uma sucessão (u_ν), com u_ν pertencente $\ell^2(\mathbb{N})$, *converge para* u, *no produto escalar,* quando a sucessão de números reais, (u_ν, v), converge para (u, v), para todo $v \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Diz-se que uma sucessão (u_ν), com $u_\nu \in \ell^2(\mathbb{N})$, *converge para* u, *na norma do* $\ell^2(\mathbb{N})$, quando a sucessão de números reais $(\|u_\nu - u\|)$ converge para zero.

Em termos de norma e produto escalar a desigualdade de Cauchy (3.3) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|. \tag{3.4}$$

Proposição 3.5 - Se uma sucessão (u_ν), $u_\nu \in \ell^2(\mathbb{N})$ converge segundo a norma para u, então ela converge segundo o produto escalar.

Demonstração: De fato pela desigualdade de Cauchy (3.4), tem-se

$$|(u_\nu - u, v)| \leq \|u_\nu - u\| \|v\| \text{ para todo } v \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Logo, converge no produto escalar.

Por esta razão diz-se que a*convergência segundo a norma é a convergência forte de $\ell^2(\mathbb{N})$ e a convergência, segundo o produto escalar, é a convergência fraca em $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Foi visto que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente. Isto implica que toda sequência de Cauchy em $\ell^2(\mathbb{N})$ é convergente. Conclui-se, portanto, que $\ell^2(\mathbb{N})$ possui as seguintes propriedades:

- é um espaço vetorial;
- é dotado de um produto escalar que define uma norma;
- com a norma de $\ell^2(\mathbb{N})$ toda sequência de Cauchy é convergente.

Um conjunto satisfazendo as propriedades acima mencionadas denomina-se *espaço de Hilbert real*.

Capítulo 4

Limite e Continuidade

4.1 Limite de uma Função Real

Considere-se uma função $f : C \to \mathbb{R}$, sendo C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Pretende-se estudar o comportamento de f em um ponto x_0 de C. O conjunto C pode ser um intervalo (a, b), ou uma semi-reta (a, ∞) ou qualquer conjunto não limitado, como no caso das sucessões, quando $C = \mathbb{N}$. Para estudar o comportamento de f em x_0, não importa o valor de f em x_0, mas sim seus valores nos pontos "próximos" de x_0. Por esta razão exige-se que x_0 seja tal que em cada vizinhança de x_0 existam pontos de C diferentes de x_0, isto é, exige-se que x_0 seja um ponto de acumulação de C. Então, para cada $V(x_0)$, vizinhaça de x_0, há pontos de C distintos de x_0.

Exemplo 4.1 - (Funções Reais)

- Seja $C = \mathbb{R}$ e $f(x) = |x|$, denominada módulo de x.

• Seja $C = \mathbb{R} - \{0\}$ com $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, denominada *sinal de x* e denotada por sig$x$.

• Seja C o conjunto dos irracionais de $(0, 1)$ e $f(x) = 1$ para $x \in C$.

• Seja $C = (0, 1)$ e $\chi : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi(x) = \left| \begin{array}{llll} 1 & \text{para} & x & \text{racional} \\ 0 & \text{para} & x & \text{irracional} \end{array} \right.$$

Esta função é denonimada de *função característica dos racionais de* $(0, 1)$, ou função de Dirichlet (1887). Observe-se que em vez de $(0, 1)$ poder-se-ia considerar um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e a função $\chi(x)$ definida do mesmo modo.

• Seja $C = (-2, +2)$ e $f(x) =$ parte inteira de x, denotada por $[x]$.

• Seja $C = (0, 10)$ e $f(x) = x - [x]$ ou $f(x) = (x - [x])^{1/2}$.

• $C = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ e $f(x) = \text{sen}\,\frac{1}{x}$. Esta função merece um estudo mais cuidadoso pois servirá de exemplos em diversos casos no decorrer desta seção. Note que:

$$-1 \leq \text{sen}\frac{1}{x} \leq +1.$$

Além disso,

$$\text{sen}\frac{1}{x} = 1 \quad \text{se} \quad \frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

e

$$\text{sen}\frac{1}{x} = -1 \quad \text{se} \quad \frac{1}{x_r} = \frac{3\pi}{2} + 2r\pi \quad \text{ou} \quad x_r = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2r\pi}.$$

Quando r e $k \in \mathbb{N}$ crescem, os pontos x_k e x_r, onde sen $\frac{1}{x}$, toma os valores $+1$ e -1 se aproximam, de modo que $|x_r - x_k| < \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$. Assim, quando x se aproxima de zero a função $f(x) = \text{sen}\frac{1}{x}$ oscila entre $+1$ e -1.

- Seja $C = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ e $f(x) = x\text{sen}\frac{1}{x}$. De modo análogo ao caso anterior tem-se $x\,\text{sen}\frac{1}{x} \leq x$. Logo, quando x se aproxima de zero, então $x\,\text{sen}\frac{1}{x}$ também se aproxima de zero.

- Seja $C = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ e $f(x) = \text{sen}\,x/x$. Mostra-se que quando x se aproxima de zero então $f(x) = \text{sen}\,x/x$ se aproxima de 1, mas a função não está definida em $x = 0$.

Os exemplos anteriores fazem sentido também quando $x < 0$, isto é, $x > 0$ ou $x < 0$.

Definição 4.1 - Considere $C = (a, b)$ um intervalo, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $a < x_0 < b$. Diz-se que L *é limite de* f *no ponto* x_0 quando para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ positivo, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $0 < |x - x_0| < \delta$.

Note que $0 < |x - x_0|$, isto é, no caso geral não se tem $x = x_0$, ou seja, f não está necessariamente definida em x_0, como, por exemplo, $f(x) = \text{sen}\,x/x$.

Uma consequência simples da definição de limite é que se (x_n) for uma sucessão convergente para x_0, então $(f(x_n))$ converge para L.

A seguir, define-se a noção de limite no caso em que C é um conjunto de números reais e x_0 é um ponto de acumulação de C.

Definição 4.2 - Diz-se que L *é limite de* f, no ponto ponto de acumulação x_0, de C, quando para cada $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança, $V_\epsilon(x_0)$, tal que $|f(x)-L| < \epsilon$ para todo ponto $x \in [V_\epsilon(x_0)-\{x_0\}]\cap C$.

Nas Definições, 4.1 e 4.2, adota-se a seguinte notação para o limite:

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Proposição 4.1 - (*Unicidade do Limite*) Se L é limite de f, em x_0, então L é único.

Demonstração: De fato, suponha que existam em x_0 dois limites para f, isto é L e L'. Então, para cada $\epsilon > 0$

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |f(x) - L'| < \frac{\epsilon}{2}$$

para $0 < |x - x_0| < \delta$ e $0 < |x - x_0| < \delta'$. Logo, para cada ϵ, tem-se

$$|L - L'| \leq |f(x) - L| + |f(x) - L'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para $0 < |x - x_0| < \min\{\delta, \delta'\}$. Portanto, $L = L'$.

As operações aritméticas de adição e multiplicação se estendem ao limite. Conseqüentemente, quando os limites existem, obtém-se:

$$\lim_{x\to x_0} (f \pm g) = \lim_{x\to x_0} f \pm \lim_{x\to x_0} g; \quad \lim_{x\to x_0} (fg) = \lim_{x\to x_0} f \cdot \lim_{x\to x_0} g.$$

Se $f(x) \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}.$$

Há funções que não possuem limite no ponto x_0, mas possuem limites quando x se aproxima de x_0, pela esquerda e quando x se aproxima de x_0, pela direita, ou seja, existem os *limites laterais*. Deste modo, obtém-se com ϵ e δ:

- $|f(x) - L| < \epsilon$, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, e escrev-se, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$;
- $|f(x) - L| < \epsilon$, se $x_0 - \delta < x < x_0$, e escreve-se, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Exemplo 4.2 - Seja $f(x) = \frac{|x|}{x}$, se $x \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +1.$$

Proposição 4.2 - Uma condição necessária e suficiente para que f possua limite em x_0 é que os limites laterais sejam iguais.

Demonstração: (Condição Suficiente) Suponha que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

. Então, para cada $\epsilon > 0$, existem δ_1 e δ_2, tais que $|f(x) - L| < \epsilon$, para $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ e $|f(x) - L| < \epsilon$, para $x_0 < x < x_0 + \delta_2$. Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ valem as duas desigualdades, ou seja,

$$|f(x) - L| < \epsilon, \quad \text{para} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \text{ou} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Provando que L é o limite de f em x_0.

(Condição Necessária-) Se $|f(x) - L| < \epsilon$, para $0 < |x - x_0| < \delta$ vale também nos intervalos laterais.

Definição 4.3 - Diz-se que a função $f : C \to \mathbb{R}$ *é crescente*, quando $f(\xi) \leq f(\eta)$, para todo ξ, $\eta \in C$, com $\xi \leq \eta$, e f é *decrescente* se, $f(\xi) \geq f(\eta)$, para todo ξ, $\eta \in C$, com $\xi \leq \eta$.

Observação 4.1 - (1) Demonstra-se que se $f : C \to \mathbb{R}$ é uma função, crescente e limitada, então f possui um limite, a esquerda, em cada ponto de acumulação, $x_0 \in C$. Análogamente demonstra-se que se $f : C \to \mathbb{R}$ é função, decrescente e limitada, então f possui um limite, a direita, em todo ponto de acumulação, $x_0 \in C$.

(2) Sejam, $f : C \to \mathbb{R}$ uma função e x_0 um ponto de acumulação de C. Então, f pode não ter limite em x_0, mas ela tem valor aderente, em x_0, conforme definição a seguir:

Definição 4.4 - Diz-se que L *é um valor aderente de* f *em* x_0, quando existe uma sucessão (x_n) convergente para x_0 e $(f(x_n))$ converge para L.

Exemplo 4.3 - Seja $f(x) = \text{sen}\frac{1}{x}$, para $x > 0$. Esta função não possui limite em $x_0 = 0$. Entretanto, prova-se que $L = 1$ é um valor aderente de $f(x)$ em $x_0 = 0$. De fato, tem-se que

$$\text{sen}\frac{1}{x} = 1 \quad \text{para} \quad \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Daí, $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Logo, se $x_n \to 0$, então $f(x_n) = \text{sen}\frac{1}{x_n} \to 1$.

Exercício 4.1 - Mostre que os pontos do intervalo $[-1, +1]$ são valores aderentes de $f(x) = \text{sen}\frac{1}{x}$, para $x > 0$.

4.2 Continuidade

De modo análogo ao que foi demonstrado para sucessões, monstra-se que, se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ possuir limite em x_0, então f é limitada em uma vizinhança de x_0. Isto equivale a dizer que $|f(x)| < K$ para todo $x \in V(x_0)$.

Considere a função $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ela não é limitada em toda vizinhança de $x_0 = 0$. De fato, qualquer que seja $k > 0$, existe uma vizinhança de x_0 tal que $f(x) > k$, nesta vizinhança. Diz-se então que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. De forma similar define-se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

No caso das sucessões o conjunto $\mathbb{N}$ é não limitado e sem pontos de acumulação. Por isto, deseja-se saber como se comporta uma sucessão, quando n é "muito grande", $n > n_0$, qualquer que seja n_0 ou n tendendo para infinito. No caso geral de funções tem-se o problema análogo. Por exemplo, suponha $C = (0, \infty)$ a semi-reta e $f : C \to \mathbb{R}$. Portanto, diz-se que L é o limite da f quando x tende para o infinto, quando para cada $\epsilon > 0$ existe $k_\epsilon > 0$, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, para todo $x \geq k_\epsilon$. Escreve-se, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$.

De modo análogo, quando $C = (-\infty, 0)$ define-se o limite quando $x \to -\infty$. Mais geralmente, define-se o caso $x \to \pm\infty$ e $f(x) \to \pm\infty$. Por exemplo, se $f(x) = (2x+1)/(x-1)$, então $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$.

Quando o $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, com $L \in \mathbb{R}$, diz-se que *f é convergente para L, em x_0.*

Teorema 4.1 - (*Teorema de Cauchy*) Sejam $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $a < x_0 < b$. Uma condição necessária e suficiente para que f possua limite no ponto x_0 é que, para cada $\epsilon > 0$, exista $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, tal que

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon$$

para todo par de pontos x, x' de (a, b), tais que $0 < |x - x_0| < \delta$ e

$0 < |x' - x_0| < \delta$.

Demonstração: (Condição Necessária) Suponha que existe o limite, L, de f, em x_0. Resulta que, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, tal que

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

Seja agora $x' \in (a, b)$ tal que $0 < |x' - x_0| < \delta$. Já que L é o limite, obtém-se $|f(x') - L| < \epsilon/2$. Portanto,

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - L| + |f(x') - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo x, x' tais que $0 < |x - x_0| < \delta$ e $0 < |x' - x_0| < \delta$.

(Condição Suficiente) Deve-se provar que se f satisfaz a condição de Cauchy em x_0, então f possui limite em x_0. De fato, seja (x_n) uma sucessão de (a, b) convergente para x_0. A sucessão de números reais $(f(x_n))$ é uma sucessão de Cauchy, porque f, por hipótese, satisfaz a condição de Cauchy e (x_n) converge para x_0. Logo, pelo teorema de Cauchy para sucessões, conclui-se que $(f(x_n))$ é convergente para um número real L. Resta mostrar que f possui limite L em x_0. De fato, da condição de Cauchy para f, obtém-se

$$|f(x) - f(x_n)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para} \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad |x_n - x_0| < \delta.$$

Portanto,

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para $0 < |x - x_0| < \delta$ e $0 < |x_n - x_0| < \delta$, provando que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x/x$, sabe-se que $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, ou ainda, $1 < x/\operatorname{sen} x < 1/\cos x$, quando o arco x é medido em radianos. Então, obtém-se $\cos x < \operatorname{sen} x/x < 1$ e quando $x \to 0$ vem que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x/x = 1$. Assim, a função $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ não está definida em $x_0 = 0$, mas possui um limite igual a um, neste pode.

Agora, considere outra função h definida por:

$$h(x) = \left| \begin{array}{lll} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} & x \neq 0, \\ 1 & \text{se} & x = 0. \end{array} \right.$$

Tem-se que, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0) = 1$, logo, diferentemente de f, a função h está definida em $x_0 = 0$ com valor funcional igual ao seu limite. Portanto, h é contínua.

Definição 4.5 - Diz-se que uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, *é contínua, em* $x_0 \in (a, b)$, se f está definida em x_0 e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Diz-se, portanto, que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua, em $x_0 \in (a, b)$, quando para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, para todo $x - x_0| < \delta$.

Observação 4.2 - A função h, acima definida, é contínua em $x_0 = 0$.

Definição 4.6 - Diz-se que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua, em (a, b), se f é contínua em todo ponto de (a, b).

Definição 4.7 - Diz-se que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é *limitada,* quando existe um número, $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in (a, b)$.

Proposição 4.3 - Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então ela é limitada em $[a, b]$.

Demonstração: De fato, f é contínua em a. Logo, $|f(x)-f(a)| < \epsilon$, para todo $a \leq x < a + \delta_0$. Fazendo $\epsilon = 1$ tem-se

$$|f(x)| - |f(a)| \leq ||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < 1,$$

para $a \leq x < a + \delta_0$. Daí, $|f(x)| < f(a) + 1$, para $a \leq x < a + \delta_0$. Assim, o conjunto $\{c \in (a, b); f$ é limitada em $a \leq x \leq c\}$ é não vazio e limitado em $\mathbb{R}$. Logo, este conjunto possui um supremo c_0, isto é, $[a, c_0]$ é o maior intervalo contido em $[a, b]$ no qual f é limitada. Se $c_0 = b$ o teorema está demonstrado. Por contradição supõe-se que $a < c_0 < b$ $(c_0 \neq b)$. De fato, sendo f contínua em c_0, pelo mesmo argumento usado anteriormente, f é limitada em $[c_0, c_0 + \delta_0]$, isto é, em $[a, c_0 + \delta_0]$, o que é uma contradição já que $[a, c_0]$ era o maior intervalo. Logo $c_0 = b$.

De modo análogo ao caso de um intervalo define-se continuidade de $f : C \to \mathbb{R}$ quando C for um conjunto e x_0 um ponto de acumulação de C. Portanto, L é o limite de f em x_0, ponto de acumulação de C quando para cada $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $V_\epsilon(x_0)$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in V_\epsilon(x_0) \cap C.$$

Compare com o caso do intervalo. Diz-se que f é contínua em C quando f é contínua em todos os pontos de acumulação de C pertencentes a C. O conjunto dos pontos de acumulação de C denomina-se o conjunto derivado de C representado por C', como já foi definido. Com esta notação diz-se que f é contínua em C quando ela for contínua em $C \cap C'$.

4.2.1 Propriedades das Funções Contínuas

A seguir, serão consideradas as funções reais definidas em intervalos da reta real $\mathbb{R}$.

Teorema 4.2 - Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. São válidas as seguintes asserções:

(1) f é limitada em $[a, b]$;

(2) existem ξ, η, em $[a, b]$, onde f assume o supremo e o ínfimo, respectivamente.

Demonstração: Para demonstrar a parte (1) veja a Proposição 4.3; contudo, será apresentada aqui outra demonstração usando raciocínio de contradição. De fato, suponha que f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ mas não é limitada. Daí resulta que existe uma sucessão de pontos (x_n) em $[a, b]$ tal que $f(x_n) > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo $a \leq x_n \leq b$ a sucessão (x_n) é limitada. Pelo teorema, de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui uma subsucessão, (x_{k_n}), convergente para $x_0 \in [a, b]$. Já que (x_{k_n}) é uma sub-sucessão de (x_n) tem-se $f(x_{k_n}) > k_n > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois f não é limitada por hipótese. Isto não pode acontecer (contradição !), porque sendo f contínua e (x_{k_n}) convergente obtém-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$.
Passa-se agora para a demonstração da parte (2). Do item (1) tem-se que o conjunto de números reais

$$C = \{f(x);\ a \leq x \leq b\}$$

é limitado. Portanto, pelo teorema do supremo o conjunto C possui um único supremo S, ou seja, $S = \sup C$. Pela propriedade (S2') do supremo, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $x' \in [a, b]$, tal que

$$S - \epsilon < f(x') \leq S.$$

Logo, para $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$, tal que $S - 1/n < f(x_n) \leq S$. A sucessão (u_n) é limitada, então pelo teorema de Bolzano-Weierstrass (u_n) possui uma sub-sucessão (x_{k_n}) convergente para $\xi \in [a, b]$ e, em particular,

$$S - \frac{1}{k_n} < f(x_{k_n}) \leq S.$$

Quando $n \to \infty$, resulta pela continuidade da f que $f(\xi) = S$. Portanto, há um ponto $\xi \in [a, b]$ onde a f assume o supremo. Assim, f assume um máximo em $[a, b]$. De modo semelhante demonstra-se que existe um $\eta \in [a, b]$ tal que $f(\eta)$ é o ínfimo de f em $[a, b]$.

Escólio - Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então ela assume um máximo e um mínimo em pontos de $[a, b]$.

Teorema 4.3 - Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então, para todo η, com $f(a) \leq \eta \leq f(b)$, existe $a \leq \xi \leq b$, tal que $\eta = f(\xi)$.

Demonstração: Para fixar idéias, suponha que $f(a) < f(b)$ e seja x_1 o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Então, estando η entre $f(a)$ e $f(b)$ tem-se que η pertence $[f(a), f(x_1)]$ ou $[f(x_1), f(b)]$. Suponha que $\eta \in [f(a), f(x_1)]$. Logo, existe um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, de amplitude igual a $(b - a)/2$, tal que $\eta \in [f(a_1), f(b_1)]$. Do mesmo modo, toma-se o ponto médio de $[a_1, b_1]$ e constrói-se $[a_2, b_2]$ contido em $[a_1, b_1]$, cuja amplitude é igual a $(b_1 - a_1)/2 = (b - a)/2^2$ tal que

$\eta \in [f(a_2), f(b_2)]$. O processo construtivo continua e se obtém uma sucessão

$$[a,b] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \ldots$$

tal que $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ e η está entre $f(a_n)$ e $f(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, ficam construídas as classes de números rais

$$a \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \quad \text{e} \quad b \ge b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots,$$

que são contíguas. Logo, definem um real ξ tal que $a_n < \xi < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, tem-se $\xi - a_n \le b_n - a_n = (b-a)/2^n$ e $b_n - \xi \le b_n - a_n = (b-a)/2^n$. Deseja-se provar que $f(\xi) = \eta$. Assim, dado η entre $f(a)$ e $f(b)$ existe ξ entre a e b tal que $f(\xi) = \eta$. De fato, $f(a_n) < \eta < f(b_n)$, por construção para todo $n \in \mathbb{N}$. Devido à continuidade da função f, obtém-se

$$\begin{aligned} \xi - a_n \le b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad &\to |f(\xi) - f(a_n)| < \epsilon, \\ b_n - \xi \le b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad &\to |f(b_n) - f(\xi)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(\xi) - \eta| &\le |f(\xi) - f(a_n)| + |f(b_n) - \eta| < \epsilon + |f(b_n) - f(a_n)| \\ &< \epsilon + |f(b_n) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a_n)| < 3\epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \end{aligned}$$

ou seja, $f(\xi) = \eta$.

Corolário 4.1 - Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f assume todos os valores entre seu mínimo e seu máximo em $[a,b]$.

Demonstração: De fato, demonstrou-se que no caso de continuidade em intervalo fechado existe α e β em $[a, b]$, tais que $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ são ínfino e supremo de f em $[a, b]$, respectivamente, isto é, $f(\alpha)$ é o mínimo e $f(\beta)$ é o máximo. Repete-se o argumento usado na demonstração do Teorema 4.3 com $\alpha, \beta, f(\alpha)$ e $f(\beta)$.

Teorema 4.4 - (*Teorema de Rolle* (1652-1719)) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a), f(b)$ com sinais contrários. Então, existe ξ em $[a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Demonstração: Novamente será feita a demonstração reduzindo-se a um par de classes contíguas. Para isto repete-se o argumento usado no Teorema 4.3. Seja x_1 o ponto médio de $[a, b]$, sendo $f(a)$ e $f(b)$ de sinais contrários. Se $f(x_1) = 0$ nada a demonstrar. Se $f(x_1) \neq 0$ obtém-se os intervalos $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$ onde f é contínua e representa-se um destes intervalos por $[a_1, b_1]$ onde $f(a_1)$ e $f(b_1)$ possuem sinais contrários. Seja x_2 o ponto médio de $[a_1, b_1]$ e se $f(x_2) = 0$ nada resta a mostrar. Suponha que $f(x_2) \neq 0$ e seja $[a_2, b_2]$ um dos intervalos $[a_1, x_2]$ ou $[x_2, b_1]$ onde $f(a_2)$ e $f(b_2)$ possuem sinais contrários. Continua-se o processo indefinidamente. Assim, encontra-se a sucessão de intervalos

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

onde f possui sinais contrários nos extremos dos intervalos. Obtém-se, deste modo, as classes contíguas:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \quad \text{e} \quad b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots .$$

Seja ξ o número real por elas definido. Resulta que

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0,$$

e as sucessões (a_n) e (b_n) convergem para ξ. Sendo f contínua em $[a, b]$ resulta, com ϵ e δ, que $0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$. Por outro argumento, sendo $f(a_n)$ e $f(b_n)$ de sinais contrários, suponha para fixar idéia, que $f(a_n)$ negativo e $f(b_n)$ positivo. Logo, sendo $(f(b_n))$ convergente para ξ resulta que $\xi \geq 0$ e $(-f(a_n))$ converge para ξ. Portanto,

$$0 = \lim_{n\to\infty}(f(b_n) - f(a_n)) = 2f(\xi),$$

implicando em $f(\xi) = 0$.

4.2.2 Continuidade Uniforme

Quando se estudou a continuidade de uma função em um ponto x_0 foi visto que: para cada $\epsilon > 0$, existia um $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, para todo $x \in (a, b)$ tal que $|x - x_0| < \delta$; dizia-se, então, que f é contínua em (a, b) quando fosse em cada ponto $x_0 \in (a, b)$. As funções contínuas para as quais fixado $\epsilon > 0$ o δ depende apenas de ϵ e não de x_0, quando x_0 varia em (a, b), formam uma classe menor de funções caracterizadas pela seguinte definição.

Definição 4.8 - Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Diz-se que f *é uniformemente contínua em* (a, b) quando, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, para todo par de pontos x_1, x_2 de (a, b). com $|x_1 - x_2| < \delta$.

Assim, enquanto a continuidade é uma noção local a continuidade uniforme é global, isto é, diz respeito ao intervalo total (a, b). É claro que se uma função for uniformemente contínua em (a, b) ela será contínua em (a, b). Entretanto, há funções contínuas em (a, b) que não são uniformemente contínuas. Veja a seguir o estudo da função $f(x) = 1/x$ em $(0, 1)$, a qual é contínua em $(0, 1)$ mas não é uniformemente contínua. Observe também o Teorema 4.5 que estabelece uma condição para que uma função contínua seja uniformemente contínua.

Exemplos 4.5 - (i) Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Sejam ξ, η dois pontos quaisquer de $(0, 1)$. Então,

$$\begin{aligned} |f(\xi) - f(\eta)| &= |\xi^2 - \eta^2| = |\xi^2 - \xi\eta + \xi\eta - \eta^2| \\ &\leq \xi|\xi - \eta| + \eta|\xi - \eta| < 2|\xi - \eta|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, $\delta = \epsilon/2$ é tal que $|f(\xi) - f(\eta)| < \epsilon$ para todo par $|\xi - \eta| < \delta$. Tem-se então que $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em $(0, 1)$.

(ii) Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Esta função não é limitada em $(0, 1)$ mas é contínua. Seu comportamento, no que concerne a relação entre ϵ e δ, é visto como se segue. De fato, seja $\xi \in (0, 1)$, um ponto qualquer. Para $x \in (0, 1)$, tem-se

$$|f(x) - f(\xi)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\xi}\right| = \frac{|x - \xi|}{x\xi}.$$

Dado $\epsilon > 0$ calcula-se $\delta > 0$ tal que para todo $|x - \xi| < \delta$ tenha-se $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$. Portanto, sendo $\xi - \delta < x < \xi + \delta$, considera-se $\delta = \delta(\epsilon, \xi) = \epsilon\xi^2/2$. Logo,

$$x > \xi - \delta = \xi - \frac{\epsilon\xi^2}{2} = \frac{\xi}{2}(2 - \epsilon\xi) > \frac{\xi}{2}.$$

Conseqüentemente,

$$\frac{1}{x} < \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-1}.$$

Portanto, para todo $|x - \epsilon| < \epsilon\xi^2/2$, tem-se $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, provando que f é contínua em cada ponto de $(0,1)$. Prova-se a seguir que f não é uniformemente contínua em $(0,1)$. É suficiente mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existem, $\delta > 0$ e pontos x e ξ com $|x - \xi| < \delta$, tais que $|f(x) - f(\xi)| > \epsilon$. Para tal, considere $0 < \epsilon < 1$ e $\xi = \delta$ com $x = \xi + \delta = 2\delta$ e $0 < \delta < 1/2$. Obtém-se, portanto, que ξ, $x \in (0,1)$ e

$$|f(x) - f(\xi)| = \left|\frac{1}{2\delta} - \frac{1}{\delta}\right| = \frac{1}{2\delta} > 1 > \epsilon,$$

pois, por construção, $0 < \delta < 1/2$ e $2\delta < 1$. Logo, f não é uniformemente contínua em $(0,1)$

(iii) De modo geral, dado $\epsilon = 1$ e (δ_n) uma sucessão de termos positivos, convergente para zero, tem-se (a_n) e (b_n), sucessões de $(0,1)$, tais que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right| > 1, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad |b_n - a_n| < \delta_n.$$

De fato, para $n \in \mathbb{N}$ considere $0 < \delta_n < 1/2^n$. Define-se $a_n = \delta_n$ e $b_n = a_n + \delta_n = 2\delta_n$. Resulta que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{1}{2\delta_n} - \frac{1}{\delta_n}\right| = \frac{1}{2\delta_n} > 2^n > 1.$$

Teorema 4.5- (*Teorema de Heine* (1821-1881) - *Cantor* (1845-1918)) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então f é uniformente contínua em $[a,b]$.

Demonstração: Por contradição. Suponha f contínua no intervalo fechado $[a,b]$, mas não uniformente contínua. Então, como visto no Exemplo 4.5, item 3, dado $\epsilon > 0$ tal que para $\delta > 0$, existem pontos $x, \xi \in [a,b]$, tais que $|f(x) - f(\xi)| > \epsilon$, para $|x - \xi| < \delta$. De fato, considere $\epsilon = 1$ e (δ_n) uma sucessão $\delta_n > 0$, convergente para zero sendo $|b_n - a_n| < \delta_n$ e $|f(b_n) - f(a_n)| > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. As sucessões (a_n) e (b_n) são limitadas pois pertencem ao intervalo $[a,b]$. Pelo teorema de Bolzano-Weirstrass existem sub-sucessões (a_{k_n}) e (b_{k_n}) convergentes. Suponha que (a_{k_n}) convirja para $c \in [a,b]$. Daí,

$$|b_{k_n} - c| \leq |b_{k_n} - a_{k_n}| + |a_{k_n} - c| < \delta_{k_n} + |a_{k_n} - c|.$$

Assim, (b_{k_n}), também, converge para c. Sendo f contínua em $[a,b]$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f(b_{k_n}) = f(c) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = f(c).$$

Conseqüentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} [f(b_{k_n}) - f(a_{k_n})] = 0$, o que é contraditório, já que $|f(b_{k_n}) - f(a_{k_n})| > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 4.3 - O Teorema de Heine-Cantor é ainda válido substituindo o intervalo fechado $[a,b]$ por um conjunto $C \subset \mathbb{R}$, limitado e fechado, isto é, por um conjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Capítulo 5

Derivada

Inicia-se com a noção de derivada de uma função f definida em (a, b) com valores em $\mathbb{R}$, idealizada por Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716). Esta noção baseia-se no conceito de limite de uma função em um ponto. Portanto, a derivada de Newton-Leibniz é uma noção local.

Considere uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e seja $a < \xi < b$. A função

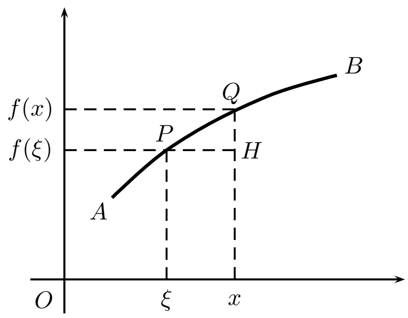
$$\varphi_\xi(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \quad x \neq \xi \tag{5.1}$$

é bem definida em (a, b), menos no ponto ξ. Quando φ_ξ possui limite no ponto ξ, este limite denomina-se *a derivada de f no ponto ξ* .

Representa-se a derivada de f em ξ por: $f'(\xi)$, ou $\frac{df(\xi)}{dx}$, ou $Df(\xi)$. Assim, tem-se

$$\frac{df}{dx}(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Interpretação Geométrica - Na figura 5.1, a seguir, está representado o gráfico da função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.



Tem-se, os seguintes objetos do gráfico:

$$P = (\xi, f(\xi)), \;\; Q = (x, f(x)), \;\; PH = x - \xi \; \text{ e } \; QH = f(x) - f(\xi).$$

Considere o triângulo PHQ e observe que se α for o ângulo em P então

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Quando f é derivável em ξ o limite de $\varphi_\xi(x)$ no ponto ξ, isto é, a derivada $f'(\xi)$ será $\operatorname{tg} \theta$, sendo θ o ângulo da reta tangente ao arco AB no ponto P com a direção positiva do eixo das abcissas x

Definição 5.1 - Diz-se que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *é derivável em* (a, b) quando f é derivável em cada ponto ξ em (a, b).

Proposição 5.1 - Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é derivável em $a < \xi < b$, então f é contínua em ξ.

Demonstração: De fato, tem-se $f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Logo, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, \xi) > 0$, tal que

$$\Big|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi)\Big| < \epsilon, \text{ para todo } 0 < |x-\xi| < \delta.$$

Daí, obtém-se $|f(x) - f(\xi) - (x-\xi)f'(\xi)| < \epsilon|x-\xi|$. Note que, se α e β são números reais, então

$$|\alpha| - |\beta| \le ||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha - \beta|.$$

Logo, fazendo $\alpha = f(x) - f(\xi)$ e $\beta = (x-\xi)f'(\xi)$, resulta

$$|f(x)-f(\xi)| - |x-\xi||f'(\xi)| < \big|f(x) - f(\xi) - (x-\xi)f'(\xi)\big| < \epsilon|x-\xi|.$$

Portanto,

$$|f(x) - f(\xi)| < \big(\epsilon + |f'(\xi)|\big)\,|x-\xi|.$$

Assim, para cada $\epsilon > 0$, considera-se $\delta = \delta(\epsilon, \xi) = \epsilon/(\epsilon + |f'(\xi)|)$. Daí, resulta que $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, desde que $|x-\xi| < \delta$. Provando, deste modo, que f é contínua em ξ.

A recíproca da Proposição 5.1 é falsa. Em geral, continuidade não implica em derivabilidade.

Exemplos 5.1 - (i) Seja $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ e $\xi = 0$. É claro que f é uma função contínua em $\xi = 0$, mas não é derivável neste ponto. De fato,

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{|x|}{x} = \left|\begin{array}{ll} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{array}\right.$$

não existindo o limite em $\xi = 0$.

(ii) Para $x \in \mathbb{R}$ considere

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} x\text{sen}\,\frac{1}{\text{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{array} \right.$$

então $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \text{sen}\,\frac{1}{x}$ e $\text{sen}\,\frac{1}{x}$ não possui limite em $\xi = 0$, embora a função f seja contínua neste ponto.

(iii) Da interpretação geométrica da derivada de f em ξ deduz-se que, dada uma curva, a existência da tangente em um ponto da curva, está vinculada a existência da derivada. A seguir, menciona-se uma construção que conduz, intuitivamente, a uma curva contínua sem tangente em ponto algum. De fato, considere o segmento de reta de extremos A e B. Divida este segmento em três partes iguais por meio dos pontos C e D. Retire o segmento CD e construa o triângulo equilátero CMD. Esta curva é contínua mas não possui tangente nos pontos C, M e D. Repita o mesmo processo com os segmentos AC, CM, MD e DB. Obtém-se uma curva contínua sem tangentes nos 15 vértices da poligonal. Continuando *ad infinitum* encontra-se uma curva contínua sem tangente em ponto algum. Esta curva é conhecida como a *curva de Von Kock*, 1906.

(iv) Para x em $\mathbb{R}$ considere $f(x) = \left| \begin{array}{ll} x^2\,\text{sen}\,\frac{1}{\text{x}} & \text{se } \ x > 0 \\ 0 & \text{se } \ x = 0, \end{array} \right.$
esta função é contínua para $x \geq 0$, derivável em $\xi = 0$ e sua derivada é zero.

(v) O exemplo notável de Weierstrass de uma função contínua sem derivada em ponto algum envolve uma série de funções, a saber, a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

$0 < b < 1$, a ímpar e $ab < 1 + 3\pi/2$ é contínua por ser uma série de funções contínuas, uniformemente convergente em um intervalo de $\mathbb{R}$, porém, não derivável em todos os pontos deste intervalo (veja Parte 2 , Complemento **62**).

Derivadas Laterais - Existem casos em que φ_ξ não possui limite em ξ, mas possui limites laterais. Daí, define-se as derivadas laterais em ξ, do seguinte modo:

- **Derivada à Direita de** ξ: $f'_+(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi^+} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$.
- **Derivada à Esquerda de** ξ: $f'_-(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi^-} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$.

Observa-se que, quando estas derivadas forem iguais, a função f será derivável em ξ.

Exemplo 5.2 - A função do Exemplo 5.1 (i) não possui derivada em $\xi = 0$. Calculando-se os limites laterais conclui-se que$f'_+(0) = +1$ e $f'_-(0) = -1$.

Derivada da Função Inversa - Considere $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sua inversa $f^{-1} : (c, d) \to \mathbb{R}$. Seja $c < \eta < d$ e $\xi \in (a, b)$ tal que $\eta = f(\xi)$. Se f é derivável em ξ com $f'(\xi) \neq 0$ resulta que f^{-1} é derivável em η e

$$\frac{df}{dy}^{-1}(\eta) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(\xi)}.$$

Exemplo 5.3 - Considere $f(x) = x^2$ com $x > 0$. Sua inversa $f^{-1}(y) = +\sqrt{y}$ possui derivada em $\eta = f(\xi)$ dada por

$$\frac{df^{-1}}{dy}(\eta) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(\xi)} = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\eta}}.$$

Derivada da Função Composta - Considerando as funções $f : (a,b) \to (c,d)$ e $g : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, com $(\alpha,\beta) \subset (c,d)$, então escreve-se $h = g \circ f$, com $h : (a,b) \to \mathbb{R}$, e definida por $h(x) = g\left(f(x)\right)$. Supõe-se que todo $y \in (c,d)$ é do tipo $y = f(x)$. A função $h = g \circ f$ assim definida denomina-se a composta de f com g.

Exemplo 5.4 - Considere $f(x) = \sqrt{x}$, com $0 < x < 4$. Sejam $(a,b) = (0,4)$ e $(c,d) = (0,2)$. Seja, também, $g : (0,2) \to \mathbb{R}$, definida por $g(y) = y^4$. Logo, $h = g \circ f$, $h : (0,4) \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x) = g\left(f(x)\right) = [\sqrt{x}]^4 = x^2$.

Quando $f : (a,b) \to (c,d)$ e $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ forem deriváveis em $a < \xi < b$ e $c < \eta < d$, $\eta = f(\xi)$, a função composta $h = g \circ f$ será derivável em ξ, e obtém-se

$$\frac{dh}{dx}(\xi) = \frac{d[g(f(x))]}{dx}(\xi) = \frac{dg}{d\eta}(f(\xi))\frac{df}{dx}(\xi).$$

A verificação desta regra de derivação para a função composta carece de certo cuidado. De fato, deve-se considerar o produto

$$\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{f(x) - f(\xi)}\,\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

em uma vizinhança de ξ, contida em (a,b), mas com $x \neq \xi$. Consulte a definição de derivada. Deve-se examinar, o produto acima, em função da diferença $f(x) - f(\xi)$, quando x varia na vizinhança de ξ. Deste modo, destacam-se os casos:

(a) Admita que exista uma vizinhança de ξ onde $f(x) - f(\xi) \neq 0$ para $x \neq \xi$. Então vale a regra de derivação da função composta e, assim, completa-se o raciocínio.

(b) Seja $f(x) - f(\xi) = 0$, em uma vizinhança de ξ. Daí, $f(x) = f(\xi)$ e, assim,

$$\frac{df}{dx}(\xi) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d[g(f(x))]}{dx}(\xi) = 0.$$

(c) Sejam V' e V'' vizinhanças quaisquer de ξ onde $f(x) - f(\xi) \neq 0$ e $f(x) - f(\xi) = 0$, respectivamente. Considerando as restrições $f_{|_{V'}}$ e $f_{|_{V''}}$ recai-se nos dois casos anteriores. Sendo $V = V' \cap V''$ conclui-se que a regra de derivação de função composta $h = g \circ f$ é válida.

Escreve-se abreviadamente a derivada da função composta em qualquer ponto, como

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx}.$$

Aplicando esta fórmula ao Exemplo 5.4 encontra-se que $\dfrac{dh}{dx} = 2x$.

Derivada de Ordem Superior - Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável em todo ponto ξ de (a, b). A derivada desta função, em qualquer ponto ξ é a função denotada por f' e definida em (a, b) com valores em $\mathbb{R}$. Análogamente, define-se a derivada segunda, ou seja, f'', de f e, de modo geral, a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$, a qual representa-se por f^n, ou $\frac{d^n f}{dx^n}$ ou $D^n f$.

Definição 5.2 - Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Diz-se que $\xi \in (a, b)$ é um ponto de máximo para f, quando existe uma vizinhança $V = V(\xi)$ tal que $f(x) \leq f(\xi)$ para todo $x \in V$. De modo análogo, diz-se que $\xi \in (a, b)$ é um ponto de mínimo para f, quando existe uma vizinhança $V(\xi)$, tal que $f(x) \geq f(\xi)$ para todo $x \in V$. Se ξ é ponto de máximo de f, o número $f(\xi)$ denomina-se o máximo local de f. Se ξ é mínimo de f, então $f(\xi)$ é o valor mínimo local de f. Estes pontos são denominados pontos extremos locais ou relativos de f, em (a, b).

As considerações feitas a seguir serão sobre máximos e mínimos relativos.

Teorema 5.1 - Seja f derivável em $[a, b]$. Então

(i) Se $a < \xi < b$, é um ponto extremo de f, então $f'(\xi) = 0$.

(ii) Se a é um extremo de f, então

- $f'_+(a) \leq 0$, se a for ponto de máximo;
- $f'_+(a) \geq 0$, se a for ponto de mínimo.

(iii) Se b é um extremo de f, então

- $f'(b) \leq 0$, se b for ponto de mínimo;
- $f'(b) \geq 0$, se b for ponto de máximo.

Demonstração: Suponha que $a < \xi < b$ e ξ um ponto de máximo.

Então,

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0, \quad \text{para} \quad x \in V(\xi) \text{ e } x > \xi, \text{ ou seja } f'_+(\xi) \leq 0;$$
$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0, \quad \text{para } x \in V(\xi) \text{ e } x < \xi, \text{ ou seja } f'_-(\xi) \geq 0.$$

Sendo f derivável em ξ e $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$, resulta $f'(\xi) = 0$. O restante da demonstração faz-se de modo análogo.

Observação 5.1 - Se $f'(\xi) = 0$ não implica em f ter máximo, ou mínimo, em ξ. A função $f(x) = x^3$, para $x \in \mathbb{R}$, é tal que $f'(0) = 0$, mas 0 não é ponto de máximo, nem de mínimo de f.

Teorema 5.2 -(*Teorema de Rolle* (1652-1719)) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe um ponto $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Demonstração: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é constante, tem-se $f' = 0$ e o teorema está demonstrado. Suponha f não constante. Sendo f contínua no intervalo fechado $[a, b]$, f atinge seu máximo e seu mínimo em um ponto $\xi \in (a, b)$, pois $f(a) = f(b)$ e f não é constante em $[a, b]$. Admitindo que f tenha um máximo, em ξ, é certo que, para $\delta > 0$,

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0, \quad \text{para} \quad \xi < x < \xi + \delta;$$
$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0, \quad \text{para} \quad \delta - \xi < x < \xi.$$

Sendo f derivável, ambos os limites das razões acima são iguais à derivada de f em ξ, logo $f'(\xi) = 0$. De modo análogo demonstra-se o caso de mínimo.

O próximo resultado é conhecido como o teorema do valor intermediário de Cauchy.

Teorema 5.3 - (*Teorema de Cauchy* (1789-1857)) Seja$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Então existe $a < \xi < b$ tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi).$$

Demonstração: Considere o gráfico de f em $[a, b]$ e a corda com extremos nos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. Dado $a < x < b$ o ponto $X = (x, f(x))$ pertence ao gráfico de f. A perpendicular ao eixo dos x, no ponto x, intercepta a corda AB, no ponto E, e o gráfico no ponto X. A medida do segmento XE é a função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Esta função é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $\varphi(a) = \varphi(b)$. Encontra-se, portanto, nas condições do Teorema de Rolle. Conseqüintemente, existe $\xi \in (a, b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$. Tem-se

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que, calculada em $x = \xi$, resulta em $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.

Teorema 5.4 - (*Teorema de Lagrange* (1736-1813)) Sejam as funções f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas, e deriváveis em (a, b), sendo $g(a) \neq g(b)$ e $g' \neq 0$ em (a, b). Então, existe $\xi \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Demonstração: A função φ definida na demonstração do teorema do valor intermediário de Cauchy é caso particular de

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,(g(x) - g(a))$$

quando se considera $g(x) = x$. A função ψ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $\psi(a) = \psi(b)$. Logo, pelo Teorema de Rolle existe, $\xi \in (a, b)$, tal que $\psi'(\xi) = 0$. Tem-se

$$\psi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

que, calculada em $x = \xi$, prova-se o teorema, com $g'(\xi) \neq 0$.

Exemplos 5.4 - (i) Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/6$, $b = \pi/4$. O teorema do valor intermediário consiste em determinar $\xi \in (\pi/6, \pi/4)$ tal que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\cos\xi.$$

Sendo $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{sen}\pi/6 = 1/2$, $\pi \approx 3,142$, $\sqrt{2} = 1,414$. Resulta: $\cos\xi = 0,791$ ou $\xi \approx 7\pi/36$ radianos.

(ii) Calcule $\xi \in (1, 100)$ para $f(x) = \log_{10} x$. Tem-se $\xi \approx 21,0632$.

(iii) Considere $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, em $[a, b]$, onde valem as hipóteses do Teorema de Lagrange. Resulta que

$$\frac{\mathrm{sen\,b} - \mathrm{sen\,a}}{\cos b - \cos a} = \frac{\cos\xi}{-\operatorname{sen}\xi} = -\cot\xi \quad a < \xi < b.$$

Obtém-se

$$\frac{2\operatorname{sen}\frac{b-a}{2}\cos\frac{b+a}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{b-a}{2}\operatorname{sen}\frac{b+a}{2}} = -\cot\frac{a+b}{2}.$$

Logo, $\xi = (a+b)/2$.

Proposição 5.2 - Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b). Então:

(a) Se $f' \geq 0$ em (a,b), então f é crescente;

(b) Se $f' \leq 0$ em (a,b), então f é decrescente;

(c) Se $f' = 0$ em (a,b), então f é constante.

Demonstração: É uma simples conseqüência do teorema do valor intermediário de Cauchy. De fato, para dois pontos $a \leq x < y \leq b$ o teorema do valor médio garante a existência de $x < \xi < y$, tal que $f(y) - f(x) = (y-x)f'(\xi)$. Daí, resultam (a), (b) e (c).

5.1 Fórmula de Taylor

O problema a resolver, em termos simples, consiste em aproximar uma função f em uma vizinhança de um ponto por meio de um polinômio e calcular o erro desta aproximação.

A questão inicial é saber a forma do polinômio a ser escolhido. Assim, inicia-se considerando uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua com derivadas de todas as ordens contínuas em (a,b). Representa-se por $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ as funções derivadas da função f em (a,b).

A título de motivação considere $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Do teorema do valor intermediário de Cauchy obtém-se

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) f'(\xi) \quad \text{para} \quad \alpha < \xi < \beta, \tag{5.2}$$

isto é, $\xi = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$ com $0 < \theta < 1$. Assim, $f(\beta)$ é aproximado pelo polinômio de grau um em (α, β). Portanto, deseja-se determinar K uma função de α e β tal que

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)}{1} f'(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \dots$$
$$+ \frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!} K(\alpha,\beta).$$

Note que na fórmula de Cauchy (equação (5.2)), $K(\alpha, \beta) = f'(\xi)$ sendo $\xi = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$.

Será feita a determinação de $K(\alpha, \beta)$ quando $n = 3$, para tornar simples os cálculos. Assim, considere

$$f(\beta) - f(\alpha) = \frac{(\beta-\alpha)}{1} f'(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{3!} K(\alpha,\beta).$$

Isto posto, define-se a função

$$\varphi(x) = f(\beta) - f(x) - \frac{(\beta-x)}{1} f'(x) - \frac{(\beta-x)^2}{2!} f''(x) - \frac{(\beta-x)^3}{3!} K(\alpha,\beta).$$

Esta função é tal que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$. Note que $f(\beta) - f(\alpha)$, é derivável. Portanto, pelo teorema de Rolle, existe $\alpha < \xi < \beta$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$. Logo,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \Big[\frac{(\beta-x)}{1} f''(x) - f'(x)\Big]$$
$$-\Big[\frac{(\beta-x)^2}{2!} f'''(x) - (\beta-x) f''(x)\Big] - \frac{(\beta-x)^2}{2} K(\alpha,\beta),$$

ou ainda,

$$\varphi'(x) = \frac{(\beta-x)^2}{2}\Big[K(\alpha,\beta) - f'''(x)\Big].$$

Calculando $\varphi'(x)$ em $x = \xi$, obtém-se

$$\frac{(\beta-\xi)^2}{2}\Big[K(\alpha,\beta) - f'''(\xi)\Big] = 0.$$

Logo,

$$K(\alpha,\beta) = f'''(\xi),$$

e, deste modo,

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)}{1}f'(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{3!}f'''(\xi)$$

sendo $\xi = \alpha + \theta(\beta-\alpha),\ 0 < \theta < 1$. O termo

$$R_3 = \frac{(\beta-\alpha)^3}{3!}f'''(\alpha + \theta(\beta-\alpha))$$

denomina-se *resto* e mede o erro na aproximação de $f(\beta)$ pelo polinômio de grau dois em $\beta - \alpha$.

A argumentação feita acima vale para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, existe $\alpha < \xi < \beta$ tal que

$$\begin{aligned} f(\beta) = f(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)}{1}f'(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \dots \\ + \frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\alpha) + R_n(\xi), \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde

$$R_n(\alpha,\beta) = \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

A expressão (5.3) denomina-se *fórmula de Taylor* e $R_n(\xi)$ o resto da fórmula.

A notação que segue é mais adaptável às aplicações. Considere $\alpha = x_0$ e $\beta = x = x_0 + h$, pertencentes a (a, b), com $h > 0$. Assim a expressão da fórmula de Taylor, sendo $\beta - \alpha = x - x_0$, com x em uma vizinhança de x_0 contida em (a, b), é dada por

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$
$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + R_n(\xi),$$

onde o resto da fórmula escreve-se

$$R_n(x_0 + \theta(x - x_0)) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

e é denominado *resto de Lagrange.* Quando $x_0 = 0$, tem-se

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$$

a qual é conhecida como *fórmula de MacLaurin.*

Exemplos 5.4 - (i) A fórmula de MacLaurin para $f(x) = e^{ax}$, com $a \in \mathbb{R}$, é assim determinada: $f'(x) = ae^{ax}$, $f''(x) = a^2 e^{ax}, \ldots,$ $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$ e $f(0) = 1$, $f'(0) = a$, $f''(0) = a^2$, ..., $f^{(n)}(0) = a^n$. Logo,

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{a^n}{n!} x^n e^{a\theta x} \quad \text{com} \quad 0 < \theta < 1.$$

Quando $a = 1$, tem-se

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

Se $x = 1$, obtém uma aproximação para o número e

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}. \qquad (5.4)$$

Por meio da expressão (5.4), para o cálculo aproximado de e, resulta que este número é irracional. De fato, multiplicando ambos os membros por $(n-1)!$, tem-se

$$e(n-1)! = \text{ inteiro } + \frac{e^\theta}{n}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Suponha que e seja um racional p/q com $p,\ q$ inteiros e $q \neq 0$. Para $n > q$, resulta que $e(n-1)!$ é um número inteiro, logo e^θ/n é um inteiro. Como $2 < e < 3$, então para qualquer $n > 3$, obtém-se $0 < e^\theta/n < 1$. Assim, tem-se numa contradição. Portanto, e não é racional.

(ii) A fórmula de MacLaurin para $f(x) = \cos x$ é determinada como segue. Inicialmente observe que

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

cuja demonstração faz-se por indução. De fato, para $n = 1$ tem-se

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Suponha válida para $n-1$, isto é,

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \cos, x = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Derivando uma vez mais resulta

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\cos x &= \frac{d}{dx}\cos\Big(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\Big) = -\text{sen}\Big(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\Big)\\ &= \cos\Big(x+n\frac{\pi}{2}\Big).\end{aligned}$$

Portanto, com $f(x) = \cos x$ tem-se

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Logo,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos\theta x \quad \text{para} \quad 0 < \theta < 1.$$

(iii) Aplicação da fórmula de Taylor na determinação de máximos e mínimos. Considere uma função continuamente derivável de todas as ordens em uma vizinhança de ξ. Se $f^{(r)}(\xi)$ for a primeira derivada não nula, então sua fórmula de Taylor em uma vizinhança de ξ será

$$f(x) - f(\xi) = \frac{(x-\xi)^r}{r!} f^{(r)}(\xi + \theta(x-\xi)) \quad \text{para} \quad 0 < \theta < 1,$$

sendo $f^{(r)}$ contínua em ξ, então ela possui o sinal de $f^{(r)}$, em uma vizinhança de ξ. Além disso, da continuidade resulta que

$$\lim_{x\to\xi} f^{(r)}\left(\xi + \theta(x-\xi)\right) = f^{(r)}(\xi).$$

Portanto, se r é um número par o sinal de $f(x) - f(\xi)$ em uma vizinhança de ξ tem o sinal de $f^{(r)}(\xi)$. Conseqüentemente,

- ξ é um ponto de mínimo de f se, e somente se, $f^{(r)}(\xi) > 0$;
- ξ é um ponto de máximo de f se, e somente se, $f^{(r)}(\xi) < 0$.

Capítulo 6

Integral de Riemann

6.1 Introdução

Pensando-se sobre a noção de integral como a área de uma figura geométrica, poder-se-ia dizer que ela antecedeu a noção de derivada. De fato, os gregos calculavam áreas de figuras geométricas como polígonos, círculos e volumes de poliedros, esferas etc. Entretanto não se pode dizer que tal seja a noção de integral como pensada nos dias de hoje. Com Newton (1643) a integral aparece como a inversa da derivada. Para Leibniz (1686) a integral era vista como a medida de uma área. Pode-se afirmar que encontra-se aí o germe de uma teoria da integração.

Considera-se uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, positiva. Esta não é uma hipótese restritiva. Sejam $a < x < b$ e $z = F(x)$ a área da superfície plana situada abaixo do gráfico de f. Observe os gráficos nas Figuras

6.1 (a) e (b) a seguir.

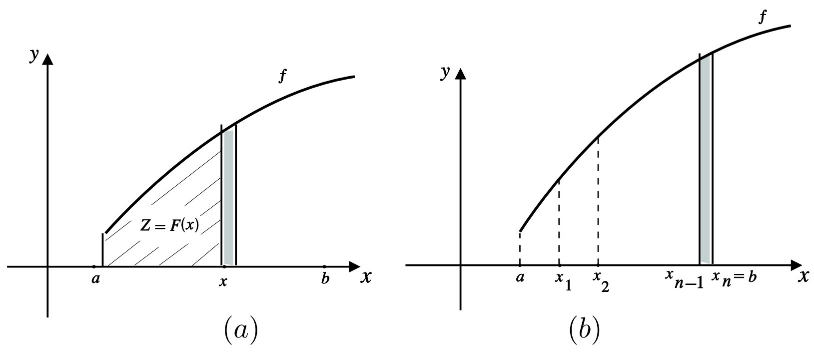


Figura 6.1 - Áreas da superfície do gráfico de f

O ponto fundamental é que a função f é a derivada de F, para todo $a < x < b$. Diz-se que F é uma primitiva de f, isto é, a área da superfície plana abaixo do gráfico da f é uma primitiva de f. Escreve-se

$$F'(x) = f(x), \quad \text{para todo} \quad a < x < b.$$

Inicialmente será vista a noção intuitiva de integral. Em seguida formalizar-se essa nocão e, então, será possível apresentar uma demonstração deste fato. Observe que, $z = F(x)$ é a área de a até x. Tomando o ponto $a < x + \Delta x < b$, a área será $F(x + \Delta x)$ e a diferença

$$\Delta z = F(x + \Delta x) - F(x) \tag{6.1}$$

será a área da faixa escura da Figura 6.1 (a). Mas esta mesma área pode ser calculada aproximadamente por $f(x)\Delta x$. Tem-se, aproximadamente

$$\Delta z = f(x)\Delta x \tag{6.2}$$

e quando Δx tende a zero, obtém-se de (6.1) e (6.2) que

$$\frac{dz}{dx} = f(x) \quad \text{ou} \quad F'(x) = f(x).$$

Esta foi a interpretação geométrica dada por Newton.

Para Leibniz, ele considerou uma decomposição do intervalo $[a, b]$ em subintervalos por meio dos pontos

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

e considerou a soma das áreas dos retângulos nos quais ficou decomposta a superfície abaixo do gráfico da f. Obtém-se

$$z_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n$$

sendo $x_\nu - x_{\nu-1} = \Delta x_\nu$, a base do retângulo $f(x_\nu)\Delta x_\nu$. Portanto, a área da faixa escura da Figura 6.1 (b) é

$$z_n - z_{n-1} = f(x_n)\Delta x_n$$

e quando $\Delta x_n \to 0$ tem-se

$$\frac{dz}{dx} = f(x).$$

Leibniz representa a soma z_n dos retângulos quando $\Delta x_n \to 0$ pelo símbolo

$$\int f(x)dx$$

denominada integral da função f, segundo J. Bernoulli.

Posteriormente, para deixar claro o intervalo onde f está definida, Fourier (1822) adotou a notação

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.3}$$

Quando não fica explícito o intervalo $[a, b]$ então $\int f(x)dx$ denota integral indefinida ou primitiva de f.

Se F for uma primitiva de f então $F + c$, sendo c constante, é também primitiva de f. Considerando-se a primitiva

$$F(x) - F(a) = z, \tag{6.4}$$

obtém-se em $x = a$ a área nula, e em $x = b$ a área abaixo do gráfico de f no intervalo $[a, b]$. Portanto, de (6.3) e (6.4) tem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

a qual é denominada *Fórmula de Newton-Leibniz* para cálculo de áreas.

Exemplo 6.1 - (a) Sejam, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq x \leq 2$. Uma primitiva de f é

$$F(x) = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}.$$

Logo,

$$\int_1^2 x^n\,dx = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\,.$$

(b) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $1 \leq x \leq 2$. Tem-se para primitiva

$$F(x) = \log x.$$

Portanto,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

O objetivo do presente capítulo, tendo em vista a motivação anterior, é desenvolver a noção de integral baseada nas idéias de Riemann (1854), Cauchy (1821), Darboux (1875) e estabelecer sua relação com a derivada e demonstrar a fórmula de Newton-Leibniz.

6.2 Integral de Riemann

Seja $[a, b]$ um intervalo fechado, denomina-se decomposição deste intervalo a uma coleção finita de subintervalos fechados $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, com $\nu = 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_1 = a$ e $x_n = b$, de modo que

$$[x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n] = [a, b]$$

e

$$[x_{\nu-1}, x_\nu] \cap [x_\nu, x_{\nu+1}] = x_\nu.$$

Toda coleção de pontos

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

determina uma decomposição de $[a, b]$ dada pelos subintervalos $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Representa-se uma tal decomposição por

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \text{ ou simplesmente por } D.$$

Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e D uma decomposição de $[a,b]$ denota-se:

$$m_\nu = \inf_{x_{\nu-1} \le x \le x_\nu} f(x) \quad \text{e} \quad M_\nu = \sup_{x_{\nu-1} \le x \le x_\nu} f(x).$$

Considere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $f \ge 0$. Denomina-se *conjunto ordenada de* f ao subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\{(x,y); 0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\},$$

cuja área encontra-se ilustrada nesta figura:

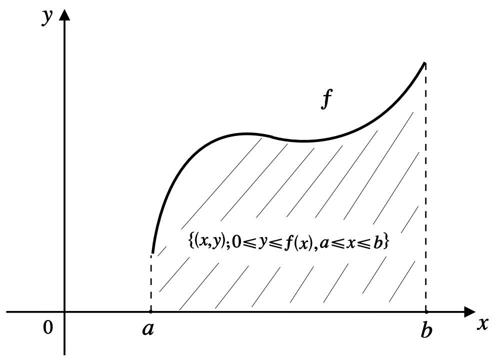


Figura - 6.2 Área do conjunto ordenada da f

Definir a noção de integral para f em $[a,b]$, consiste em estabelecer a noção de área do conjunto ordenada da f. Um método natural consiste em decompor este conjunto em subconjuntos formados por figuras cuja área seja facilmente calculada. De fato, adotar-se a decomposição em um número finito de retângulos. Constrói-se as aproximações por falta denominadas somas inferiores e por excesso denominadas somas superiores. A seguir são caracterizadas as funções para as quais estas aproximações por falta e por excesso formam classes contíguas de números reais definindo, portanto, um número real que será a área do conjunto ordenada da f ou a integral de f. Serão dadas algumas definições.

Considere uma decomposição D de $[a, b]$ e defina

$$s_D = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu h_\nu \quad \text{e} \quad S_D = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu h_\nu$$

sendo $h_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$. A s_D *denomina-se soma inferior de* f em $[a, b]$ e S_D *soma superior de* f em $[a, b]$. Observando a Figura 6.3, s_D é a soma das áreas dos retângulos abaixo do gráfico de f e S_D é a soma das áreas dos retângulos que excedem o gráfico de f.

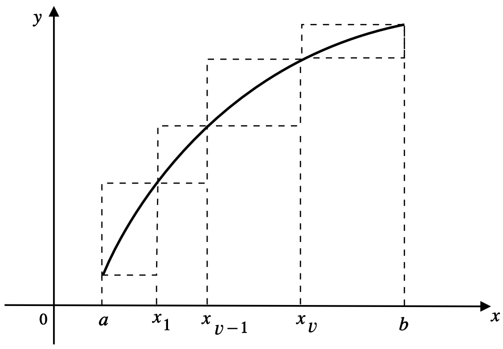


Figura 6.3 - Representação das areas dos conjuntos s_D e S_D

Para comparar as somas, s_D e S_D, de uma função f, é necessário introduzir uma ordem no conjunto das decomposições de $[a, b]$. Assim, diz-se que uma decomposição D de $[a, b]$ está contida em outra D'

quando todo ponto de D é ponto de D'. Escreve-se $D \preceq D'$ que se lê, D está contida em D'. Por exemplo, escolhendo

$$\begin{aligned} D: a &= x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu < x_{\nu+1} < \ldots < x_n = b \qquad \text{e} \\ D': a &= x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu < \frac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2} < x_{\nu+1} < \ldots < x_n = b. \end{aligned}$$

Proposição 6.1 - Se $D \preceq D'$, então $s_D \leq s_{D'}$ e $S_D \geq S_{D'}$.

Demonstração: Inicia-se supondo que D' possui apenas um ponto a mais que D. Assim, se

$$\begin{aligned} D: a &= x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu < x_{\nu+1} < \ldots < x_n = b \quad \text{tem} - \text{se} \\ D': a &= x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu < \xi < x_{\nu+1} < \ldots < x_n = b. \end{aligned}$$

Sejam

$$m'_\nu = \inf \{f(x); x_{\nu-1} \leq x \leq \xi\} \quad \text{e} \quad m''_\nu = \inf \{f(x); \xi \leq x \leq x_\nu\}.$$

Tem-se m'_ν e m''_ν maiores ou iguasi a m_ν, que é o ínfimo de f em $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Além disso,

$$\begin{aligned} s_{D'} &= m_1 h_1 + m_2 h_2 + \cdots + m_{\nu-1} h_{\nu-1} \\ &+ m'_\nu(\xi - x_{\nu-1}) + m''_\nu(x_\nu - \xi) + m_n h_n \\ &\geq m_1 h_1 + m_2 h_2 + \cdots + m_\nu h_\nu + \cdots + m_n h_n = s_D\,. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} m'_\nu(\xi - x_{\nu-1}) + m''_\nu(x_\nu - \xi) &\geq m_\nu(\xi - x_{\nu-1}) + m_\nu(x_\nu - \xi) \\ &= m_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) = m_\nu h_\nu. \end{aligned}$$

No caso geral, suponha que D' contenha k pontos a mais que D. Represente por D_k a decomposição de $[a,b]$ que contém k pontos mais que D. Tem-se $D' = D_k$. Pela primeira parte, tem-se,

$$s_D \leq s_{D_1} \leq s_{D_2} \leq \cdots \leq s_{D_k} = s_{D'}.$$

De modo análogo demonstra-se que se $D' \succeq D$, então $S_{D'} \leq S_D$, com D' contendo k pontos a mais que D.

Resume-se este resultado dizendo-se que, quando a decomposição cresce as somas inferiores s_D crescem e as superiores S_D decrescem.

Variando as decomposições D de $[a,b]$ obtém-se dois conjuntos numéricos representados por $\{s_D\}$ e $\{S_D\}$.

Proposição 6.2 - Quaisquer que sejam $s_D \in \{s_D\}$ e $S_D \in \{S_D\}$, tem-se $s_D \leq S_D$.

Demonstração. Considere s_{D_1} e S_{D_2} somas correspondentes às decomposições D_1 e D_2 de $[a,b]$, associadas à função f. Para provar a Proposição 6.2 é suficiente provar que

$$s_{D_1} \leq S_{D_2}.$$

De fato, seja D_{12} a decomposição obtida de D_1 acrescentando os pontos de D_2, supondo-se que D_2 e D_1 não sejam idênticas. Tem-se $D_1 \preceq D_{12}$ e $D_2 \preceq D_{12}$. Logo pela Proposição 6.1 obtém-se:

$$s_{D_1} \leq s_{D_{12}} \quad \text{e} \quad S_{D_2} \geq S_{D_{12}}.$$

Logo, quaisquer que sejam D_1 e D_2 resulta

$$s_{D_1} \leq s_{D_{12}} \leq S_{D_{12}} \leq S_{D_2}$$

provando a proposição.

Considere os números positivos m e M iguais ao ínfimo e supremo de f em $[a, b]$. Da Proposição 6.2 resulta que

$$m(b-a) \leq s_D \leq S_{D'} \leq M(b-a)$$

para quaisquer decomposições D e D' de $[a, b]$. Logo o conjunto numérico $\{s_D\}$ é limitado superiormente e $\{S_D\}$ é limitado inferiormente. Portanto $\{s_D\}$ possui um supremo e $\{S_D\}$ um ínfimo.

Definição 6.1 - Ao supremo de $\{s_D\}$, quando D varia, denomina-se integral inferior de Darboux de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx = \sup_D \{s_D\}.$$

Definição 6.2 - Ao ínfimo de $\{S_D\}$, quando D varia, denomina-se integral superior de Darboux, de f, em $[a, b]$, e representa-se por

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx = \inf_D \{S_D\}.$$

Portanto, tem-se

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx.$$

Definição 6.3 - Diz-se que $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, positiva, é integrável no sentido de Riemann em $[a, b]$, quando as integrais, inferior e superior de Darboux, forem iguais. Ao valor comum destas integrais denomina-se integral de Riemann de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Diz-se, então, que a função f é integrável a Riemann ou $\mathcal{R}$-integrável em $[a,b]$.

Quando $\sup\{s_D\}$ não é igual ao $\inf\{S_D\}$ a função diz-se não integrável a Riemann.

• Oscilação de uma função - Sejam D uma decomposição de $[a,b]$ e $[x_{\nu-1}x_\nu]$ um intervalo de D. O número positivo

$$w_\nu = M_\nu - m_\nu\,,$$

é denominado *oscilação da* f em $[x_{\nu-1},x_\nu]$.

Se M e m forem o supremo e o ínfimo de f em $[a,b]$, então o número positivo

$$w = M - m,$$

será denominado *oscilação da* f em $[a,b]$.

• Amplitude máxima de uma decomposição D, de $[a,b]$, é o número positivo $\mu(D)$ definido por

$$\mu(D) = \sup\{x_\nu - x_{\nu-1}, \nu = 1,2,\ldots,n\}.$$

Note que sempre $\mu(D) \leq b-a$.

Lema 6.1 - Seja D uma decomposição de $[a,b]$ e D_k a decomposição obtida inserindo-se k pontos em D. Então:

$$S_D - S_{D_k} \leq kw\mu(D) \quad \text{e} \quad s_{D_k} - s_D \leq kw\mu(D).$$

Demonstração: Inicia-se com $k = 1$ e argumentando como na demonstração da Proposição 6.1. Suponha que em $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ acrescenta-se um ponto ξ obtendo-se uma decomposição D_1 de D. Assim,

$$S_{D_1} = M_1 h_1 + \cdots + M'_\nu(\xi - x_{\nu-1}) + M''_\nu(x_\nu - \xi) + \cdots + M_n\, h_n\,.$$

Logo, $S_D - S_{D_1} = M_\nu h_\nu - M'_\nu(\xi - x_{\nu-1}) - M''_\nu(x_\nu - \xi)$. Como $[x_{\nu-1}, \xi]$ e $[\xi, x_\nu]$ estão contidos em $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, então $M'_\nu \geq m'_\nu \geq m_\nu$ e $M''_\nu \geq m''_\nu \geq m_\nu$. Deste modo, $-M'_\nu \leq -m_\nu$ e $-M''_\nu \leq -m_\nu$. Conseqüentemente,

$$S_D - S_{D_1} \leq (M_\nu - m_\nu)h_\nu\,.$$

Sendo $[x_{\nu-1}, x_\nu] \subseteq [a, b]$, resulta $M_\nu \leq M$ e $m_\nu \geq m$, ou seja, $M_\nu - m_\nu \leq M - m = w$. Assim, para $k = 1$, obtém-se

$$S_D - S_{D_1} \leq w\mu(D).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S_D - S_{D_1} &\leq w\mu(D)\\
S_{D_1} - S_{D_2} &\leq w\mu(D)\\
&\vdots\\
S_{D_{k-1}} - S_{D_k} &\leq w\mu(D).
\end{aligned}$$

Adicionando ambos os membros resulta

$$S_D - S_{D_k} \leq kw\mu(D).$$

A demonstração relativa às somas inferiores é análoga.

Teorema 6.1 - (*Teorema de Darboux*) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$S_D - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s_D < \varepsilon,$$

para toda decomposição D, com $\mu(D) < \delta$.

Demonstração: De fato, pela definição de ínfimo (propriedade (I2')), dado $\varepsilon > 0$, existe D_ε, tal que

$$S_{D_\varepsilon} < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{pois} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_D S_D.$$

Seja D uma qualquer decomposição e S_D a correspondente soma superior. Seja D' a decomposição obtida de D_ε acrescentando todos os pontos de D. Escreve-se $D' = D \cup D_\varepsilon$. Tem-se $D_\varepsilon \preceq D'$ e pela Proposição 6.1

$$S_{D'} \leq S_{D_\varepsilon}.$$

Suponha que D' seja D com mais k pontos. Do Lema 6.1 obtém-se

$$S_D - S_{D'} \leq kw\mu(D) \quad \text{ou} \quad S_D \leq S_{D'} + kw\mu(D) \quad \text{e}$$

$$S_{D'} \leq S_{D_\varepsilon} < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,\cdot$$

Logo

$$S_D \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} + kw\mu(D)$$

ou

$$S_D - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + kw\mu(D).$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja D tal que

$$\mu(D) < \frac{\varepsilon}{2kw} = \delta(\varepsilon).$$

Tem-se

$$S_D - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon, \quad \text{para toda } D \text{ com } \mu(D) < \delta.$$

A parte correspondente a s_D é análoga.

Observação 6.1 - Note que dado um número $0 < \mu < (b-a)$, ele pode ser amplitude máxima de uma decomposição de $[a,b]$. Fixado μ neste intervalo existem infinitas decomposições D de $[a,b]$ cuja amplitude máxima é μ. Portanto, dado μ, seja D as decomposições com amplitude máxima μ. Como as somas $S_D(\mu)$ e $s_D(\mu)$ dependem de μ, então elas são correspondências infinitivocas, que representa-se por $S(\mu(D))$ e $s(\mu(D))$ respectivamente. Serão denominadas, por abuso de linguagem, funções multivicas. O que é uma nomenclatura paradoxal, pois função é uma correspondência unívoca. Entenda que, $S(\mu(D))$ converge para S, se $\mu(D) \to 0$, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\xi)$, tal que $|S(\mu(D)) - S| < \varepsilon$ para $\mu(D) < \delta$, qualquer que seja D. Idem para a convergência de $s(\mu(D))$ para s.

No teorema de Darboux encontrou-se: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\xi) > 0$ tal que

$$S(\mu(D)) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon$$

para todo $\mu(D) < \delta$ e qualquer que seja D. Logo $S(\mu(D))$ converge para $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ quando $\mu(D) \to 0$. De modo análogo, tem-se a outra parte do teorema de Darboux para $s(\mu(D))$.

6.3 Somas de Riemann

Considere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $D = D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma decomposição de $[a,b]$. Sejam s_D e S_D as correspondentes somas inferior e superior. Deseja-se estudar a diferença $S_D - s_D$. Veja a Figura 6.4 a seguir.

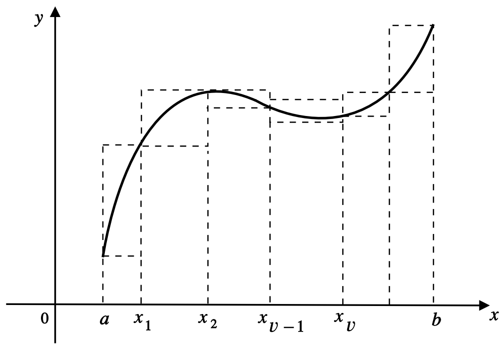


Figura 6.4 - Diferença entre S_D e s_D.

A diferença

$$S_D - s_D = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu h_\nu \,,$$

geometricamente, está representada, na figura acima, pela coleção de retângulos cobrindo o gráfico da f. Esta diferença, a qual representa-se por $\sigma_D = \sum\limits_{\nu=1}^{n} w_\nu h_\nu$, denomina-se soma de Riemann para a função f correspondente à decomposição D de $[a,b]$. A seguir, demonstra-se a condição de integrabilidade de Riemann, a qual, geometricamente, diz que a área da superfície formada pelos retângulos $S_D - s_D$ é menor que qualquer $\varepsilon > 0$ para uma decomposição D com $\mu(D) < \delta$.

Teorema 6.2 - (*Teorema de Riemann*) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Uma condição necessária e suficiente para que f seja Riemann integrável em $[a,b]$ é que para cada $\varepsilon > 0$, exista $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\sigma_D < \varepsilon$ para alguma decomposição D com $\mu(D) < \delta$.

Demonstração: (Condição Necessária) Suponha f Riemann integrável, isto é

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Desta igualdade e do teorema de Darboux resulta que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$S_{D_1} - \int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)dx - s_{D_2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para as decomposições D_1 e D_2 tais que $\mu(D_1) < \delta$ e $\mu(D_2) < \delta$. Logo, para cada $\varepsilon > 0$, existe S_{D_1} e s_{D_2} tais que

$$S_{D_1} - s_{D_2} < \varepsilon$$

para toda D_1 e D_2 com $\mu(D_1) < \delta$ e $\mu(D_2) < \delta$.

Considere a decomposição D_{12} acrescentando à D_1 os pontos de D_2. Sendo $D_1 \preceq D_{12}$ e $D_2 \preceq D_{12}$ obtém-se pela Proposição 6.1 que

$$s_{D_2} \leq s_{D_{12}} \leq S_{D_{12}} \leq S_{D_1},$$

o que implica $S_{D_{12}} - s_{D_{12}} < \varepsilon$ com $\mu(D_{12}) < \delta$.

Portanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que $\sigma_{D_{12}} < \varepsilon$ para uma decomposição D_{12}, com $\mu(D_{12}) < \delta$.

(Condição Suficiente) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que $\sigma_D < \varepsilon$ para uma D, com $\mu(D) < \delta$. Logo, $S_D - s_D < \varepsilon$. Portanto, sendo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S_D \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq s_D\,,$$

tem-se

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon \quad \text{para cada } \varepsilon > 0,$$

provando que f é $\mathcal{R}$-integrável.

Observação 6.2 - Como na Observação 6.1 resulta que σ_D é $\sigma(\mu(D))$ e a condição de integrabilidade de Riemann reduz-se a dizer que $\sigma(\mu(D)) \to 0$ quando $\mu(D) \to 0$.

Observe que na definição de somas de Riemann, S_D e s_D, empregou-se, em cada subintervalo de D, isto é, em cada subintervalo $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, o ínfimo m_ν, e o supremo M_ν, da f, neste intervalo. Poderia ter sido escolhido em cada intervalo um número f_ν que depende de f com $m_\nu \leq f_\nu \leq M_\nu$. Em particular, f_ν pode ser o valor de f em um ponto ξ_ν pertencente ao intervalo $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Deste modo,

$$x_{\nu-1} \leq \xi_\nu \leq x_\nu \quad \text{e} \quad m_\nu \leq f(\xi_\nu) \leq M_\nu$$

para $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Assim, encontra-se

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu h_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) h_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu h_\nu\,.$$

Portanto, o teorema a seguir fornece um método para o cálculo da $\mathcal{R}$-integral de uma função.

Teorema 6.3 - Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $\mathcal{R}$-integrável. Então

$$\lim_{\mu(D)\to 0} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)h_\nu = \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração: Pelo teorema de Darboux, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que $\mu(D) < \delta$ e

$$s(\mu(D)) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon \quad \text{e} \quad S(\mu(D)) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Tem-se, também,

$$s(\mu(D)) \leq \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)h_\nu \leq S(\mu(D))$$

para $x_{\nu-1} \leq \xi_\nu \leq x_\nu$ e $\nu = 1, \ldots, n$. Daí resulta que

$$\underline{\int_a^b} f(x) - \varepsilon < \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)h_\nu < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Se f for integrável tem-se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon < \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)h_\nu < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$$

para toda D tal que $\mu(D) < \delta$, o que demonstra o teorema.

Exemplo 6.1 - Deseja-se calcular a integral de $f(x) = x^2$ para $a \leq x \leq b$. A seguir, demonstra-se que f é $\mathcal{R}$-integrável. Será calculada a integral por meio do Teorema 6.3. Supondo $a > 0$ e decomponha $[a, b]$ em n partes iguais por meio dos pontos

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(n-1)h,\ b \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

O intervalo de ordem ν será $[a + (\nu - 1)h, a + \nu h]$. Note que as amplitudes são $h_\nu = h = (b - a)/n$. Logo

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) h_\nu = h \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu).$$

Para facilitar o cálculo, suponha $a = 0$ e $b > 0$. O intervalo de ordem ν será $[(\nu - 1)h, \nu h]$ e escolhendo-se $\xi_\nu = \nu h$ obtém-se $f(\xi_\nu) = h^2\nu^2$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) h_\nu &= h \sum_{\nu=1}^{n} h^2\nu^2 = h(h^2 + 2^2h^2 + 3^2h^2 + \cdots + n^2h^2) \\
&= h^3(1 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{b^3}{n^3}\,(1 + 2^2 + \cdots + n^2).
\end{aligned}$$

Observando que $1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}\,(n+1)(2n+1)$ tem-se

$$\lim_{\mu(D)\to 0} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) h_\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(2 + \frac{1}{n}\Big) = \frac{b^3}{3}\,,$$

ou seja

$$\int_0^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3}\cdot$$

Note que o processo anterior, embora correto, não é prático. As dificuldades técnicas se complicam com a função f. Por esta razão é necessário demonstrar a validade da fórmula de Newton-Leibniz para uma função integrável à Riemann. Demonstra-se a seguir que esta fórmula é válida quando $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua. Antes serão fixadas algumas propriedades da integral.

6.4 Propriedades da Integral de Riemann

(P1) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $\mathcal{R}$-integrável, então cf, sendo c constante, é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

(P2) Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é constante, ou seja $f = c$, então

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

(P3) Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{R}$-integrável e $a < c < b$, então f é $\mathcal{R}$-integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ sendo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(P4) Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{R}$-integrável e c é um ponto qualquer em $[a,b]$, então por definição

$$\int_c^c f(x)dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

(P5) Se f e g são $\mathcal{R}$-integráveis em $[a,b]$, então $f+g$, também, o é, e

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(P6) Se f é $\mathcal{R}$-integrável e $f \geq 0$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6.4.1 Parte Positiva e Negativa de uma Função

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Denomina-se *parte positiva de* f, representada por f^+, a função definida em $[a,b]$ do seguinte modo:

$$f^+(x) = \left| \begin{array}{lll} f(x) & \text{se} & f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{se} & f(x) < 0. \end{array} \right.$$

Denomina-se *parte negativa de* f, representada por f^-, a função definida em $[a,b]$ do seguinte modo:

$$f^-(x) = \left| \begin{array}{lll} -f(x) & \text{se} & f(x) \leq 0, \\ 0 & \text{se} & f(x) > 0. \end{array} \right.$$

Daí, obtém-se

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

sendo $|f|$ definida por $|f|(x) = |f(x)|$ para todo x em $[a,b]$.

Outras duas importantes propriedades da integral de Riemann:

(P7) Se f e g são $\mathcal{R}$-integráveis, com $f(x) \leq g(x)$, em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(P8) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-integrável. Sabe-se que $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$. Assim,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{e} \quad -\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Logo

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Dada uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, se $f \leq 0$, então $-f$ é positiva. Assim, pela propriedade (P1) f é $\mathcal{R}$-integrável, se $-f$ o é. Portanto, se f é integrável em $[a,b]$, então f^+ e f^- são, também, $\mathcal{R}$-integráveis. Logo, $f^+ - f^-$ que é $|f|$ é integrável, pela propriedade (P5).

A recíproca desta propriedade é falsa. O exemplo que se segue, ilustra este fato. Sejam

$$f(x) = \left|\begin{array}{lllll} +1 & \text{se} & x & \text{for um racional de} & [a,b], \\ -1 & \text{se} & x & \text{for um irracional de} & [a,b], \end{array}\right.$$

e D uma decomposição de $[a,b]$ e $[x_{\nu-1}x_\nu]$ um intervalo de D. Em $[x_{\nu-1},x_\nu]$, para $\nu = 1,2,\ldots,n$, há racionais e irracionais. Logo $m_\nu = -1$ e $M_\nu = +1$ para $\nu = 1,2,\ldots,n$. Logo

$$s_D = \sum_{\nu=1}^n m_\nu h_\nu = -(b-a) \quad \text{e} \quad S_D = \sum_{\nu=1}^n M_\nu h_\nu = b-a$$

qualquer que seja D de $[a, b]$. Portanto,

$$\underline{\int_{a}^{b}} f(x)\, dx = -(b-a) \quad \text{e} \quad \overline{\int_{a}^{b}} f(x)\, dx = b-a$$

não sendo f $\mathcal{R}$-integrável. Mas, $|f(x)| = 1$, para todo $a \leq x \leq b$ é integrável.

Este é um defeito crucial da integral de Riemann. Em 1901 Lebesgue (1875) escreveu uma nota (Acad. de Sc. de Paris, 332, série 1, pp. 85-90,) propondo um novo conceito de integral que supre várias deficiências da integral de Riemann (veja Parte, Complemento **90**).

A seguir, estuda-se as classes das funções monótonas e das contínuas, definidas em $[a, b]$, com valores reais.

Teorema 6.4 - Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e monótona. Então f é integrável a Riemann.

Demonstração: Supõe-se f crescente para fixar a idéia. Seja D uma decomposição de $[a, b]$ por intervalos parciais $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, para $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Sendo f crescente, então tem-se

$$m_\nu = f(x_{\nu-1}) \quad \text{e} \quad M_\nu = f(x_\nu).$$

Logo,

$$s_D = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu-1}) h_\nu \quad \text{e} \quad S_D = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) h_\nu\,.$$

Portanto, seja $\mu(D)$ a amplitude máxima de D. Tem-se

$$S_D - s_D = \sigma_D = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})]h_\nu \leq$$

$$\mu(D) \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] = \mu(D)[f(b) - f(a)].$$

Sendo f limitada $f(b) - f(a)$ é um número real, logo a desigualdade prova que f é $\mathcal{R}$-integrável. De fato, $f(b) - f(a) > 0$ e para cada $\varepsilon > 0$ seja $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon/[f(b) - f(a)]$. Para toda D com $\mu(D) < \delta$, obtém-se $\sigma_D < \varepsilon$. Para f decrescente a demonstração é análoga.

Corolário 6.1 - Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e D uma decomposição de $[a,b]$, tal que $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ sendo f_ν monótona em $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Então f é integrável e a integral da soma é a soma das integrais.

Teorema 6.5 - (*Teorema de Cauchy*) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é $\mathcal{R}$-integrável.

Demonstração: De fato, sendo f contínua em um intervalo fechado, resulta do teorema de Heine-Cantor que f é uniformemente contínua. Conseguintemente, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{para} \quad |x' - x''| < \delta,\ x', x'' \text{ quaisquer.}$$

Seja D uma decomposição de $[a,b]$, com $\mu(D) < \delta$. Portanto, para quaisquer x' e x'' em $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ tem-se, pela continuidade uniforme, que

$$f(x'') - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x') < f(x'') + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Deste modo,

$$\sup_{x' \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(x') < f(x'') + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

$$\inf_{x' \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(x') > f(x'') - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

e

$$\operatorname*{Sup}_{x' \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(x') - \operatorname*{Inf}_{x'' \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(x') < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

ou seja,

$$w_\nu < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{para toda } D \text{ com } \mu(D) < \delta.$$

Daí, resulta que

$$\sigma_D = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu h_\nu < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu = \varepsilon$$

provando que f contínua em um intervalo fechado é $\mathcal{R}$-integrável.

Corolário 6.2 - Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e D uma decomposição de $[a,b]$. Se $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, sendo f_ν contínua em $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, então f é integrável à Riemann.

O Corolário 6.1 tem uma forma bem geral quando se estuda a integral no contexto de Lebesgue.

Teorema 6.6 - (*Teorema do Valor Intermediário - Integral*) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $\mathcal{R}$-integrável. Então existe K entre o ínfimo e o supremo de f em $[a,b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx = K(b-a).$$

Demonstração: Por hipótese, tem-se

$$m \leq f(x) \leq M \ \text{ para todo } x \text{ em } \ [a,b].$$

Como f integrável, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Dividindo ambos os lados desta desigualdade por $b-a$ e tomando $K = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$ tem-se o resultado.

Corolário 6.3 - Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe $\xi \in [a,b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Demonstração: De fato, se f é contínua em $[a,b]$, então para todo K entre m e M, existe $\xi \in [a,b]$, tal que $K = f(\xi)$.

A seguir, apresenta-se a parte crucial deste capítulo, referente a fórmula de Newton-Leibniz para a integral de Riemann, ou seja, estabelece-se a relação entre a área do conjunto ordenada de f, quando f é contínua em $[a,b]$, e as primitivas de f.

Considerando-se uma função integrável a Riemann em $[a,b]$, e x, um ponto qualquer de $[a,b]$, a integral

$$\int_a^x f(s)ds$$

existe, para cada $x \in [a,b]$. Quando $x = a$, ela é nula. Deste modo, define-se uma função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds.$$

Proposição 6.3 - Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável a Riemann, então $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definida acima, é contínua em $[a,b]$.

Demonstração: Considere x_0 um ponto de $[a,b]$. Tem-se

$$\left| \int_a^x f(s)ds - \int_a^{x_0} f(s)ds \right| = \left| \int_{x_0}^x f(s)ds \right| \leq M|x - x_0|.$$

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{M}$, tal que

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \varepsilon \quad \text{para} \quad |x - x_0| < \delta,$$

provando a continuidade, em cada ponto x, de $[a,b]$.

A seguir, será demonstrado que, uma condição suficiente para a derivabilidade de F, é a continuidade da f em $[a,b]$.

Teorema 6.7 - (*Teorema Fundamental do Cálculo*) Suponha a função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e x um ponto qualquer de $[a,b]$. Então a função

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds$$

é derivável em $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração: Sendo f contínua em $[a,b]$, pelo Teorema 6.5, f é $\mathcal{R}$-integrável em $[a,b]$ e pela Proposição 6.3, F é contínua em $[a,b]$. Agora demonstra-se que a hipótese de continuidade da f implica na derivabilidade da F. De fato, seja $h > 0$ tal que $a \leq x + h \leq b$. Tem-se

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(s)ds - \int_a^x f(s)ds = \int_x^{x+h} f(s)ds.$$

Pelo Corolário 6.3, obtém-se: $F(x+h) - F(x) = hf(\xi)$, para ξ em $[x, x+h]$. Logo, sendo $\xi = x + \theta h$, com $0 \leq \theta \leq 1$ resulta

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x + \theta h).$$

Pela contínuadade da f no intervalo $[a, b]$ obtém-se que $\lim\limits_{h \to 0} f(x + \theta h) = f(x)$. Portanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x), \quad \text{para todo } x \text{ em } [a, b],$$

o que conclui a prova do teorema, isto é

$$F'(x) = f(x) \quad \text{em} \quad [a, b].$$

Denomina-se *primitiva* de $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a toda função $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, derivável em $[a, b]$ e tal que $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$.

Do exposto anteriormente, deduz-se que, se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, a função

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds$$

é uma primitiva de f.

Sejam $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Foi visto no caso de f contínua que uma primitiva é dada por $F(x) = \int_a^x f(s) ds$. Nestas condições, será deduzida a seguir, a fórmula de Newton-Leibniz, ou seja,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Considere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e F uma primitiva de f. Seja D uma decomposição de $[a,b]$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n}[F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu)] &= [F(x_2) - F(a)] + [F(x_3) - F(x_2)] + \\ \cdots &\ \ +[F(b) - F(x_{n-1})] = F(b) - F(a),\end{aligned}$$

pois $x_1 = a$ e $x_n = b$. Do teorema do valor intermediário de Cauchy, tem-se

$$F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu) = F'(\xi_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu).$$

Sendo F uma primitiva de f em $[a,b]$, obtém-se $F'(x) = f(x)$ em $[a,b]$. Conseqüentemente,

$$F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu) = f(\xi_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu),$$

onde $x_\nu \leq \xi_\nu \leq x_{\nu+1}$. Portanto,

$$F(b) - F(a) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu).$$

Sendo f contínua, então f é integrável. Logo, quando $\mu(D) \to 0$, obtém-se

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

que é a *Fórmula de Newton-Leibniz.*

Escólio - Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então $F(x) = \int_a^x f(s)ds$ é uma primitiva de f, e vale a Fórmula de Newton-Leibniz.

Sejam f contínua e G, H duas primitivas de f. Então, $G' = f$ e $H' = f$. Subtraindo, resulta que $G - H$, é constante em $[a,b]$. Logo, duas primitivas, quaisquer de f, diferem, apenas, por uma constante. Assim, sendo f contínua em $[a,b]$, resulta que, $F(x) = \int_a^x f(s)ds$ é uma primitiva de f. Dada uma outra primitiva de f, qualquer, tem-se que

$$G(x) = \int_a^x f(s)ds + c \quad \text{ou} \quad c = G(a).$$

Logo

$$G(x) = \int_a^x f(s)ds + G(a).$$

Portanto, as primitivas de f, que se anulam em a, são únicas e têm a forma

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds.$$

A primitiva é, também, denominada *integral indefinida* da f.

Este resultado contido no Escólio é as vezes denominado Teorema Fundamental do Cálculo.

Para completar este capítulo, faz-se a seguinte observação: Note que, no início do capítulo, foram recordados os conceitos de integral como operação inversa da derivação e como medida da área do conjunto ordenada. Isto é, tinha-se a noção de primitiva de f, ou seja, a função F tal que $F' = f$ e a integral $\int_a^b f(s)ds$. O problema fundamental, seria determinar a classe de funções f, onde estas noções, se harmonisariam e valia a Fórmula de Newton-Leibniz. A resposta é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para a classe das funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas. Este resultado, é devido a Cauchy. Com o objetivo de obter um Teorema Fundamental do Cálculo, em uma classe contendo a das funções contínuas, conduziu Lebesgue a propor em 1901 uma nova definição de integral, onde o referido teorema é válido em uma classe mais ampla de funções. Esta idéia de Lebesgue, trouxe para a matemática um progresso considerável, dando origem a uma nova disciplina que aparece sob a denominação de "Integral de Lebesgue". A qual é parte obrigatória nos programas de matemática nas universidades (veja Parte 2, Complemento **90**).

6.5 Integrais Impróprias

Observe que se estudou a noção de integral no sentido de Riemann para funções limitadas em intervalos limitados $[a, b]$. Estuda-se a seguir, a noção de integral para funções em partes não limitadas da reta ou para funções não limitadas em (a, b) limitado. Essas integrais são denominadas impróprias.

(I) Uma primeira questão seria estender a noção de integral para funções limitadas mas definidas em conjuntos lineares dos seguintes tipos:

- $E = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ representado por $(a, +\infty)$,
- $F = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ representado por $(-\infty, b)$.

Com $a = b = 0$, o conjunto $E \cup F \cup \{0\}$ representa-se por $(-\infty, +\infty)$. De fato, seja $y = f(x)$ uma função definida em (a, ∞), limitada e integrável a Riemann, para todo (a, b), com $b > a$. Considere a função

$$\varphi(b) = \int_a^b f(x)dx$$

definida para todo $b > a$. Quando $\lim\limits_{b \to \infty} \varphi(b)$ existir, diz-se que a função limitada f é integrável no conjunto $(a, +\infty)$ e o número real $\lim_{b \to +\infty} \varphi(b)$ é a integral de f em $(a, +\infty)$. Escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Quando o limite não existir, diz-se que f não é integrável em $(a, +\infty)$. Se este limite é $+\infty$ ou $-\infty$, diz-se que a integral de f em $(a, +\infty)$ é divergente. De modo análogo, define-se a integral de f limitada em $(-\infty, b)$, e integrável à Riemann em cada subintervalo (a, b), com $a < b$. Tem-se, por definição

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Quando f é limitada em $(-\infty, +\infty)$ e integrável a Riemann em cada subintervalo (a, b) de $\mathbb{R}$, e além disto, para cada número real c existem as integrais

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \qquad \text{e} \qquad \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

diz-se que f é integrável em $(-\infty, +\infty)$ e a soma destas duas integrais é a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Note que se f é integrável em $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ ou $(-\infty, +\infty)$ e

F é uma primitiva de f, tem-se as regras de Cálculo:

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(s)ds = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a),$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(s)ds = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x),$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$

Exemplo 6.3 -

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-s}\,ds = \lim_{x\to\infty}(-e^{-x}) + 1 = 1 - \lim_{x\to\infty} e^{-x} = +1,$

(b) $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{s}\,ds = \lim_{b\to\infty} e^{b} + 1 \quad \text{diverge para} \quad +\infty.$

Note-se que $y = e^x$ é integrável em todo intervalo fechado $[a, b]$ de $(0, +\infty)$ mas não é integrável em $(0, +\infty)$. Uma função $y = f(x)$, para $-\infty < x < +\infty$, integrável em todo subintervalo fechado $[a, b]$ da reta $\mathbb{R}$, diz-se localmente integrável em $\mathbb{R}$. Note que a função pode ser localmente integrável mas não ser integrável. Por exemplo, $f(x) = e^x$ para $x \in \mathbb{R}$, é localmente integrável em $\mathbb{R}$ mas não é integrável em $\mathbb{R}$. Se f é integrável em $\mathbb{R}$ ela é localmente integrável em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.4 - Considere $f(x) = \cos x$ para $0 \leq x < \infty$. Obtém-se para todo intervalo $(0, b)$ com $b > 0$, que

$$\int_0^b \cos\, s\, ds = \text{sen}\ b$$

mas, $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b \cos s\, ds$ não existe pois $\operatorname{sen} b$, como foi visto, oscila entre -1 e $+1$ quando $b \to \infty$. Para mostrar isto, é suficiente notar que fazendo $b = 1/\varepsilon$, quando $\varepsilon \to 0$, tem-se $b \to \infty$. Logo, $f(x) = \cos x$ não é integrável em $(0, +\infty)$, mas é localmente integrável.

Exemplo 6.5 - Calcular

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\cdot$$

Se $F(x) =$ arctg x com $-\pi/2 < x < +\pi/2$ resulta que F é uma primitiva de $f(x) = 1/(1+x^2)\cdot$ Logo,

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \text{ arctg } b = \frac{\pi}{2}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = -\lim_{a\to-\infty} \text{ arctg } a = \frac{\pi}{2}.$

Portanto, como foi definido,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

(II) Será examinado o caso em que $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ com a e b números reais, mas f possui uma singularidade em b. De fato, suponha que f seja integrável à Riemann em cada subintervalo $[a, b-\delta]$ de $[a,b)$ para $\delta > 0$. Assim, a integral de f em $[a, b-\delta]$ é uma função de $\delta > 0$ definida por

$$I(\delta) = \int_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

Quando $I(\delta)$ possui limite I_0 quando δ tende para zero, diz-se que I_0 é a integral generalizada, segundo Cauchy, de f em $[a, b)$. Define-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

Suponha que exista um ponto $a < c < b$ no qual f não é limitada. Seja f integrável em cada subintervalo $[a, c-\delta]$ e $[c+\delta', b]$ de $[a, b]$ com $\delta > 0$ e $\delta' > 0$. Quando existem

$$\lim_{\delta \to 0} \int_a^{c-\delta} f(x)dx \quad \text{e} \quad \lim_{\delta' \to 0} \int_{c+\delta'}^b f(x)dx$$

diz-se que f possui integral imprópria em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\delta' \to 0} \int_{c+\delta'}^b f(x)dx$$

com $\delta > 0$ e $\delta' > 0$ independentes.

Antes de prosseguir com esta análise, considera-se um exemplo.

Seja $f(x) = 1/x$ em $[-1, -\delta]$ e $[\delta', 1]$ com $\delta > 0$ e $\delta' > 0$. Tem-se

$$\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta'}^1 \frac{dx}{x} = \log \delta - \log \delta' = \log \frac{\delta}{\delta'},$$

sendo $\log |x|$ uma primitiva de $1/x$. Logo, se δ e δ' forem independentes não existirá limite de $\log \frac{\delta}{\delta'}$ quando $\delta' \to 0$ e $\delta \to 0$. Entretanto, se $\delta = \delta'$ este limite é zero. Portanto, embora não exista

$$\lim_{\delta \to 0} \int_a^{\delta} f(x)dx + \lim_{\delta' \to 0} \int_{\delta'}^b f(x)dx,$$

com δ e δ' independentes, existe com $\delta = \delta'$, isto é existe

$$\lim_{\delta\to 0}\Big(\int_a^{\delta} f(x)dx + \int_{\delta}^{b} f(x)dx\Big).$$

O limite com $\delta = \delta'$ denomina-se *valor principal de Cauchy - vp* da integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

quando f possui uma singularidade em c. Denota-se

$$vp\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\Big(\int_a^{\delta} f(x)dx + \int_{\delta}^{b} f(x)dx\Big).$$

Como exemplo obtém-se

$$vp\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0}\Big(\int_{-1}^{\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{+1} \frac{dx}{x}\Big) = 0.$$

Note que o estudo das integrais impróprias reduz-se ao estudo do comportamento de funções quando o argumento tende para $+\infty$ ou $-\infty$ e quando $\delta \to 0$. Portanto, deve ser feito por meio do teorema de Cauchy sobre existência de limite de uma função f. Os detalhes não serão feitos nestas lições. $\square$

Capítulo 7

Complementos & Exercícios

Parte 2

Nota

Esta parte do livro traz alguns exercícios sobre os resultados provados na primeira parte. Na esperança de familiarizar o leitor com alguns outros aspectos da Análise Matemática, determinados tópicos foram incluídos como complementos. São muito educativos os Complementos **86**, contendo a bela demosntração de Lebesgue do Teorema de Aproximção de Weierstrass e **90**, sobre a criação, por

Lebesgue, de um conceito de integral que influenciou decisivamente o desenvolvimento da Matemática.

1. Define-se como polinômio de grau m, na variável x, com coeficientes racionais $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$, a toda expressão algébrica do tipo

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m \,.$$

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_m$ denominam-se coeficientes do polinômio. No presente contexto o x varia no conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais. Assim, $P(x)$ define uma função $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to P(x)$, denominada de função polinomial. Se esta for nula, resulta que $P(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se todos os coeficientes de $P(x)$ são nulos, então $P(x)$ é identicamente nula. Reciprocamente, se $P(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então seus coeficientes são todos nulos. Para provar esta asserção raciocina-se por indução sobre o grau m. Se $m = 1$ vem $a_0 x + a_1 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo em $x = 0$ vem $a_1 = 0$ e daí $a_0 = 0$. Suponha a afirmação verdadeira para um polinômio de grau $m - 1$. Tem-se $2^m\, P(x) = 0$ e $P(2x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Resulta que

$$2^m\, P(x) - P(2x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, obtém-se

$$(2^m - 2^{m-1}) a_1 x^{m-1} + (2^m - 2^{m-2}) a_2 x^{m-2} + \cdots + \\ (2^m - 2) a_{m-1} x + (2^m - 1) a_m = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo válido para o grau $m - 1$, por hipótse da indução, resulta que $(2^m - 2^{m-j}) a_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, m$ o que implica $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$. Portanto, o polinômio reduz-se a $a_0 x^m = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo-se $x = 1$, resulta $a_0 = 0$.

Conclui-se, assim, que uma condição necessária e suficiente para que $P(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é que seus coeficientes sejam todos nulos.

Como conseqüência deste resultado deduz-se uma relação de igualdade entre polinômios. De fato, suponha que $P(x)$ e $Q(x)$ sejam polinômios de mesmo grau m com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ e $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m$. Se $P(x) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta que

$$P(x) - Q(x) = (a_0 - b_0)x^m + (a_1 - b_1)x^{m-1} + \cdots + \\ (a_{m-1} - b_{m-1})x + (a_m - b_m) = 0$$

para todo x. Logo, $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$.

Deseja-se aplicar os resultados anteriores no cálculo dos coeficientes do quociente da divisão de $P(x)$, do grau m, pelo binômio $x - a$. De fato, como $x - a$ é de grau um, o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - a)$ será um polinômio de grau $m - 1$ e o resto de grau zero, isto é, uma constante. Se $Q(x)$ for o quociente e R o resto, tem-se

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Desta relação conclui-se que o resto R é $P(x)$ calculado em a, isto é, $R = P(a)$. Portanto, se $P(a) = 0$ o polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$.

Exemplo: O polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é divisível por $x - 1$, pois $P(1) = 0$.

Se $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ e $b_0, b_1, \ldots, b_{m-2}, b_{m-1}$ são os coeficientes de $P(x)$ e $Q(x)$, obtém-se

$$\left(a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_{m-1}x + a_m\right) =$$
$$(x-a)\left(b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-2}x + b_{m-1}\right) + R.$$

Daí resulta

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = b_0x^m + (b_1 - ab_0)x^{m-1} +$$
$$(b_2 - ab_1)x^{m-2} + \cdots + (b_{m-1} - ab_{m-2})x + R - ab_{m-1}.$$

Do critério de igualdade para polinômios, obtém-se as seguintes relações para o cálculo dos coeficientes $b_0,\ b_1, \ldots, b_{m-1}$ do quociente e do resto

$$b_0 = a_0,\ \ b_1 = ab_0 + a_1,\ \ b_2 = ab_1 + a_2, \ldots, b_{m-1} = ab_{m-1} + a_{m-1},$$
$$R = ab_{m-1} + a_m.$$

O processo para o cálculo dos coeficientes do quociente acima encontrado denomina-se algoritmo de Ruffini (1804), posto no dispositivo prático a seguir.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m \\ \hline a & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{m-1} & R \\ & & & & & & \end{array}$$

Os b_k são calculados pelo algoritmo de Ruffini.

Exemplo: $P(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ com divisor $x - 2$. Tem-se $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ e $Q(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$ é de grau 3. Determina-se os b_k pelo dispositivo prático.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ \hline +2 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & R \\ & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \\ & 2 & 4 & 11 & 22 & \\ & & & & & \end{array}$$

$b_0 = a_0, \ \ b_1 = ab_0 + a_1, \ \ b_2 = ab_1 + a_2, \ \ b_3 = ab_2 + 3, \ \ R = ab_3 + a_4.$

Para dividir $P(x)$ por $x + a$ é suficiente considerar no algoritmo de Ruffini $-a$ no lugar de a.

Exemplo: $P(x) = x^3 + x + 1$ por $x + 2$. Tem-se $a_0 = 1, \ a_1 = 0,$ $a_2 = 1, \ a_3 = 1$ e $a = -2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -2 & b_0 & b_1 & b_2 & R \\ & & & & \end{array}$$

Divisão por $ax + b$: Tem-se

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R \quad \text{ou} \quad P(x) = \Big(x + \frac{b}{a}\Big)[aQ(x)] + R.$$

Reduz-se ao caso $x + \alpha$ com $\alpha = b/a \cdot$ O resto será $R = P\,(-b/a)$. Os coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ do quociente sõ calculados pelo algoritmo de Ruffini com $\alpha = -b/a \cdot$ O quociente encontrado possui seus coeficientes multiplicados por a. Portanto, deve-se dividi-lo por a para fazer a correção. Procede-se de modo análogo para dividir por $ax - b$.

Aplicações:

- Calcule a derivada da função $f(x) = x^7$ no ponto $x_0 = 2$, pela definição de derivada.

Solução: Deve-se calcular $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^7-2^7}{x-2}$ para $x \neq 2$. Esta função não é definida em 2 mas o polinômio $P(x) = x^7 - 2^7$ é divisível por $x - 2$, pois o resto, R, da divisão é igual a $P(2) = 0$. Aplicando-se o dispositivo de Ruffini, obtém-se para $P(x)$

$$a_0 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ a_5 = 0,\ a_6 = 0,\ a_7 = -2^7.$$

O quociente $Q(x)$ é de grau seis dado por

$$Q(x) = b_0x^6 + b_1x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + b_4x^2 + b_5x + b_6,$$

com os b_k dados pelo algoritmo de Ruffini. Obtém-se

$$\begin{array}{c|cccccccl} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2^7 \\ \hline 2 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & R \\ & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 2\times 64 - 2^7 \end{array}$$

Portanto,

$$\frac{x^7 - 2^7}{x - 2} = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 64$$

e

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^7 - 2^7}{x - 2} = 7 \times 2^6 \text{ que é a derivada no ponto 2.}$$

- Calcule a derivada de $f(x) = x^m$ no ponto $x = a$ para $m \in \mathbb{N}$.
- Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[5]{x}$ no ponto $x = 2$.

Solução: Deve-se calcular

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{x - 2} \quad \text{para} \quad x \neq 2.$$

Fazendo-se $\xi = \sqrt[5]{x}$ e $\eta = \sqrt[5]{2}$ obtém-se

$$\frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{x-2} = \frac{\xi - \eta}{\xi^5 - \eta^5}$$

reduzindo-e ao caso anterior. Obtém-se por meio do algoritmo de Ruffini

$$\lim_{\xi \to \eta} \frac{\xi^5 - \eta^5}{\xi - \eta} = 5\eta^4.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{x-2} = \lim_{\xi \to \eta} \frac{\xi - \eta}{\xi^5 - \eta^5} = \frac{1}{5\eta^4} = \frac{1}{2\sqrt[5]{2^4}}.$$

• Calcule a derivada no ponto $x = a$ da função $f(x) = \sqrt[m]{x}$, $m \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $a > 0$, pela definição de derivada no ponto a.

2. Considere a equação algébrica

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e seja p/q um racional com p primo com q.

• Mostre que uma condição necessária para que p/q seja raiz da equação (1) é que p seja divisor de a_n e q divisor de a_0.

• Quais números p/q poderiam ser raízes da equação

$$6x^3 + 10x^2 - 3x + 7 = 0.$$

• Dê uma condição sobre a_0 e a_n em (1) para que a equação só possua raízes inteiras.

• Mostre, por meio do critério acima, que os números $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ são irracionais. De modo geral, $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ não é racional para $n \in \mathbb{N}$.

3. Dado um número real positivo α e um número natural n, prove que existe um único real positivo x tal que $x^n = \alpha$.

Solução: A unicidade resulta do fato de x e y sendo soluções implica que $x^n = y^n$. Daí tem-se $x = y$.

A existência será provada por meio da construção de um corte de Dedekind nos racionais como foi feito para resolver $x^2 = \alpha$.

Coloca-se em uma classe H' todos os racionais negativos, o zero e os racionais positivos h' tais que $h'^n < \alpha$. Em outra classe H'' todos os racionais positivos h'' tais que $h''^n > \alpha$. Note que H'' é não vazia. De fato, coloca-se em H'' todos os racionais maiores que 1 se $\alpha \leq 1$ e se $\alpha > 1$ coloca-se em H'' um qualquer racional maior que α^2 pois $(\alpha^2)^n \geq \alpha^2 > \alpha$ se $\alpha > 1$.

As classes (H', H'') definem um corte em $\mathbb{Q}$, logo um par de classes contíguas. Seja β o número definido por $\beta = (H', H'')$. Sendo $0 \in H'$ resulta que $\beta > 0$.

Demonstra-se, a seguir, que β é a solução de $x^n = \alpha$. Considerando-se os números não negativos tem-se

$$h' \leq \beta \leq h'' \quad \text{o que implica} \quad h'^n \leq \beta^n \leq h''^n.$$

Por definição de H' e H'' tem-se $h'^n < \alpha < h''^n$. Das desigualdades anteriores obtém-se:

$$|\alpha - \beta^n| \leq h'^n - h''^n.$$

Do Exercício **1**, obtém-se:

$$h''^n - h'^n = (h'' - h')(h''^{n-1} + h''^{n-2}h' + \cdots + h'^{n-1} + h'^{n-1})$$

Considerando em H'' os números que são menores do que K, tem-se

$$h''^n - h'^n < n\,K^{n-1}(h'' - h').$$

Sendo H', H'' contíguos, dado $\varepsilon > 0$, encontra-se h' e h'' tais que

$$h'' - h' < \frac{\varepsilon}{n\,K^{n-1}}$$

Portanto, para cada $\varepsilon > 0$ tem-se $|\alpha - \beta^n| < \varepsilon$.

4. Considere os números reais positivos $a < b$. Define-se

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{ab}\,, & b_1 &= \frac{a+b}{2}\\
a_2 &= \sqrt{a_1 b_1}\,, & b_2 &= \frac{a_1+b_1}{2}\\
&\vdots\\
a_n &= \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\,, & b_n &= \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Mostre que

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \quad \text{e} \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

são classes contíguas em $\mathbb{R}$ e definem um $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{ab} < \xi < \frac{a+b}{2}\,\cdot$$

Sugestão: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Daí vem $2\sqrt{ab} \leq (a+b)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ obtém-se

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \leq \frac{1}{2}\,(a_{n-1} + b_{n-1}) = b_n\,.$$

Note que $a_1 = \sqrt{ab} > a$ pois $b > a$. Também obtém-se $a_n \geq a_{n-1}$ e $b_n \leq b_{n-1}$. Sendo $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}\,(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \leq \frac{1}{2}\,(b-a)$, de onde obtém-se $b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}\,(b-a)$.

5. Dados os números reais positivos $a < b$, define-se

$$a_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}\,, \quad b_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$a_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}\,, \qquad b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}\,,$$

e por indução define-se a_n e b_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Mostre que as classes

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \quad \text{e} \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

são contíguas e definem o número ξ.

- Mostre que A possui um supremo S e B um ínfimo I, sendo $I = S = \xi$.

Sugestão:

$$a_1 = \frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{ab}{b_1} \leq \frac{\frac{1}{2}(a+b)^2}{b_1} = \frac{b_1^2}{b_1} = b_1$$

Por indução $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Também

$$a_1 = a\left(\frac{1}{\frac{1}{2}(a+b)}\right) \geq a \quad \text{porque} \quad \frac{1}{2}\,(a+b) < b.$$

Daí $a_n \geq a_{n-1}$ e $b_n \leq b_{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$b_1 - a_1 \leq \frac{1}{2}\,(b-a) \quad \text{porque} \quad a\left(-\frac{b}{\frac{1}{2}(a+b)}\right) < -a$$

pois $a < (a+b)/2 < b$.

Observação - O número a_1 denomina-se *média harmônica de a e b*, representada por M_h. O número $(a+b)/2$ denomina-se *média aritmética* e $\sqrt{ab}$ *média geométrica,* denotadas por M_a e M_g. Tem-se $M_h \leq M_g \leq M_a$.

6. Dados os números $a_1 < r_1$, define-se

$$
\begin{array}{ll}
a_2 = \dfrac{a_1 + r_1}{2}, & r_2 = \sqrt{r_1 a_2} \\
\vdots & \vdots \\
a_n = \dfrac{a_{n-1} + r_{n-1}}{2}, & r_n = \sqrt{r_{n-1} a_n}
\end{array}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Mostre que

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \quad \text{e} \quad B = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$$

são classes contíguas e definem um real ξ.

Sugestão: $a_2 = (a_1 + r_1)/2 > a_1$ pois $r_1 > a$, $a_2 = (a_1+r_1)/2 < r_1$ e
$r_2 = \sqrt{r_1 a_2} < r_1$. De modo geral

$$a_n < a_{n-1} \quad \text{e} \quad r_n > r_{n-1} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tem-se, também

$$r_2 - a_2 = \sqrt{r_1 a_2} - \frac{a_1 + r_1}{2} < \frac{r_1 + a_2}{2} - \frac{a_1 + r_1}{2} =$$
$$\frac{1}{2}(a_2 - a_1) = \frac{1}{2}\left[\frac{a_1 + r_1}{2} - a_1\right] = \frac{1}{2^2}(r_1 - a_1).$$

Daí resulta $r_n - a_n < 1/2^n\,(r_1 - a_1)$.

Observação - Esta sucessão é obtida quando calcula-se o número π pelo método dos isoperímetros. Neste caso, considerando-se $a_1 = 1/4$ e $r_1 = \sqrt{2}/4$, o número ξ definido por A e B é $1/\pi\cdot$

7. Considere a sucessão (a_n) de números reais definida por

$$a_n = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2^2}\Big)\dots\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big).$$

Prove que (a_n) é convergente.

Sugestão: Tem-se $a_{n+1} = a_n\,\big(1 - 1/2^{n+1}\big)$. Sendo $0 < 1 - 1/2^k < 1$, $k \in \mathbb{N}$, resulta $0 < a_n < 1$.

8. Considere a sucessão (a_n) de números reais definida por

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prove que (a_n) converge e calcule seu limite.

Sugestão: Mostre que (a_n) é crescente e limitada. Tem-se $a_1 < 2$, $a_2 < 2, \dots$

9. Calcule o limite da sucessão $a_n = a^n/n!$ sendo $a > 0$.

Sugestão: Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $a/(m+1) < 1/2\cdot$ Para $n > m$ obtém-se:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^n}{m!}\,\frac{a}{m+1}\,\frac{a}{m+2}\dots\frac{a}{n} \leq$$
$$\frac{a^m}{m!}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-m} = \frac{(2a)^m}{m!}\,\frac{1}{2^n}\,.$$

10. Calcule o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Ver Parte 1, Capítulo 3, teorema de Cesaro. Demonstrou-se que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

quando o segundo limite existe e $a_n > 0$. Fazendo $a_n = n!/n^n$ tem-se $\sqrt[n]{a_n} = b_n$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}\,.$$

11. Prove que se $0 < a < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. De fato, (a^n) é decrescente e limitada, logo convergente. Do teorema de Cauchy, para cada $(1-a)\varepsilon > 0$, existe $n = n_0(\varepsilon)$, tal que

$$|a^m - a^n| < (1-a)\varepsilon \quad \text{para todo par} \quad m, n > n_0\,.$$

Esta condição vale para $n = m+1$ qualquer que seja $m > n_0$. Logo

$$a^m(1-a) < (1-a) \quad \text{para todo} \quad m > n_0$$

Como conseqüência do Exercício **11** resulta que se $-1 < x < +1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} |x|^n = 0$.

12. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas no Exercício **4**. Prove que

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Sugestão: As sucessões são monótonas e limitadas.

13. Calcule o limite da sucessão $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{27}, \frac{40}{81}, \ldots$

Sugestão: Observe que o termo geral a_n é uma fração cujo denominador é uma potência de 3 e o numerador é a soma dos termos da fração anterior. Assim

$$\frac{13}{27} = \frac{9+4}{3^3} = \frac{3^2+2^2}{3^3} = \frac{3^2+3+1}{3^3}.$$

14. Determine os valores aderentes das sucessões

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

15. Examinar o comportamento das séries:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (converge)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$ (converge para $|a| < 1$)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+4}\right)^n$ (converge para $|x| < 4$)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)\, \frac{x^n}{n2^n}$ (converge para $|x| < 1$).

16. Considere as séries:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{n}\right)}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}\,.$

Mostre que a primeira diverge e as outras duas convergem.

17. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{(n-1)x+1}-\frac{1}{nx+1}\Big]$$

- Calcule a reduzida S_n .
- Mostre que a série converge para 1.

18. Mostre que se a sucessão (a_n), com $a_n > 0$, é uma progressão aritmética, de razão $r > 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ é harmônica.

Sugestão: Seja $a_n = a + nr$ onde $a > 0$ e r é a razão. Calcule a média harmônica de $1/(a+(n-1)r)$ e $1/(a+(n+1)r)\cdot$

19. Considere a progressão aritmética (a_n) do Exercício **18** e a série, com $a_1 > 0$, dada por

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}+\cdots$$

- Calcule a reduzida S_n
- Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Sugestão: Observe que

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}a_k}=\frac{r}{a_{k-1}a_k}\cdot$$

Daí

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{r}{a_{k-1}a_k}=\Big(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\Big)+\Big(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\Big)+\cdots+$$
$$\Big(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\Big)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}=r\,\frac{(n-1)}{a_1a_n}\cdot$$

Logo

$$S_n = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \quad a_n = a_1 + (n-1)r,$$

portanto,

$$S_n = \frac{(n-1)}{a_1^2 + a_1(n-1)r} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{a_1 r}\cdot$$

Aplicação: Quando $a_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtém-se a série

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

estudada no texto. Sendo $a_1 = 1,\ r = 1$ e a soma da série 1.

20. Demonstrou-se na Parte 1, Capítulo 3 e, com outro método, no Exercício **19**, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Por meio deste resultado, obtenha a soma da série convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}, \quad p \in \mathbb{N},\ p \text{ fixo}.$$

Solução: Para descobrir o processo para somar esta série, experimenta-se o caso $p = 2$. Note que a série converge pois é dominada pela série convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Assim para $p = 2$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big).$$

Se S_n for a reduzida da série para $p = 2$ tem-se

$$2\,S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}\,\cdot$$

Reduz-se a segunda parcela ao caso $p = 1$ por meio da mudança de variáveis $k + 2 = \nu + 1$. Se $k = 1$, $\nu = 2$ e $k = n$, $\nu = n + 1$ obtém-se

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\,\cdot$$

Substituindo em $2\,S_n$, resulta

$$2\,S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

reduzindo-se ao caso $p = 1$. Tomando limite obtém-se

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = 1 + \frac{1}{2}\,\cdot$$

Suponha a igualdade anterior válida para $p \in \mathbb{N}$, isto é

$$p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+p)} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\,\cdot$$

Prova-se que vale para $p + 1$. De fato,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+p+1)} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p+1}\Big).$$

A soma parcial S_n é

$$(p+1)S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+p+1} \cdot$$

Fazendo a mudança de variáveis $k+p+1 = \nu + p$ obtém-se

$$(p+1)S_n = p\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+p)} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{n+p+1} \cdot$$

Tomando limite quando $n \to \infty$, valendo o resultado para p, tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+p+1)} = \frac{1}{p+1}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\Big).$$

21. Dado $\alpha > 0$, estudar a convergência da série

$$\operatorname{sen}^\alpha\left(\frac{x}{a}\right) + \operatorname{sen}^\alpha\left(\frac{x}{a+1}\right) + \cdots + \operatorname{sen}^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right) + \cdots,$$

sendo $\operatorname{sen}^\alpha\left(\frac{x}{a+1}\right) = \left(\operatorname{sen}\ \frac{x}{a+1}\right)^\alpha$. Supõe-se

$$a > 0, \quad x > 0 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \cdot$$

Solução: O seno é crescente em $[0, \pi/2]$ e seus valores estão no intervalo $[0, 1]$. Logo

$$0 < \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a+n}\right) < \operatorname{sen}\ \frac{x}{a} < 1 \quad \text{em} \quad \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Para $\alpha > 1$, $0 < \operatorname{sen}^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right) < \operatorname{sen}^\alpha\left(\frac{x}{a}\right) < 1$. Assim, tem-se que $\operatorname{sen}\ \frac{x}{a+n} < \frac{x}{a+n} \cdot$ Portanto, a soma parcial S_n possui a propriedade

$$S_n < x^\alpha\Big(\frac{1}{a^\alpha} + \frac{1}{(a+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(a+n)^\alpha}\Big).$$

(S_n) é convergente porque $\alpha > 1$. Logo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+n}\right)$ converge se $\alpha > 1$. Suponha $0 < \alpha < 1$. Sabe-se que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{a+n}\right)}{\frac{x}{a+n}} = 1.$$

Portanto, para $n > m$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{a+n}\right) > k\left(\frac{x}{a+n}\right) \quad \text{para} \quad 0 < k < 1, \quad k \quad \text{fixo.}$$

Resulta que

$$\operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+m}\right) + \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+m+1}\right) + \cdots + \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+n}\right) >$$

$$k^{\alpha}x^{\alpha}\left[\frac{1}{(a+m)^{\alpha}} + \frac{1}{(a+m+1)^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(a+n)^{\alpha}}\right],$$

que diverge pois $0 < \alpha < 1$. Diverge, também, para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

22. Processo de Cauchy e Cesaro para Séries - No estudo das séries adotou-se o processo de Cauchy para definir a soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,.$$

Relembrando, definiu-se para cada $n \in \mathbb{N}$ a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\,,$$

denominada soma parcial ou reduzida de ordem n. Quando esta sucessão (S_n) converge define-se, segundo Cauchy,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n\,.$$

Todavia, há outros processos para dar sentido ao símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, denominado série de termo geral u_n.

Discute-se, no presente complemento, um processo para somar séries, denominado médias de Cesaro. De fato, dada a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ considera-se a sucessão (S_n) de suas reduzidas. Define-se uma nova sucessão (σ_n) por

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\,(S_1 + S_2 + \cdots + S_n)$$

denominada média de Cesaro.

Diz-se que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente, segundo Cesaro, quando é convergente a sucessão (σ_n) das médias de Cesaro e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n\,.$$

Casos há em que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ não converge segundo Cauchy mas converge segundo Cesaro. Realmente dada a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \dots,$$

tem-se $S_{2n} = 0$ e $S_{2n+1} = 1$. Resulta que (S_n) não converge, provando que a série não converge segundo Cauchy. Por outro lado, considere a sucessão (σ_n) das médias de Cesaro. Obtém-se

$$\sigma_{2n} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{2n}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

$$\sigma_{2n+1} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{2n}}{2n+1} + \frac{S_{2n+1}}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\,.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$, provando que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ converge segundo Cesaro, tendo-se

$$1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}\,,$$

no sentido de Cesaro.

Note-se que (S_n) converge para S então (σ_n) converge para S. é conseqüência do Critério de Cesaro (ver Cap. 3, Parte 1).

História: Indagando sobre esta soma infinita de parcelas

$$1 - 1 + 1 - \ldots$$

o monge italiano Guido Gandi, professor da Universidade de Pisa, Itália, afirmava que esta soma valia $1/2 \cdot$ Isto aconteceu muito antes da definição de convergência de séries formulada no século XIX. Ele justificava por um processo intuitivo, não matemático, como será descrito a seguir. Dizia ele que o número 1 representa uma pérola que certo senhor, ao morrer, deixou como herança para duas filhas, sob a condição de cada filha guardar consigo a pérola durante um dia e no dia seguinte entregá-la a outra filha que lhe devolveria no dia seguinte. Este processo se repetindo alternadamente ad infinitum. Deste modo ao fim de muitos anos tudo se passaria como se cada filha possuisse a metade da pérola, isto é, cada filha seria dona de metade da pérola. O monge concluía que

$$1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}\,\cdot$$

Veja D. Struik - *A concise history of mathematics*, Dover Publications, Inc. NY (1948) pp. 176-177.

23. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$.

Solução: Recorde-se que do teorema de Cesaro, Parte 1, Cap. 3, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

desde que o segundo limite exista. De fato, seja

$$a_n = \frac{1}{n^n}\left((n+1)(n+2)\dots(n+n)\right), \quad \text{logo}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\left[(n+2)(n+3)\dots(n+n)(2n+1)(2n+2)\right].$$

Daí, obtém-se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{e}\cdot$$

Ver B. Niewenglowski - *Cours d'Algèbre, Tome Premier*, 1909, p. 308, proposto.

24. Considere m, $n \in \mathbb{N}$ e a função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{m\to\infty}\left(\cos^2 n!\,\pi x\right)^m$$

com $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande. Prove que f é a função de Dirichlet.

Solução:

• Suponha x um número racional p/q. Sendo $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande, $n!(p/q)$ é um inteiro, qualquer que seja p/q. Resulta que se x for racional, então $\cos^2(n!\,\pi x) = 1$ e $f(x) = 1$.

• Suponha x um número irracional. Então $n!\,\pi x$ não é múltiplo de π, todavia, $0 < \cos^2 n!\,\pi x < 1$. Logo, usando o Exercício **11**, resulta que $\lim\limits_{m\to\infty} (\cos^2 n!\,\pi x)^m = 0$. Provando que $f(x) = 0$ nos irracionais. Então f é a função de Dirichlet.

25. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(n!\,\pi x)}{\operatorname{sen}^2(n!\,\pi x) + t^2}$$

$n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande. Mostre que $f(x) = 0$, se x racional e $f(x) = 1$, se x irracional. Logo $1 - f(x)$ é a função de Dirichlet.

26. Considere as funções

$$f(x) = \left| \begin{array}{lll} x^2 & \text{se} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{array} \right. \tag{i}$$

$$g(x) = \left| \begin{array}{lll} \operatorname{sen} x & \text{se} & x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{array} \right. \tag{ii}$$

Estas funções são deriváveis em $x_0 = 0$?

Solução: ii) Deve-se calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x}$ para x racional e x irracional.

• Suponha x racional. Tem-se $g(x) = \operatorname{sen} x$, logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

pois 0 é racional sendo $g(0) = 0$.

- Suponha x irracional. Note que $g(0) = 0$ pois 0 é racional e $g(x) = x$ nos irracionais. Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Logo, g é derivável em $x_0 = 0$ e $g'(0) = 1$. Com o mesmo argumento demonstra-se que $f'(0) = 0$.

27. Considere a função

$$h(x) = \left| \begin{array}{lll} \operatorname{sen} x & \text{se} & x \in \mathbb{Q} \\ & & \\ x^2 & \text{se} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{array} \right.$$

Mostre que h não é derivável em $x_0 = 0$.

28. Considere a função

$$h(x) = \left| \begin{array}{lll} \cos x & \text{se} & x \in \mathbb{Q} \\ & & \\ x^2 & \text{se} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{array} \right.$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x}$ para $x \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

29. Mostre que a função f do Exercício **26** é contínua apenas em $x_0 = 0$.

30. Esboce os gráficos das função f, g e k dos exercícios anteriores.

31. Considere a função $f(x) = \log(1 + x)$ para $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$. Escreva a fórmula de Taylor de f até a ordem $n = 2$ em $x_0 = 0$. Deduza que $\log(1 + x) - x$ possui a ordem de x^2, isto é, conclua que $|\log(1 + x) - x| < x^2/2$.

Solução: Tem-se $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$ para todo $0 < \xi < x$. Fazendo as derivadas f', f'' e sendo $\xi = \theta x$ para $0 < \theta < 1$, obtém-se $|\log(1 + x) - x| < 1/2x^2$.

32. Para $x > 0$ considere a série

$$1 + \frac{x \log x}{1} + \frac{(x \log x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \log x)^n}{n!} + \cdots$$

Mostre que converge em valor absoluto em $(0, 1)$. Qual sua soma neste intervalo de convergência.

Sugestão: Faça o gráfico da função $x \to x \log x$ em $(0, 1)$. Deve mostrar que $\lim\limits_{x\to 0} x \log x = 0$, calcular os intervalos onde a função cresce e decresce. Deduza que $|x \log x| < 1/e$ logo a série é majorada por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^n/n! \cdot$ A soma da série é $e^{x \log x} = x^x$, em $(0, 1)$.

33. Mostre que $f(x) = x^n(1 - x)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ está nas condições do teorema de Rolle em $(0, 1)$. Calcule o ξ do teorema de Rolle em $(0, 1)$.

Sugestão: Examine a continuidade de f e calcule $f(0) = f(1)$. Resulta $f'(\xi) = 0$ para $0 < \xi < 1$. Logo $\xi^{n-1}(1 - \xi)^{n-1}(1 - 2\xi) = 0$ e $\xi = 1/2\cdot$

34. Seja $f\colon [0, 1] \to \mathbb{Q}$. Mostre que se f for contínua implica f constante.

Solução: S uponha f contínua mas não constante. Resulta que se $f(x_0) = k$, existe x_1 em $[0, 1]$ tal que $f(x_1) \neq k$. Note-se que $f(x_1)$ e k são racionais, pela definição de f. A f é contínua por hipótese, logo dado $f(x_0) < s < f(x_1)$ existe $x_0 < \xi < x_1$ tal que $f(\xi) = s$. Isto é contraditório porque s pode ser um irracional e $f(\xi)$ é um racional. Logo f é constante.

35. Esboce o gráfico das funções

$$f(x) = \sqrt{x - [x]}; \quad g(x) = (x - [x])^2 \quad \text{e} \quad h(x) = [x] + (x - [x])^2,$$

onde $[x]$ representa a parte inteira do número real x.

36. Considere a função $f\colon (0, \pi) - \{\pi/2\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1} + x \neq \frac{\pi}{2} \cdot$$

Calcule os limites laterais de f em $1/2 \cdot$

Resposta: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = +1.$

37. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} \frac{n}{n^2+r^2}$ por meio da definição de integral de Cauchy de $f(x) = 1/(1 + x^2)$ no intervalo $[0, 1]$.

Solução: Decompondo $[0, 1]$ pelos pontos

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$$

a soma de Riemann correspondente é

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{n^2 + r^2} \cdot$$

Sendo f contínua em $[0, 1]$, f é integrável, logo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{n^2 + r^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} \cdot$$

De modo análogo, prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} \frac{1}{1+r} = \log 2.$

38. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ [(n+1)(n+2)\dots(n+n)]^{1/n}$ por meio da integral de $f(x) = \log(1+x)$ para $0 \le x \le 1$ (Veja Ex. **23**).

Solução: Considere a sucessão

$$S_n = \Big[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1+\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1+\frac{n}{n}\Big)\Big]^{1/n}.$$

Este é outro modo de obter o limite procurado. Tomando log de ambos os membros, resulta

$$\log S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n}\ \log\Big(1+\frac{r}{n}\Big).$$

Da definição de integral obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n}\ \log\Big(1+\frac{r}{n}\Big) = \int_0^1 \log(1+x)dx = \log\ \frac{4}{e}\cdot$$

Daí resulta $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 4/e\cdot$

Observação - $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x)\,dx = \int_0^{\log z} ze^z\,dz = \text{por partes} = \log\frac{4}{e}\,,$ com a mudança de variáveis $z = \log(1+x)$.

39. Considere

$$S_n = \frac{1}{n}\Big[\Big(\frac{4}{n}\Big)^2 + \Big(\frac{8}{n}\Big)^2 + \Big(\frac{12}{n}\Big)^2 + \dots + \Big(\frac{4n}{n}\Big)^2\Big].$$

Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\,.$

Solução: Obtém-se

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^3}\left(4^2+8^2+12^2+\cdots+(4n)^2\right)\\ &= \frac{16}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right) = \frac{16}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot \end{aligned}$$

Daí, resulta $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 16/3\cdot$

40. Seja $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e F uma primitiva de f. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(s)\,ds - F(x)\right), \quad \text{para} \quad a<x<b.$$

41. Seja $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Mostre que, se

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \beta^2-\alpha^2$$

para todo $a<\alpha<\beta<b$, então $f(x)=2x$. A recíproca vale.

Sugestão: Considere $\beta = x$ e aplique o teorema fundamental do Cálculo.

42. Calcule a derivada em relação a x da função

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\,dt, \quad x>0,$$

no ponto $x=\pi/4\cdot$

43. Calcule a derivada em relação a x da função $g(x) = \displaystyle\int_0^x \cos^7 \pi t\,dt$ no ponto $x=3$.

44. Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e $0 < \alpha < \beta < 1$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n \, f(x) = 0.$$

Sugestão: Aplique o teorema do valor intermediário para integral de Cauchy.

45. Determine $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que

$$\int_0^1 f(\alpha x)\, d\alpha = nf(x), \qquad \text{para todo} \quad 0 < x < 1.$$

Sugestão: Faça a mudança de variáveis $z - \alpha x$ e aplique o teorema fundamental do cálculo para obter $f = nf + nxf'$, e daí f.

46. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left| \begin{array}{llll} x & \text{se} & x & \text{irracional} \\ 0 & \text{se} & x & \text{racional.} \end{array} \right.$$

Mostre que f é contínua no zero mas não é derivável.

47. Seja $\Gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a *função gamma*, a qual é definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{n-1}\, dx.$$

- Mostre que a integral imprópria converge.
- Mostre que $\Gamma(1) = 1$.
- Integrando por partes deduza que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-2)$
- Calcule, pelas propriedades anteriores

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^5\, dx.$$

Mostrar que as propriedades anteriores valem se em vez de $\mathbb{N}$ considerar os números reais positivos.

48. Considere $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, com $0 < f(x) < M/x^{\alpha}$, $M > 0$ e $\alpha > 1$. Mostre que a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

49. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\,dt. \quad \text{Calcule} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}\cdot$$

Calcule

Sugestão: Aplique o teorema fundamental do cálculo, a regra de L'Hospital conclua que o limite é $1/2\cdot$

50. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com derivada contínua. Mostre que a sucessão $(\delta_n(n))$ definida por

$$\delta_n(n) = n\Big[f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - f(x)\Big]$$

converge para $f'(x)$. Considerando a mesma função f, mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\;[f(x+h) - f(x-h)] = 2f'(x).$$

51. Represente por $S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$ Mostre que

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1).$$

Sugestão: Considere a identidade $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$. Faça $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ e some membro a membro. Como calcular $S_3(n)$ e $S_4(n)$?

52. Considere uma função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

53. Considere a sucessão (P_n), sendo P_n definido por

$$P_n = \cos a \cdot \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2^2} \cdot \cdots \cdot \cos \frac{a}{2^n}\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Resumo da Solução: Sabe-se da trigonometria que

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \quad \text{ou seja} \quad \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 \operatorname{sen} x}\cdot$$

Atribuindo a x os valores a, $a/2$, $a/2^2, \ldots, 1/2^n$ e multiplicando-se membro a membro as igualdades resultantes, obtém-se

$$P_n = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2^{n+1} \operatorname{sen} \dfrac{a}{2^n}} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2a} \cdot \frac{\left(\dfrac{a}{2^n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2^n}\right)}\,,$$

cujo limite, quando $n \to \infty$, é $\operatorname{sen} 2a/2a \cdot$ Veja F. Frenet - *Recueil D'Exercices sur le Calcul Infinitesimal* - Gauthier Villars - 1949.

54. Seja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com derivada contínua. Determine φ, sendo $\varphi(0) = 1$ e

$$\int_0^x (t^2+1)\varphi'(t)\, dt = -2x\,\varphi(x) \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

55. Considere a sucessão

$$a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

para $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que o integrando é igual a um no ponto $x = 0$. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{é convergente.}$$

Sugestão: Observe que $a_{n+1} = -a_n$, com a mudança de variáveis $z = x - \pi$ na integral. Sendo a_n positiva ou negativa, $-a_n \leq a_n$. Portanto (a_n) é decrescente. Tem-se, também,

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x} < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{n\pi} = \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo (a_n) converge para zero e como conseqüência, a série alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. Isto implica a convergência da integral imprópria

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \cdot$$

Integrais Impróprias e Séries Numéricas

56. Será analisada a relação entre integrais impróprias de certas funções $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ e as séries numéricas. O resultado a seguir é atribuído a Mac Laurin (1742) e Cauchy.

- Considere $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva e decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$ resulta $f(x_1) \geq f(x_2)$. Mostra-se, a seguir, que uma condição necessária e suficiente para que a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)\,dx$ seja convergente é que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ o seja.

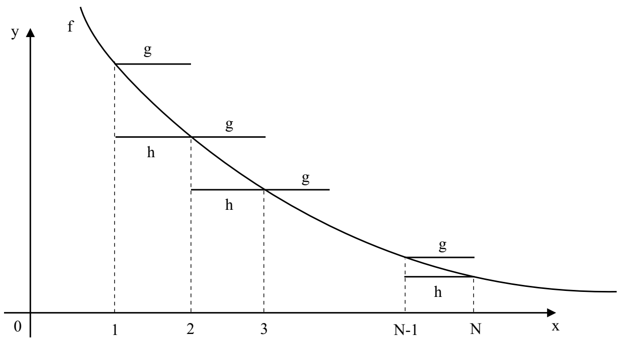


Fig. 1

Acompanhar pelo gráfico acima. De fato, serão consideradas as funções escadas

$$g(x) = f([x]) \;\text{ e }\; h(x) = f([x]+1), \;\text{ onde }\; [x] \;\text{ é a parte inteira de } x.$$

As funções g e h são constantes nos intervalos

$$[1,2),\ [2,3),\ \ldots,\ [N-1,N),\ \ldots$$

como pode ser constatado geometricamente na Figura 1 acima. No intervalo $n \leq x \leq n+1$, tem-se

$$g(x) = f([x]) = f(n) \quad \text{e} \quad h(x) = f([x]+1) = f(n+1).$$

Resulta que g e h são integráveis em todo intervalo $[1,b)$ com $b < \infty$. Sendo f decrescente obtém-se $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x em

$[1, \infty)$. Logo,

$$\int_1^N h(x)\,dx \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \int_1^N g(x)\,dx$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Assim, encontra-se

$$\int_1^N h(x)\,dx = \int_1^N f([x]+1)\,dx = \sum_{n=2}^{n} f(n),$$

que é a soma das áreas dos retângulos de altura $f(n)$ e base igual a um. De modo análogo obtém-se

$$\int_1^N g(x)\,dx = \int_1^N f([x])\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ obtém-se:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n). \qquad \text{(MC)}$$

Provando que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge se a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)\,dx$ convergir e reciprocamente.

Aplicações: **(i)** No estudo de séries analisou-se a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$, provando-se sua divergência. Por meio do argumento anterior de Mac Laurin-Cauchy, conclui-se este mesmo resultado, de modo simples. De fato, a função $f(x) = 1/x$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Logo,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \log N$$

é divergente. Resulta, portanto, que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ é divergente.

(ii) No caso da série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$, demonstrou-se, por meio de penosos cálculos, que ela converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha < 1$. Será obtido este resultado de modo simples por meio do critério de MacLaurin-Cauchy. De fato, para $f(x) = 1/x^{\alpha}$ tem-se

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} x^{-\alpha}\, dx = \lim_{N\to\infty} \Big(\frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1} \Big).$$

Este limite é $\frac{1}{\alpha-1}$, se $\alpha > 1$ e diverge, se $\alpha < 1$. Conseqüentemente, da desigualdade (MC), conclui-se que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha < 1$. Para $\alpha = 1$ diverge por (i).

(iii) Considere a progressão aritmética (a_n), com $a_n = a + nr$, $a > 0$ e $r > 0$ (veja Exercício **18**). Aplicando o critério de Mac Laurin-Cauchy, analise o comportamento da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/a_n^{\alpha}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Considere a função $f(x) = 1/(a + rx)^{\alpha}$ com $1 \leq x < \infty$, $a > 0$ e $r > 0$.

O método empregado neste complemento pode ser visto em: E. Haler-G. Wanner - *Analysis by Its History.* Springer NY 1997.

Continuando a comparação entre integrais impróprias e séries numéricas, recorde-se que se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então a sucessão (a_n) converge para zero. Se $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ converge não é verdade que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0$, em geral! O exemplo a seguir mostra que $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$

é convergente mas $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ é diferente de zero. De fato, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ o intervalo

$$\left(n - \frac{1}{(n+1)^2},\ n + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

centrado em n e de amplitude $2/(n+1)^2$ como mostra a abaixo.

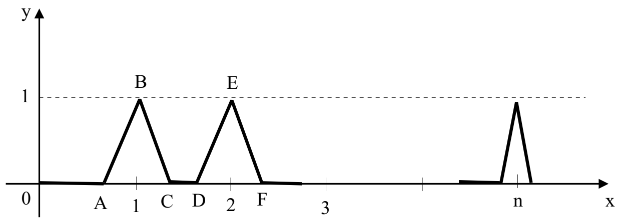


Fig. 2

A função $y = f(x)$ com $x > 0$ é a poligonal $ABCDEF\ldots$ desenhada na figura 2 acima. Os triângulos possuem altura igual a um e como base o segmento de comprimento $2/(n+1)^2$, cujo ponto médio da base é o número natural n, para $n = 1, 2, \ldots$. A área de um triângulo genérico, no ponto n, é $1/(n+1)^2 \cdot$ Logo, a soma das áreas dos triângulos que compõem a poligonal $y = f(x)$ é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2},$$

a qual é convergente. Portanto, para cada $\xi > 0$ tem-se

$$\int_1^{\xi} f(x)\, dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

e $f \geq 0$ é poligonal. Logo a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente. Entretanto $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ não é zero, pois a altura dos triângulos é constante igual a um. (G.H. Hardy - A Course of Pure Mathematics, Cambridge Univ. Press (1952), p. 159, London.)

Supondo-se uma hipótese adicional sobre a função, mostra-se que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Precisamente, supondo que uma função f e sua derivada f' sejam integraveis em $(0,\infty)$, então

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$,

(b) $L = 0$.

De fato, por hipótese, vale o teorema fundamental do cálculo. Portanto, dado $0 < x < \infty$, obtém-se

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)ds.$$

Sendo f' integrável em $(0,\infty)$, então existe o limite de f qundo $x \to \infty$, isto é

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \int_0^\infty f'(x)dx = L.$$

O que mostra a afirmação em (a).

A afirmação (b), prova-se por redução a uma contradição. Com efeito, suponha $L \neq 0$. Para fixar ideia, seja $L > 0$. Daí, para cada $\epsilon > 0$, existe $K_\epsilon > 0$ tal que

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon, \text{ para todo } x > K_\epsilon.$$

Tomando $\epsilon = L/2$, resulta $f(x) > L/2$ para todo $x > K_\epsilon$. Logo,

$$\int_{K_\epsilon}^x f(s)ds > \frac{L(x - K_\epsilon)}{2},$$

o que implica f não ser integrável em $(0, \infty)$. Isto contradiz a hipótese de f ser integrável. Portanto, $L = 0$.

Finalmente, observe que, se f e f' são integráveis em $(-\infty, +\infty)$, então, obtém-se de modo análogo que, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

7.0.1 Nota Histórica sobre Godfrey Hardy

Godfrey Harold Hardy (1877-1947), nascido em Granleigh na Inglaterra, foi aluno do *Trinily College* em 1896. Atuou como professor da *Oxford University* e visitou de 1928 a 1929, *Princeton University.* Em seu retorno à Inglaterra, ingressou como professor em *Cambridge University*, onde trabalhou até 1942, quando se aposentou. Contribuiu para a teoria analytica dos números, principalmente com S. Ramanujan, jovem matemático da India. Colaborou, também, com o matemático Inglês, J. L. Littlewood e G. Polya, entre outros, com os quais publicou, durante vários anos. Veja, por exemplo, G. H. Hardy, J. E. Littlewood & G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press (1952). Neste livro encontra-se a famosa desigualdade de Hardy-Litlewood, na página 187, desigualdade 259, a qual afirma: se u e u' pertencem a $L^2(0, \infty)$, então

$$\Big(\int_0^\infty [u'(x)]^2 dx\Big)^2 \leq 4\Big(\int_0^\infty [u(x)]^2 dx\Big)\Big(\int_0^\infty [u'(x)]^2 dx\Big),$$

exceto, quando $u = ay(bx)$, com $y = e^{-x/2}\text{sen}\,(x\text{sen}\gamma - \gamma)\,,\, \gamma = \pi/3$, a e b constantes. Neste caso tem-se a igualdade.

Seu livro dirigido ao ensino propedêutico é: G. H. Hardy - *A Course of Pure Mathematics,* Cambridge Univ. Press (1908), primeira edição.

Há, em português, o belo livro: G. H. Hardy - *Em Defesa de um Matemático,* Martins Fontes ed. São Paulo (2000), onde na primeira parte é relatado, por Love, parte de sua história e na segunda, depoimento do próprio Hardy.

57. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, existe ξ em $[a,b]$ tal que $|f(\xi)|$ é um valor máximo de f, isto é, $M = |f(\xi)|$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n \, dx} = \max_{a\le x\le b} |f(x)|.$$

Solução Resumida: Tem-se $|f(x)| \le M$ para todo $x \in [a,b]$. Daí, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n \, dx} \le M.$$

Sendo $M = |f(\xi)|$ máximo de f em $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $M - \varepsilon < f(x)$ para todo $\xi - \delta/2 < x < \xi + \delta/2 \cdot$ Logo

$$(M-\varepsilon)^n \, \delta \le \int_{\xi-\frac{\delta}{2}}^{\xi+\frac{\delta}{2}} |f(x)|^n \, dx \le \int_a^b |f(x)|^n \, dx.$$

Tomando a raiz n e o limite obtém-se para cada $\varepsilon > 0$

$$M - \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n \, dx} \le M.$$

58. Considere a função $f(x) = [x]$ com $x \in \mathbb{R}$. Mostre que em cada inteiro a derivada à direita é zero e à esquerda é $+\infty$.

59. Dada a função

$$f(x) = \left|\begin{array}{lll} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{se} & x \neq 0, \\ 0 & \text{se} & x = 0, \end{array}\right.$$

mostre que a derivada à direita do zero é zero e à esquerda é um.

60. Considere a função

$$f(x) = \left|\begin{array}{lll} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{se} & x \neq 0, \\ 0 & \text{se} & x = 0. \end{array}\right.$$

A derivada à esquerda do zero é $\pi/2$ e à direita é $-\pi/2\cdot$

61. Estude a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,e^{-n}$ pelo critério de Mac Laurin-Cauchy. Veja Exercício **56**.

62. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$ para $x > 0$. Considere a função

$$f(x) = \left|\begin{array}{lll} x^x & \text{se} & x > 0, \\ 1 & \text{se} & x = 0. \end{array}\right.$$

Estude a derivada de f à direita de $x_0 = 0$.

63. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Como sugestão aplique logaritmo.

64. Considere a função

$$f(x) = \left|\begin{array}{lll} x\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}} & \text{se} & x \notin \left\{0,\ \dfrac{1}{n\pi},\ \ n = \pm 1,\ \pm 3, \dots\right\} \\ 0 & \text{se} & x \in \left\{0,\ \dfrac{1}{n\pi},\ \ n = \pm 1,\ \pm 3, \dots\right\}. \end{array}\right.$$

Esta função é contínua, pois $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ e $\lim\limits_{x\to 1/n\pi} f(x) = f(1/n\pi)$. Constata-se que f não é derivável em um conjunto infinito, enumerável, de pontos de uma vizinhança do zero. De fato, para $x_0 = 0$ a derivada de f é dada pelo limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{1}{h}}\,,$$

que oscila entre $+1$ e -1 porque

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{1}{h}} \leq +1.$$

Calcula-se a derivada nos pontos $x_0 = \frac{1}{n\pi}$ com $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. De fato,

$$\frac{1}{h}\left[f\Big(\frac{1}{n\pi} + h\Big) - f\Big(\frac{1}{n\pi}\Big)\right] = \frac{1}{h}\left[f\Big(\frac{1 + n\pi h}{n\pi}\Big)\right] =$$

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1 + n\pi h}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{1 + n\pi h} \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{1 + n\pi h}}\right] =$$

$$\left(\frac{1 + n\pi h}{n\pi}\right)\left(\frac{1}{h} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{1 + n\pi h}\right)\left(\operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{1 + n\pi h}}\right).$$

Aplicando L'Hospital, obtém-se

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{1 + n\pi h} = -(n\pi)^2.$$

Resulta, portanto, que para o cálculo da derivada em $\frac{1}{n\pi}$ obtém-se:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f\Big(\frac{1+n\pi h}{n\pi}\Big) = -n\pi \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{1+n\pi h}} \,.$$

Note que, tomando $h = 1/n\pi$ encontra-se uma infinidade de pontos em uma vizinhança de $x_0 = 0$ onde o limite anterior não existe, pois oscila entre $-h\pi$ e $+n\pi$. Conclui-se que a função contínua f não possui derivada em uma coleção enumerável de pontos.

Observação - Os exemplos mais conhecidos de funções contínuas não deriváveis em um conjunto de pontos, envolvem uma série de funções e a noção de convergência uniforme. Destaca-se o primeiro exemplo dado por Weierstrass. Ele considerou a função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{n-1} \cos(a^{n-1}\pi x)$$

com $0 < b < 1$ e a um inteiro ímpar. A série converge uniformemente em qualquer intervalo da reta $\mathbb{R}$, logo sua soma f é contínua. Se $ab > 1 + 3\pi/2$ prova-se que f não é derivável em ponto algum. Consulte: *E.C. Titchmarsh, The Theory of Functions, Oxford University Press,* 1932, pp. 351-353. Outro exemplo elementar foi dado por Van Der Waerden, a saber. Considere a função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[10^{n-1}x]}{10^n} \,,$$

onde $[10^{n-1}x]$ é a parte inteira do número real $10^{n-1}x$. Novamente a convergência uniforme da série implica continuidade da f.

Entretanto f não é derivável. Consulte: F. Riesz and B. Sz Nagy -*Functional Analysis*, F. Ungar Pub. Co., NY, 1955, p. 4-5. Em ambos os exemplos emprega-se o teste de Weierstrass para concluir a convergência uniforme e consequente continuidade da função f dada por meio da soma da série.

O exemplo do texto não envolve convergência uniforme e não informa de modo preciso sobre continuidade e derivabilidade como Weierstrass e Van Der Waerden. Os pontos de não derivabilidade formam um conjunto enumerável. Todavia, é simples e pode ser ensinado nos primeiros passos da Análise Matemática. Ele foi proposto por Stoltz em seu livro *Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral*, 1893, Vol. I, p. 233. Encontra-se, também, em E. Pascal -*Exercizi Critici di Calcolo Differenziale e Integrale*, Ulrico Hoepli - Milano, 1909.

65. Determine a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e satisfazendo a equação $f(s+t) = f(s) + f(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Considere, inicialmente, os inteiros positivos, a seguir os negativos e finalmente os racionais. Encontra-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e a constante.

Observação - Uma função real com valores reais que satisfaz as condições: $f(s+t) = f(s) + f(t)$ e $f(\lambda s) = \lambda f(s)$ com $\lambda, s \in \mathbb{R}$, é denomina-se linear. Mostre que, se f é contínua, e satisfaz a condição $f(s+t) = f(s) + f(t)$, então f é linear.

66. Determine $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e positiva tal que

$$f(s+t) = f(s)\cdot f(t) \quad \text{para todo par} \quad s,\, t \in \mathbb{R}.$$

Sugestão: Sendo $f > 0$ aplica-se $\log_b$ em ambos os membros da identidade acima para obter: $\log_b f(s+t) = \log_b f(s) + \log_b f(t)$. Fazendo $\log_b f(t) = \varphi(t)$ resulta da igualdade anterior que $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$. Do Exercício **65** obtém-se $\varphi(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo a constante. Da definição de φ, resulta que $\log_b f(x) = ax$, isto é $f(x) = b^{ax}$. Tomando $b = e$, base Neperiana, resulta

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{ou} \quad f(x) = e^{x} \quad \text{para } a = 1.$$

67. Determine uma função $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(st) = f(s) + f(t)$.

Sugestão: Fazendo as mudanças de variáveis $s = a^{\xi}$ e $t = a^{\eta}$ para $a > 0$, obtém-se $f(a^{\xi}\, a^{\eta}) = f(a^{\xi}) + f(a^{\eta})$. Tomando $\varphi(\xi) = f(a^{\xi})$ resulta que $\varphi(\xi+\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$. Logo $\varphi(\xi) = A\xi$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e A constante. Assim, tem-se $\xi = \log_a s$ ou $\varphi(\xi) = A \log_a s$. Portanto, $\varphi(\xi) = f(a^{\xi}) = f(s)$, e conseqüentemente

$$f(s) = A \log_a s \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Note que se $a = e$ então $\varphi(s) = A \log s$.

Observação - Não se está definindo logaritmo nem exponencial. As equações funcionais caracterizam estas funções.

68. Demonstra-se que $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$.

Daí resulta que a função $x \to e^x$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pode ser obtida por meio de um limite de funções contínuas. De fato, obtém-se

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

No que se segue, demonstra-se que a função logarítmica $x \to \log x$ definida de $]0, \infty[$ em $\mathbb{R}$, também pode ser obtida por meio de um limite de uma sucessão de funções contínuas. De modo preciso, será provado que

$$\log x = \lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right)$$

para todo x real positivo. Com efeito, seja $f'(x) = a^x$ para $x \geq 0$ e $a > 1$, então f é crescente, contínua e $f(0) = 1$. Considerando-se $f(n)$ e $f(n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$, isto é, a^n e a^{n1}, vê-se que os pontos $(0, 1)$ e (n, a^n) estão no gráfico de f

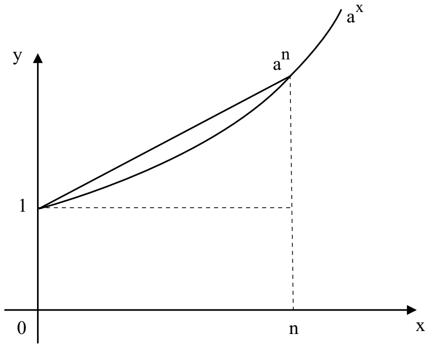


Fig. 1

e determinam uma corda neste gráfico cuja inclinação é $\text{tg}\ \theta_n = (a^n - 1)/n$, como se observa na figura 1 acima. Note que sendo $a > 1$ a função a^x é crescente. Analogamente, se os pontos $(0,1)$ e $(n+1, a^{n+1})$ estão sobre o gráfico de f, então obtém-se $\text{tg}\ \theta_{n+1} = (a^{n+1}-1)/(n+1)$, com $\text{tg}\ \theta_{n+1} > \text{tg}\ \theta_n$, pois a função é crescente. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\frac{a^n - 1}{n} < \frac{a^{n+1} - 1}{n+1}\,. \tag{1}$$

Considere a corda com extremos em (m, a^n) e $(n+1, a^{n+1})$, cuja inclinação $a^{n+1} - a^n$ é maior que $\text{tg}\ \theta_n$, isto é,

$$\frac{a^n - 1}{n} < a^n(a-1) \quad \text{com} \quad a > 1. \tag{2}$$

Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \quad \text{com} \quad a > 1.$$

Note que os termos dessa sucessão: $a-1$, $2\sqrt{a}-1$, $3\sqrt[3]{a}-1, \ldots$ são positivos. Além disso,

- (u_n) é decrescente, pois

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)\left(\sqrt[n+1]{a} - 1\right) - n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right).$$

Fazendo $a^{1/n(n+1)} = b$, obtém-se

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)(b^n - 1) - n(b^{n+1} - 1) < 0$$

pela desigualdade (1). O que conclui-se (u_n) decrescente.

- (u_n) é limitada inferiormente. De fato, seja $C = \sqrt[n]{a} > 1$. Da desigualdade (2) resulta

$$\frac{C^n - 1}{n} < C^n(C-1).$$

Sendo $C^n = a$, obtém-se

$$\frac{a-1}{n} < a\left(\sqrt[n]{a}-1\right) \quad \text{ou} \quad \frac{a-1}{a} < n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) < u_1 = a-1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (u_n) é decrescente e limitada inferiormente por $(a-1)/a\cdot$ Logo, convergente e, portanto, define uma função

$$\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$$

sendo $(a-1)/a < \varphi(a) < a-1$, com $a > 1$. A extensão da definição de φ, quando $0 < a < 1$ é dada por: sendo $0 < a < 1$, então $b = 1/a > 1$. Assim, $\sqrt[n]{b} = 1/\sqrt[n]{a} > 1$. Logo

$$u_n = n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{b}}-1\right) = \frac{n(1-\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}} > 0.$$

Tem-se

$$-u_n = \frac{n(1-\sqrt[n]{b}-1)}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{converge para} \quad \varphi(b) = \varphi(1/a),$$

pois $b > 1$ e $\sqrt[n]{b}$ converge para 1. Logo, para $0 < a < 1$, resulta que $\lim_{n\to\infty} u_n = -\varphi(1/a)$. Define-se $\varphi(a) = -\varphi(1/a)$ para $0 < a < 1$.

Para $a = 1$ e $u_n = 0$ com $n \in \mathbb{N}$. define-se $\varphi(1) = 0$. Portanto, φ é definida para todo real $x > 0$ por $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$. Prova-se que $\varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$, para todo a e b reais positivos. De fato,

$$\varphi(ab) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{ab}-1\right).$$

Sendo $\sqrt[n]{ab}-1 = (\sqrt[n]{a}-1)(\sqrt[n]{b}-1) + \sqrt[n]{a}-1 + \sqrt[n]{b}-1$ ou

$$n(\sqrt[n]{ab}-1) = n(\sqrt[n]{a}-1) + n(\sqrt[n]{b}-1) + n(\sqrt[n]{a}-1)(\sqrt[n]{b}-1)$$

obtém-se, tomando limite quando $n \to \infty$, que $\varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Sendo φ contínua, φ é a função logarítmica. Assim, obtém-se

$$\log x = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

porque a solução do Exercício **67** é única a menos de constante.

69. Considere a função homográfica

$$f(x) = \frac{3+2x}{2+x} \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sua restrição a $\mathbb{N}$ é a sucessão (u_n) definida por $u_n = (3+2n)/(2+n)\cdot$ Mostre que

$$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\,,$$

deduzindo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot$$

Sugestão: Considere $u_k - u_{k-1} = 1/(k+1)(k+2)$, e adicione de $k = 1$ a $k = n$ para obter o resultado.

70. Dada a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} k(m + ka - x)^2 \quad \text{com} \quad a > 0,$$

calcule o ponto de mínimo de f.

Resposta: $x = m + a(2n+1)/3\cdot$

71. Considere $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Defina a sucessão (f_n) do seguinte modo:

$$f_1(x) = f(x), \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(s)\, ds \ \text{ para } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ x \in [0,1].$$

(i) Mostre que f_n é contínua em $[0,1]$.

(ii) Integrando por partes, calcule $f_2,\ f_3$ em função de f.

(iii) Mostre, por indução, que

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x (x-s)^n\, f(s)\, ds.$$

72. Determine os valores de $t \in \mathbb{R}$ nos quais as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2t}$$

convergem simultaneamente.

73. Mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} k\, x^k = \frac{n\, x^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}\,.$$

Estude o limite quando $n \to \infty$.

Sugestão: Considere a progressão geométrica

$$P_n = x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Calcule a soma e derive membro a membro. Pode, também, ser provado por indução, dando mais trabalho técnico.

74. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f > 0$ e $\alpha > 0$.

(i) Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x s^{\alpha-1} f(s)\, ds$$

(i) Considere a função

$$y(x) = \left| \begin{array}{lll} \dfrac{1}{x^\alpha} \displaystyle\int_0^x s^{\alpha-1} f(s)\, ds & \text{se} & x > 0, \\ \dfrac{1}{\alpha} f(0) & \text{se} & x = 0. \end{array} \right.$$

Mostre que y é solução da equação

$$zy'(x) + \alpha y(x) = f(x).$$

G. Gilormini -*Mathématiques* - Masson - Paris 1981.

75. Considere a função $f(x) = \log(3^x - 1)$, definida para $x > 0$. Calcule

$$\int_1^2 \frac{dx}{1 - 3^{-x}} \,.$$

Sugestão: Derivando f, tem-se $f'(x) = \log 3/(1 - 3^x)$. Portanto, f é uma primitiva do integrando. Obtém-se para valor da integral $\log 2/\log 3 \cdot$

76. Considere a função $f(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ para $x \in [-1, 0) \cup (0, +1]$. Mostre que f não é derivável em $x_0 = 1$. (Encontra-se $-\infty$).

77. Considere a função $h(x) = \log f(x)$, sendo f a função do Exercício **76**. Calcule a derivada de h no ponto $x_0 = 1$.

Sugestão: Note que

$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \frac{\log f(x) - \log f(1)}{f(x)-f(1)} \cdot \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot$$

O limite do primeiro termo é 1, e do segundo é $-\infty$. Logo, não é derivável em $x_0 = 1$.

78. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $f \geq 0$. Se existir $a < c < b$ tal que $f(c) > 0$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Resumo da Solução: Sendo f contínua em $[a,b]$ e $f(c) > 0$ para $a < c < b$. Então, existe uma vizinhança $V_c = (c-\delta, c+\delta)$, para $\delta > 0$, contida em (a,b) tal que $f > 0$ em V_c (Por quê?). Logo,

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx > 0.$$

Sendo $f \geq 0$, obtém-se

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx > 0.$$

79. Considere a função

$$f(x) = \left| \begin{array}{llll} \sqrt{1-x^2} & \text{para} & 0 < x < 1 & \text{racional} \\ 1-x & \text{para} & 0 < x < 1 & \text{irracional.} \end{array} \right.$$

Verifique que

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} \cdot$$

80. Mostre que a função

$$f(x) = \left| \begin{array}{llll} \dfrac{1}{2^{n-1}} & \text{se} & \dfrac{1}{2^n} < x < \dfrac{1}{2^{n-1}} & \text{com} \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se} & x = 0 & \end{array} \right.$$

é integrável. Calcule sua integral.

Observação - A função f possui uma coleção infinita e enumerável de descontinuidades mas é integrável. Por quê?.

81. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = A_1\, e^{a_1 x} + A_2\, e^{a_2 x} + \cdots + A_n\, e^{a_n x}$$

onde n é um natural fixo e $a_1,\, a_2, \ldots, a_n$ são números reais dois a dois diferentes. Prove que uma condição necessária e suficiente para que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é que $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$.

Sugestão: Considere f e suas derivadas nulas para todo x. Encontra-se um sistema linear e homogêneo. O determinante do sistema reduz-se a um determinante de Wandermonde.

Observação - O determinante de Vandermonde foi por ele calculado para $n = 5$ e o caso geral por Cauchy quem propôs o Exercício **81**. Na linguagem dos dias de hoje, o exercício diz que a coleção finita de exponenciais é linearmente independente.

82. Aplicando o critério da integral, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{k+1}} \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{R},$$

converge, se $k > 0$ e diverge, se $k \leq 0$.

83. Considere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^{\mu}$ com μ um número real. Escreva a fórmula de Mac Laurin para f e analise o comportamento do resto R_n quando $n \to \infty$.

Solução: Derivando sucessivamente obtém-se para a derivada n-ésima $f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$ e $f^{(n)}(0) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)$. Assim, a fórmula de Mac Laurin é dada por:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \cdots +$$
$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}\,x^n + R_{n+1}(x).$$

Considerando a série de termo geral

$$u_n = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\cdot x^n$$

tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mu-n}{n+1}\right||x| = |x|.$$

Logo, se $|x| < 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente. Se $|x| > 1$ a série diverge, não tendo R_{n+1} com limite zero. Daí, afirma-se que: se $-1 < a < +1$, obtém-se $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ para todo $-1 < x < +1$. De fato, o resto de Cauchy é dado por

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n!}\,(1-\theta)^n\,\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(1+\theta x)^{\mu-n-1}$$

com $0 < \theta < 1$. Escreve-se sob a forma

$$R_{n+1} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{n!}\,x^{n+1}\cdot(1+\theta x)^{\mu-1}\Big(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\Big)^n.$$

Tem-se, assim, que

$$v_n = \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n)}{n!}\, x^{n+1}$$

é o termo geral de uma série absolutamente convergente para $|x| < 1$. Portanto, seu termo geral $v_n \to 0$ em $-1 < x < +1$. O fator $(1+\theta x)^{\mu-1}$ é limitado para $|x| < 1$, pois $|1+\theta x| < 2$. Tem-se $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$ se $-1 < x < +1$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ uniformemente em $-1 < x < +1$. Daí, obtém-se a série

$$(1+x)^\mu = 1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}\, x^2+\dots+\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\, x^n+\cdots$$

convergente em valor absoluto em $-1 < x < +1$. Logo, considerando $-x$ em lugar de x obtém-se

$$(1-x)^\mu = 1-\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}\, x^2+\dots+$$
$$(-1)^n\,\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}\, x^n+\cdots$$

que converge absolutamente em $-1 < x < 1$ e μ real.

84. Mostre que a função valor absoluto $t \to |t|$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, o conjunto dos números reais positivos, é limite uniforme de uma sucessão de polinômios em t.

Solução: De fato, pelo Exercício **83**, tomando $x = 1-t^2$ e $\mu = \frac{1}{2}$, obtém-se

$$|t| = \sqrt{1-(1-t^2)} = 1-\binom{1/2}{1}(1-t^2)+\binom{1/2}{2}(1-t^2)^2-\cdots,$$

convergente para $|1-t^2|<1,$ onde

$$\binom{\mu}{n} = \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} \quad \text{para} \quad \mu\in\mathbb{R} \quad \text{e} \quad \binom{0}{n}=1.$$

A série anterior converge para $-\sqrt{2}<t<+\sqrt{2}$. Resulta que se P_n é o polinômio

$$P_n(t) = 1-\binom{1/2}{1}(1-t^2)+\binom{1/2}{2}(1-t^2)^2+\dots+(-1)^n\binom{1/2}{n}(1-t^2)^n,$$

com $-\sqrt{2}<t<+\sqrt{2}$, conclui-se que para cada $\varepsilon>0$, existe $n_0=n_0(\varepsilon)$, tal que

$$\big||t|-P_n(t)\big|<\varepsilon \quad \text{para todo} \quad n>n_0 \ \text{ e } \ -\sqrt{2}<t<+\sqrt{2}.$$

Aproximação de Funções Contínuas por Poligonais

85. No presente complemento será descrito o processo de aproximação uniforme de funções contínuas em intervalos fechados por poligonais. Inicia-se, portanto, definindo a noção de função poligonal ou poligonal simplesmente. De fato, diz-se que uma função $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função afim, quando $f(x)=\alpha+\beta x$, com α, β pertencentes a $\mathbb{R}$. Quando $\alpha=0$ a função afim denomina-se função linear, ver Exercício **65**. Uma função $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ denomina-se uma poligonal, quando existe uma partição

$$a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$$

do intervalo fechado $[a,b]$, tal que f restrita a cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$ é uma função afim.

Proposição 1 - Suponha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e positiva. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma poligonal $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [a,b].$$

Demonstração: Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, ela é uniformemente contínua, veja Teorema 4.5 (*Heine-Cantor*), Parte 1. Resulta que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo par } s,\, t \in [a,b] \text{ com } |s-t| < \delta.$$

Considere $n \in \mathbb{N}$, com $n > (b-a)/\delta$ e a partição

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

definida pelos pontos $x_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Para esta partição, obtém-se

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \delta \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

A seguir constrói-se a poligonal $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, da Proposição 1. De fato, considere o segmento de reta com extremos nos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$ do gráfico de f para $k = 1,\, 2, \ldots, n$. O coeficiente angular da reta suporte deste segmento é

$$\operatorname{tg} \theta_{k-1} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \,.$$

Define-se a poligonal $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$p(t) = f(x_{k-1}) + (t - x_{k-1}) \operatorname{tg} \theta_{k-1} \quad \text{em} \quad x_k < t < x_k$$

com $k = 1, 2, \ldots n$. Daí, tem-se que $p(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ e $p(x_k) = f(x_k)$. Substituindo $\operatorname{tg} \theta_{k-1}$ por seu valor, resulta que

$$p(t) = f(x_{k-1}) \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}} + f(x_k) \frac{t - t_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

para todo $x_{k-1} < t < x_k$ e $k = 1, 2, \ldots, n$. Note que, tomando $\lambda_k = x_k - t/(x_k - x_{k-1})$ com $0 < \lambda_k < 1$ e

$$1 - \lambda_k = \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}},$$

resulta que $p(t)$ em $x_{k-1} < t < x_k$ é uma combinação convexa de $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$. Portanto, para $x_{k-1} < t < x_k$, $p(t)$ está compreendida entre $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$.

Verifica-se, a seguir, que a poligonal p, definida anteriormente, aproxima a função f nas condições exigidas na Proposição 1. De fato, $p(t)$ está entre $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ e $x_{k-1} < t < x_k$. Sendo f contínua, existe $x_{k-1} < s < x_k$ tal que $f(s) = p(t)$, cf. Teorema 43, Parte 1. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$|f(t) - p(t)| = |f(t) - f(s)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |t - s| < |x_k - x_{k-1}| < \delta.$$

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [a, b].$$

86. Os complementos anteriores serão empregados para demonstrar um resultado fundamental da Análise Matemática conhecido sob a denominação de Teorema de Aproximação de Weierstrass. Há várias demonstrações deste resultado. A que se segue, muito simples e bonita, deve-se a H. Lebesgue - *Sur l'approximation des fonctions* - Bull. de la Soc. Math. de France, 2$^{\text{è}}$ série t. XXII (1898).

Teorema de Weierstrass. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é limite uniforme em $[a,b]$ de uma sucessão de polinômios.

Demonstração: Sendo f contínua em $[a,b]$, é uniformente contínua. Logo, pelo Complemento **86**, é uniformemente aproximada em $[a,b]$ por uma poligonal p. Constrói-se p em $x_{k-1} < t < x_k$ obtendo-se

$$p(t) = f(x_{k-1}) + \operatorname{tg}\theta_{k-1}(t - x_{k-1})$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Ponha $\operatorname{tg}\theta_{k-1} = 2C_{k-1}$ e observe que

$$\frac{1}{2}\left[|t - x_{k-1}| + (t - x_{k-1})\right] = \left|\begin{array}{lll} t - x_{k-1} & \text{se} & x_{k-1} < t < x_k \\ 0 & \text{se} & t \geq x_k. \end{array}\right.$$

Portanto, a poligonal p escreve-se explicitamente sob a forma

$$p(t) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\Big(|t - x_{k-1}| + (t - x_{k-1})\Big)$$

que é a representação de Lebesgue da poligonal p. Fazendo $C = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$ obtém-se

$$p(t) = C + \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\Big(|t - x_{k-1}| + (t - x_{k-1})\Big)$$

para todo $t \in [a,b]$. Note que sendo f contínua no intervalo fechado $[a,b]$ não é restritivo admitir-se que f é positiva. Para demonstrar o teorema é suficiente provar a aproximação uniforme da função valor absoluto por polinômios. De fato, suponha que dado $\varepsilon > 0$ exista um polinômio $P_{k-1}(t)$ tal que

$$\Big| |t - x_{k-1}| - P_{k-1}(t) \Big| < \frac{\varepsilon}{n|\max C_k|} \quad \text{para} \quad a \le t \le b.$$

Daí obtém-se

$$\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \Big| |t - x_{k-1}| + (t - x_{k-1}) \Big| < \varepsilon \quad \text{para} \quad a \le t \le b$$

ou

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}|t - x_k| - \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} P_{k-1}(t) \Big| < \varepsilon \quad \text{para} \quad a \le t \le b.$$

Da expressão da poligonal p, obtendo-se

$$\Big| p(t) - C - \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}(t - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} P_{k-1}(t) \Big| < \varepsilon$$

para todo $a \le t \le b$. Assim, o polinômio

$$q(t) = C + \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}(t - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} P_{k-1}(t)$$

é tal que

$$|p(t) - q(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo,} \quad a \le t \le b.$$

Porém, da aproximação de f, por poligonal p, tem-se

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad a \le t \le b.$$

Destas duas desigualdades, resulta que

$$|f(t) - q(t)| < 2\varepsilon, \quad \text{para todo} \quad a \le t \le b,$$

obtendo-se a aproximação uniforme da f em $[a, b]$ por polinômios.

Resta demonstrar que $|t - x_k|$ é aproximada uniformemente por polinômios para $a \le t \le b$. Com efeito, Quando $x_k = a$ ou $x = b$ tem-se os polinômios $t - a$ e $t - b$, nada a demonstrar. Suponha $a < x_k < b$ e considere a mudança de variáveis $s = (t - x_k)/(b - a) \cdot$ Quando $a < t < b$, resulta $-1 < s < +1$. Logo é suficiente provar que a função $s \to |s|$ é uniformemente aproximada por polinômio em cada intervalo fechado contido em $(-1, +1)$. Este resultado foi provado no Exercício **84**.

A demonstração acima é uma adaptação das idéias contidas em J. Abdelhay - *Curso de Análise Matemática*, Vol. III, Editora Científica, Rio de Janeiro, RJ (1955), p. 178-180.

...“o número π, o qual, embora irracional

para as mentes sublunares”...

(Umberto Ecco)

87. No Capítulo 1 da Parte 1 foi estudado o método de isoperímetros para definir o número π, por meio do corte de Dedekind. Consulte, também, Exercício **6**. No que se segue, transcreve-se uma demonstração simples de que π é irracional. Ela é devida a Ivan Niven, publicada no Buletin do AMS, Vol. 53, N$^{\underline{o}}$ 6, p. 509, June 1947. (Autorizada a publicação neste livro - AMS - 2003).

Suponha que $\pi = a/b$, quociente de inteiros positivos. Cansidera-se os polinômios

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$
$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots - (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

sendo $f^{(j)}(x)$ a j-ésima derivada de f calculada em x e o inteiro positivo n será especificado posteriormente. Desde que $n!f(x)$ possui coeficientes inteiros e termos em x de graus não menores que n, $f(x)$ e suas derivadas $f^{(j)}(x)$ possuem valores inteiros em $x = 0$, e também, para $x = a/b = \pi$ sendo $f(x) = f\,(a/b - x)$. Por cálculos simples, obtém-se

$$\frac{d}{dt}\big\{F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x\big\} = F''(x)\operatorname{sen} x + F(x)\operatorname{sen} x = f(x)\operatorname{sen} x,$$

e

$$\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} x\,dx = \Big[F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x\Big]_0^\pi = F(\pi) + F(0). \quad (1)$$

Note que $F(\pi) + F(0)$ é um *inteiro* desde que $f^{(j)}(\pi)$ e $f^{(j)}(0)$ são inteiros. Porém, para $0 < x < \pi$ tem-se

$$0 < f(x)\operatorname{sen} x < \frac{\pi^n a^n}{n!}\cdot$$

Logo a integral (1) é positiva e arbitrariamente pequena para n suficientemente grande. Resulta que (1) é falsa e a hipótese que π é racional também é falsa.

88. Sejam a e b reais positivos. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/m} + b^{1/m}}{2}\right)^m = \sqrt{ab}, \quad \text{onde} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Solução: Fazendo a mudança de variáveis $u = \left(a^{1/m} + b^{1/m}\right)\Big/2$ deve-se provar que

$$\lim_{m\to\infty} u^m = \sqrt{ab}.$$

De fato, note que

$$u^m = \left[(1+u-1)^{1/(u-1)}\right]^{m(u-1)} \quad \text{e} \quad \lim_{m\to\infty}(u-1) = 0.$$

Logo, $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+u-1\right)^{1/(u-1)} = e$. Resta apenas calcular o limite: $\lim\limits_{m\to\infty}(u-1)m$. Aplicando o teorema do valor médio às funções $x \to a^x$ e $x \to b^x$ em $[0, x)$ que

$$a^x = 1 + (a^{\theta x}\,\log a)x \quad \text{e} \quad b^x = 1 + (b^{\theta x}\,\log b)x,$$

com $0 < \theta < 1$ representando duas diferentes constantes. Calculando em $x = 1/m$, obtém-se

$$a^{1/m} = 1 + \left(a^{\theta/m}\,\log a\right)\frac{1}{m} \quad \text{e} \quad b^{1/m} = 1 + \left(b^{\theta/m}\,\log b\right)\frac{1}{m}\cdot$$

Daí resulta

$$\left(\frac{a^{1/m} + b^{1/m}}{2} - 1\right)m = \frac{1}{2}\left(a^{\theta/m}\,\log a + b^{\theta/m}\,\log b\right).$$

Logo,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{a^{1/m} + b^{1/m}}{2} - 1\right)m = \log\sqrt{ab}.$$

Portanto,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{a^{1/m} + b^{1/m}}{2}\right)^m = e^{\log\sqrt{ab}.} = \sqrt{ab}.$$

89. Considere uma série de termos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Quando aplica-se o critério de Cauchy e obtém-se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ nada pode ser dito sobre o comportamento da série. Considere a sucessão (α_n) definida por

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n} \quad \text{ou} \quad \alpha_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1.$$

Encontra-se um novo critério de convergência, o *Critério de Raabe-Duhamel* afirmando que:

- Se $n\alpha_n = n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) \geq k > 1$ então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.
- Se $n\alpha_n = n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) \leq 1$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Note que o critério apoia-se na sucessão $\mathbb{N}$ dos naturais, isto é, (n). De modo geral considera-se uma sucessão (λ_n) de números reais positivos e obtém-se o *Critério de Kummer* que afirma:

- Se $\lambda_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - \lambda_{n+1} \geq \delta > 0$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.
- Se $\lambda_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - \lambda_{n+1} < 0$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge, então a série

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Demonstra-se o Critério de Kummer:

- Se $\lambda_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \lambda_{n+1} \geq \delta > 0$, então

$$\lambda_n u_n - \lambda_{n+1} u_{n+1} \geq \delta u_{n+1}\,. \tag{1}$$

Daí resulta que $0 < \lambda_{n+1}u_{n+1} < \lambda_n u_n$ é decrescente e limitada inferiormente, logo $(\lambda_n u_n)$ é convergente. Note que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_n u_n - \lambda_{n+1}u_{n+1}) = \lambda_1 a_1 - \lambda_{n+1}a_{n+1}\,.$$

Da convergência de $(\lambda_n u_n)$ resulta a convergência das reduzidas (S_n) e portanto a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n u_n - \lambda_{n+1}u_{n+1})$$

é convergente. De (1) obtém-se que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente, pois δ não depende de n.

- Suponha $\lambda_n u_n/u_{n+1} - \lambda_{n+1} < 0$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ divergente, então $(\lambda_n u_n)$ é decrescente, mas com termos positivos. Seja a tal que $a < \lambda_n u_n$, isto é, $u_n > a/\lambda_n \cdot$ Resulta que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge porque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ diverge.

Note que o Critério de Raabe-Duhamel resulta do Critério de Kummer, considerando-se $\lambda_n = n$. O critério de Kummer não é muito prático pois depende da escolha da sucessão (λ_n). Assim, emprega-se, com freqüência, o de Raabe-Duhamel quando falha o de Cauchy, ou da razão. Na prática considera-se o limite quando $n \to \infty$ que é equivalente às limitações exigidas.

Exemplos: (1) Estude a convergência da série de termo geral

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}\,.$$

Obtém-se $n(u_n/u_{n+1} - 1) = (3n+2)/[(2n+1) - 1] = n/(2n+1) \cdot$ O limite é $1/2 \cdot$ A série diverge pois o limite é menor que 1.

(2) A série de Dirichlet de termo geral $u_n = 1/n^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ foi estudado com o teste da integral de Mac Laurin-Cauchy e por cálculos direto para obter a reduzida de ordem n. Com o critério de Raabe-Duhamel, obtém-se

$$n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) = n\bigg(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\bigg) = n\Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\alpha - 1\Big).$$

Note que

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}\frac{1}{n} + \binom{\alpha}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(u_n/u_{n+1} - 1) = \alpha$. Assim, se $\alpha > 1$ a série converge e $\alpha \leq 1$ diverge.

(3) Considere a série de termo geral $u_n = n!/[(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)] \cdot$ Para quais λ a série converge?

(4) Considere a série de termo geral $u_n = e^{-(1+1/2+\cdots+1/n)}/n^\alpha$. Converge para $\alpha > 0$ e diverge para $\alpha \leq 0$.

Sugestão: Aplique o Critério de Raabe-Duhamel e desenvolva $e^{1/(n+1)}$ e $\big(1 + 1/n\big)^\alpha$ fazendo os produtos dos primeiros termos.

Evolução do Conceito de Integral - Henri Lebesgue (1875-1941)

90. No Capítulo 6 foram analisados os conceitos de integral segundo Cauchy para funções contínuas e de Riemann-Darboux para funções limitadas. Note que é fundamental, neste contexto, a relação entre os conceitos de integral e derivada. De modo preciso, as condições sobre a função f e sua derivada para que seja válida a fórmula de Newton-Leibniz, ou teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Do que foi visto no Capítulo 6, Parte 1, deduz-se que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável com derivada f' contínua em $[a,b]$ tem-se

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Este resultado é devido a Cauchy, com sua noção de integral para funções contínuas em intervalo fechado.

O conceito de integral de Riemann-Darboux supõe $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. A fórmula de Newton-Leibniz vale quando $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for integrável a Riemann-Darboux, derivável, com derivada f' integrável no mesmo sentido em $[a,b]$. Não é verdade que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, integrável à Riemann-Darboux e derivável, com derivada f' limitada seja integrável à Riemann-Darboux. Veja um exemplo em Russell A. Gordon - *The integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, AMS, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 4 (1994) p. 35-36.

Quando $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável à Riemann-Darboux, derivável com derivada, f' integrável no mesmo sentido em $[a,b]$, vale a fórmula de Newton-Leibniz, a saber

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Realmente, considerando uma partição P de $[a, b]$ escreve-se

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Sendo f' integrável, tomando-se limite quando a amplitude máxima de P tende para zero resulta

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx.$$

Em 1901 Henri Lebesgue publicou uma nota em "C.R. Acad. Sci. Paris 132 (1901), pp. 86-88" na qual propõe um novo conceito de integral, contendo os de Cauchy, Riemann-Darboux como casos particulares e eliminando várias deficiências destes conceitos. A fórmula de Newton-Leibniz é válida com as idéias de Lebesgue em contexto mais geral.

Em 2001 completou um século da extraordinária criação de Lebesgue. Ela penetrou no ensino da Análise Matemática, fazendo parte de todos os programas de formação em Matemática, sob a denominação de *Medida e Integração*. Aconselha-se a leitura do artigo comemorativo de: Jean Michael BONY, Gustave CHOQUET et Gilles LEBEAU - *Le centenaire de l'integral de Lebesgue*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I (2001), p. 85-90, commentaire de Ph. G. Ciarlet et B. Malgrange.

A seguir, será feita uma análise suscinta da idéia de Lebesgue. Ele observou que no caso $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e MONÓTONA, com m e M sendo o ínfimo e supremo de f em $[a, b]$, a toda partição em intervalos abertos de $[m, M]$ corresponde uma partição em intervalos abertos de $[a,b]$. De modo preciso, a qualquer partição P de $[m,M]$ por meio dos pontos

$$m = y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = M,$$

corresponde uma partição P de $[a,b]$ em intervalo abertos dada por

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

sendo

$$E_k = (x_{k-1}, x_k) = \{x \in [a,b];\ y_{k-1} < f(x) < y_k\}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Veja figura 1 abaixo para o caso em que f é crescente em $[a,b]$.

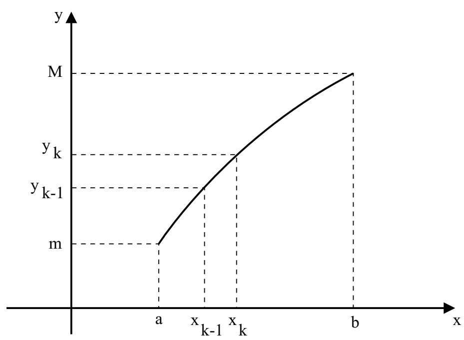


Fig. 1

Resulta que, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for monótona, será indiferente considerar partições P de $[a,b]$ ou $[m,M]$ para definir as somas de Riemann-Darboux

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \quad \text{e} \quad S = \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k - x_{k-1}).$$

Suponha que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ não mais seja monótona, porém limitada com m e M ínfimo e supremo de f em $[a,b]$. Neste caso, os conjuntos

$$E_k = \{x \in [a,b];\ y_{k-1} < f(x) < y_k\}\,,$$

não são necessariamente intervalos abertos como no caso monótono. Veja figura 2 abaixo para um caso simples.

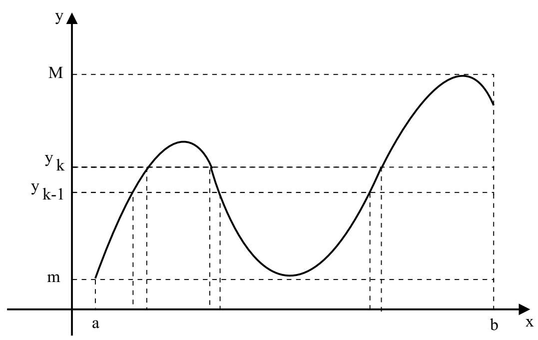


Fig. 2

Examinando a figura acima observa-se que E_k , k genérico, não é um intervalo aberto mas sim a união de três intervalos abertos. Assim, quando f oscila bastante no intervalo $[a,b]$ os conjuntos E_k diferem muito de uniões finitas de intervalos abertos. Todavia, como observa Lebesgue op. cit., definindo-se um processo para medir os conjuntos lineares E_k , isto é, um processo que permita atribuir aos E_k números positivos $\mu(E_k)$, correspondentes a suas medidas, é possível definir as somas s e S como no caso monótono. De fato, se P é uma partição de $[m, M]$ em intervalos abertos (y_{k-1}, y_k), define-se

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\, \mu(E_k) \quad \text{e} \quad S = \sum_{k=1}^{n} y_k\, \mu(E_k).$$

Resta portanto, caracterizar as funções limitadas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que aos conjuntos $E_k = \{x \in [a,b];\, y_{k-1} < f(x) < y_k\}$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, seja atribuída uma medida $\mu(E_k)$. Os conjuntos lineares $E \subset [a,b]$ para os quais atribui-se uma medida $\mu(E)$, Lebesgue denominou conjuntos mensuráveis.

Assim, escolheu as funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que para todo par $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$, o conjunto

$$E = \{x \in [a,b];\; \alpha < f(x) < \beta\}$$

seja mensurável. Uma tal função denominou função mensurável em $[a,b]$. Deste modo Lebesgue considerou as funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitadas, mensuráveis e as somas

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\, \mu(E_k) \quad \text{e} \quad S = \sum_{k=1}^{n} y_k\, \mu(E_k),$$

correspondentes a partições P de $[m, M]$. Demonstrou que quando a amplitude máxima de P converge para zero, se f é limitada e mensurável, as somas s e S convergem para um número $\mathcal{L}$ ao qual denominou a integral de f em $[a,b]$. A este número denomina-se nos dias de hoje, a integral de Lebesgue de $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e mensurável. Representa-se o número $\mathcal{L}$ por

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dada a definição de integral, Lebesgue ficou devendo a definição de conjunto mensurável. Para esta definição procedeu como se segue: considera-se $E \subset [a, b]$ um subconjunto e $(\alpha_k, \beta_k) \subset (a, b)$, para $k \in \mathbb{N}$, subintervalos tais que $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$. A cada união de (α_k, β_k) corresponde o número positivo, soma da série convergente $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k)$. Quando varia a sucessão de subintervalos $(\alpha_k, \beta_k) \subset (a, b)$, obtém-se um conjunto de números positivos, formado pelas somas $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k)$. Ao ínfimo deste conjunto denomina-se medida de E e representa-se por $\mu(E)$. Se E^c é o complemento de E relativamente ao intervalo $[a, b]$, define-se, do mesmo modo, $\mu(E^c)$. Define-se $\mu((a, b)) = b - a$. Diz-se que $E \subset [a, b]$ é mensurável quando

$$\mu(E) + \mu(E^c) = b - a.$$

Concluindo: considerando-se as partições P de $[m, M]$ para $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e mensurável resulta que os E_k são mensuráveis e a definição de integral de Lebesgue é perfeita. Demonstra-se que a integral de Lebesgue contém as de Riemann-Darboux e Cauchy.

A integral de Lebesgue permite reformular vários resultados da Análise Matemática, de modo mais simples e para uma classe mais ampla de funções. Por exemplo, convergência e integração de sucessões de funções, convergência de séries de Fourier, reformulação do teorema de existência para sistemas diferenciais, definição da noção de derivada fraca de Sobolev e distribuições de Schwarz etc. Note que a análise criada por Lebesgue examina o comportamento das funções a menos de conjuntos de medida nula onde elas podem não ter um bom comportamento.

A seguir examina-se a fórmula de Newton-Leibniz com a integral de Lebesgue.

- Lebesgue demonstrou que, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é LIMITADA, MENSURÁVEL com derivada f' LIMITADA, então f' é integrável e vale a fórmula de Newton-Leibniz

$$f(b) - f(a) = (\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Note que tudo se passa a menos de um conjunto de medida nula. Resumo da demonstração. De fato, inicialmente estende-se f ao intervalo $[a, b+1]$ definindo-se

$$f(x) = f(b) + (x-b)f'(b) \quad \text{em} \quad [b, b+1].$$

Logo, f é contínua e possui derivada limitada em $[a, b+1]$. Considerando a sucessão

$$\varphi_n(x) = n\Big[f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - f(x)\Big] \quad \text{com} \quad a < x < b,$$

resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x). \tag{1}$$

As φ_n são mensuráveis pois f é contínua, e toda função contínua é mensurável. Logo f' é mensurável, por ser limite de mensuráveis (Lebesgue). Sendo f' limitada, por hipótese, então é integrável à Lebesgue. Do teorema do valor intermediário de Cauchy obtém-se

$$\varphi_n(x) = n\Big[f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - f(x)\Big] = f'\Big(x + \frac{\theta}{n}\Big) \quad \text{para} \quad 0 < \theta < 1.$$

Sendo f' limitada, por hipótese, resulta que a sucessão (φ_n) é limitada. Daí, pelo teorema da convergência limitada de Lebesgue obtém-se

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Aplicando o teorema do valor intermediário a integral de f resulta

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx &= n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx \\ &= f\Big(b+\frac{\theta'}{n}\Big) - f\Big(a+\frac{\theta''}{n}\Big), \end{aligned}$$

com θ' e θ'' em $(0,1)$. Da continuidade da f, tomando limite quando $n\to\infty$ obtém-se

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

que é a fórmula de Newton-Leibniz segundo Lebesgue.

91. No Complemento **67** resolveu-se a equação funcional $f(st) = f(s) + f(t)$ para funções contínuas positivas. Encontrou-se entre as soluções a função logaritmo Neperiano $f(s) = \log s$. No presente complemento, deseja-se uma representação desta solução supondo-se que a função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ seja contínua, derivável com derivada não nula. De fato, derivando em relação a t e a s obtém-se

$$tf'(ts) = f'(s) \quad \text{e} \quad sf'(ts) = f'(t).$$

Sendo $f' \neq 0$ em todo ponto, obtém-se $tf'(t) = sf'(s)$ para todo t, $s \in \mathbb{R}^+$, logo $sf'(s) = c$ onde c é uma constante. Assim integrando de 1 a $t > 0$ obtém-se

$$f(t) = \int_1^t \frac{ds}{s} \quad \text{quando} \quad c = 1.$$

Note que $f(1) = 0$, decorrente da equação funcional, fazendo $t = 1$.

Portanto, obtém-se uma representação integral da solução derivável de $f(ts) = f(t) + f(s)$ dada por

$$\log t = \int_1^t \frac{ds}{s} \quad \text{para} \quad t > 0. \tag{1}$$

Observe que no Complemento **68** representou-se a solução contínua por intermédio do limite a uma sucessão de funções contínuas, isto é,

$$\log t = \lim_{n \to \infty} n\Big(\sqrt[n]{t} - 1 \Big).$$

A representação integral pode ser vista em: Aldo Finzi, *Logaritmi - Enciclopedia della Matematiche Elementari e Complementi* - Vol. I, Parte I, Hoepli Ed. 1956. Veja, também, em Felix Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Dover Publications.

Interpretação Geométrica: Considere o gráfico da função $x \to 1/x$ de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, a qual representa uma hipérbole referida às assíntotas, como mostra a figura 1 a seguir. Observando tal figura deduz-se que da representação integral de $\log t$, em (1), é área hachuriada.

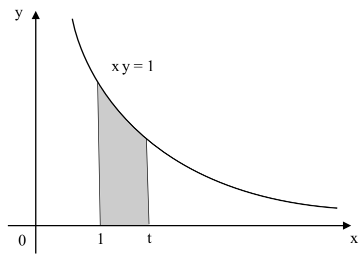


Fig. 1

Por esta razão o logaritmo Neperiano é também denominado hiperbólico. As propriedades da função logarítmica podem ser deduzidas de sua representação integral. Sendo definida somente para os números reais positivos deduz-se, do teorema fundamental do cálculo que

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x > 0,$$

a qual pode ser obtida diretamente da definição. De fato, sendo $1 < x < t$ ou $0 < t < x < 1$, deduz-se que $1 > 1/x > 1/t$ e integrando de 1 a t relativamente a x, resulta

$$\frac{t-1}{t} < \log t < t - 1.$$

Cosiderando $t = (x+h)/x$ e dividindo por $h > 0$, obtém-se

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\log(x+h) - \log x}{h} < \frac{1}{x}\cdot$$

Tomando limite quando $h \to 0$, obtém-se a derivada,

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \quad \text{com} \quad x > 0.$$

aqual é positiva. Logo, $\log x$ é crescente e seu gráfico é dado por

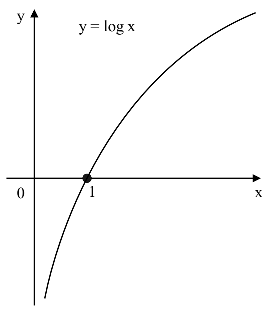


Fig. 2

Base de Logaritmos: Considere a hipérbole $y = 1/x$ com $x > 0$, cujo gráfico está esboçado na figura 3 abaixo. Toma-se a decomposição D de $[1, t)$ dada por

$$1 \leq t^{1/n} < t^{2/n} < \cdots < t^{(n-1)/n} < t^{n/n}.$$

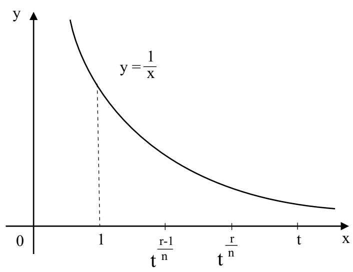


Fig. 3

Daí resulta que $t^{-(r-1)/n}$ e $t^{-r/n}$ são o supremo e o ínfimo de $y = 1/x$ no intervalo com estes extremos. As somas de Darboux inferior s_D e superior S_D são dadas por

$$s_D = \sum_{r=1}^{n} t^{-r/n} \left(t^{r/n} - t^{r-1/n} \right)$$

e

$$S_D = \sum_{r=1}^{n} t^{-(r-1)/n} \left(t^{r/n} - t^{(r-1)/n} \right).$$

Desenvolvendo os cálculos obtém-se

$$s_D = \sum_{r=1}^{n} \left(1 - t^{-1/n} \right) = n \left(1 - t^{1/n} \right)$$

e

$$S_D = \sum_{r=1}^{n} \left(t^{1/n} - 1 \right) = n \left(t^{1/n} - 1 \right).$$

Sendo, para cada D, $s_D < \int_1^t \frac{dx}{x} < S_D$, obtém-se a desigualdade

$$n \left(1 - t^{-1/n} \right) < \log t < n \left(t^{1/n} - 1 \right). \tag{2}$$

Dividindo ambos membros por n e examinando separadamente os termos da desigualdade (2) resulta

$$\left(1 + \frac{\log t}{n} \right)^n < t < \left(1 - \frac{\log t}{n} \right)^{-n}. \tag{3}$$

A solução da equação $\log t = 1$ é única, pois a função é crescente em $(0, \infty)$. A esta solução denomina-se base do logaritmo e representa-se pelo número e, o qual foi estudado na Parte 1. Retornando à desigualdade (3), sendo $t = e$ e $\log e = 1$, obtém-se

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n}.$$

Daí resulta, uma vez mais, que

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Mostre que, de fato, $f(t) = \int_1^t ds/s$ é solução da equação funcional do exercício **67**. Para isto, suponha $a < b$ e em $f(b)$ faça a mudança de variáveis $t = as$.

Desigualdades Notáveis

92. Seja $x0y$ um sistema cartesiano ortogonal e $y = x^\alpha$ uma função para $x \geq 0$ e $\alpha > 0$. A derivada $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ é positiva para $\alpha > 0$. Logo a função é crescente para todo $x \geq 0$ e está representada graficamente na figura 1 abaixo. Assim, possui uma inversa $x = y^{1/\alpha}$.

Considere $\xi > 0$ no eixo dos x, $\eta > 0$ no eixo dos y e as paralelas aos eixos por ξ e η como mostra-se na figura 1. Obtém-se duas figuras com áreas S_1 e S_2 dadas por

$$S_1 = \int_0^\xi x^\alpha \, dx = \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{e} \quad S_2 = \int_0^\eta y^{1/\alpha} \, dy = \frac{\eta^{1/\alpha+1}}{1/\alpha+1}\,.$$

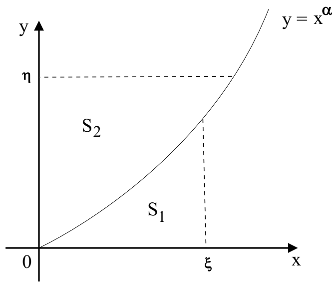


Fig. 1

Note que $\xi\eta$ é a área do retângulo de base ξ e altura η. Assim,

$$S_1 + S_2 \geq \xi\eta \quad \text{ocorrendo a igualdade quando} \quad \eta = \xi^\alpha.$$

Portanto, resulta que

$$\xi\eta \leq \frac{\xi^\alpha}{\alpha+1} + \frac{\eta^{1/(\alpha+1)}}{1/(\alpha+1)}\,.$$

Definindo $p = \alpha + 1$ e $q = 1/(\alpha+1)$ tem-se $1/p + 1/q = 1,$ sendo p e q denominados números conjugados . Note que $\alpha > 0$ implica $p > 1$ e $q > 1$. Logo, para $\xi,\ \eta$ reais positivos e p e q conjugados obtém-se

$$\xi\eta \leq \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q},$$

a qual é denominada Desigualdade de Hölder.

Aplicações: 1. Considerou-se $\ell^2(\mathbb{N})$, o espaço das sucessões $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ é convergente (Parte 1, Cap. 3).

No presente complemento considera-se $\ell^p(\mathbb{N})$ para $p > 1$, o espaço das sucessões $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ seja convergente. é claro que tais sucessões existem. Por exemplo, $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a $\ell^p(\mathbb{N})$ para $p > 1$, pois $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge (Parte 1, Cap. 3).

Dados $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ e $y \in \ell^q(\mathbb{N})$, com p e q conjugados, isto é, $p > 1$ e $1/p + 1/q = 1$, considere os números reais positivos

$$\xi = \frac{|\xi_n|}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{|\eta_n|}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q\right)^{1/q}}\,.$$

Da desigualdade de Hölder, obtém-se

$$\frac{|\xi_n|\,|\eta_n|}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\Big)^{1/q}} \leq \frac{|\xi_n|^p}{p\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\Big)} + \frac{|\eta_n|^q}{q\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\Big)}\,.$$

Adicionando-se sobre $\mathbb{N}$ resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\,\eta_n| \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\Big)^{1/q}.$$

Esta é também denominada desigualdade de Hölder em $\ell^p(\mathbb{N})$ para $p>1$. Em particular, quando $p=2$ resulta $q=2$ e a desigualdade de Hölder reduz-se a

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\,\eta_n| \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\Big)^{1/2}$$

a qual é válida em $\ell^2(\mathbb{N})$ e é denominada desigualdade de Cauchy .

2. As desigualdades anteriores referem-se a sucessões, isto é, funções $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$. A analisar dessas desigualdades para o caso de funções reais $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, é feita substituindo o somatório pela integral. Assim, em vez de $\ell^p(\mathbb{N})$ com $p>1$ considera-se $L^p(0,1)$, o qual é constituído das funções $u\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ tais que a integral $\int_0^1|u(t)|^p\,dt$ exista. Portanto, seja $u\in L^p(0,1)$, $v\in L^q(0,1)$ com $1/p+1/q=1$ para $p>1$ e considerando os números reais positivos

$$\xi = \frac{|u(t)|}{\Big(\displaystyle\int_0^1|u(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}} \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{|v(t)|}{\Big(\displaystyle\int_0^1|v(t)|^q\,dt\Big)^{1/q}}\,,$$

obtém-se pela desigualdade de Hölder que

$$\frac{|u(t)|\,|v(t)|}{\Big(\displaystyle\int_0^1 |u(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}\Big(\displaystyle\int_0^1 |v(t)|^q\,dt\Big)^{1/q}} \leq \frac{|u(t)|^p}{p\displaystyle\int_0^1 |u(t)|^p\,dt} + \frac{|v(t)|^q}{q\displaystyle\int_0^1 |v(t)|^q\,dt}\,.$$

Raciocinando como no caso $\ell^p(\mathbb{N})$ e integrando ambos os membros de 0 a 1 obtém-se

$$\int_0^1 |u(t)v(t)|\,dt \leq \Big(\int_0^1 |u(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}\Big(\int_0^1 |v(t)|^q\,dt\Big)^{1/q},$$

a qual é denominada desigualdade de Hölder para $L^p(0,1)$. Quando $p = 2$ obtém-se $L^2(0,1)$ e a desigualdade de Hölder se reduz a

$$\int_0^1 |u(t)v(t)|\,dt \leq \Big(\int_0^1 |u(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 |v(t)|^2\,dt\Big)^{1/2},$$

sendo denominada desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções do $L^2(0,1)$.

3. Sendo os números p e q com $p > 1$ conjugados, é habitual dizer que $\ell^q(\mathbb{N})$ e $L^q(0,1)$ são, respectivamente, os conjugados de $\ell^p(\mathbb{N})$ e $L^p(0,1)$. As desigualdades anteriores dizem respeito ao produto de objetos pertencentes aos conjuntos, isto é, $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ e $y \in \ell^q(\mathbb{N})$ ou $u \in L^p(0,1)$ e $v \in L^q(0,1)$. A seguir investiga-se desigualdades referentes à soma de objetos de $\ell^p(\mathbb{N})$ e $L^p(0,1)$. Inicia-se com o caso discreto $\ell^p(\mathbb{N})$ e $\ell^q(\mathbb{N})$.

Considere $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ e $y = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$, então vale a desigualdade

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p\Big)^{1/p},$$

a qual é denominada desigualdade de Minkowski em $\ell^p(\mathbb{N})$. De fato, se $1/p + 1/q = 1$ e $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell p(\mathbb{N})$, então $\big(|\zeta_n|^{p-1}\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$. Sendo $|\xi_n + \eta_n|^p \leq |\xi_n + \eta_n|^{p-1}\,|\xi_n| + |\xi_n + \eta_n|^k\,|\eta_n|$, obtém-se, pela observação acima sobre $|\zeta_n|^{p-1}$ e desigualdade de Hölder que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^{p-1}\,|\xi_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^{p-1}\,|\eta_n| \leq$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{1/q} +$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^{(p-1)q}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p\Big)^{1/p} =$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p\Big)^{1/q}\Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p\Big)^{1/p}\Big].$$

Dividindo ambos os membros por $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|\Big)^{1/q}$ e obsevando que $1 - 1/q = 1/p$, tém-se a desigul
dade de Minkowski em $\ell^p(\mathbb{N})$.

Considerando $u \in L^p(0,1)$ e $v \in L^p(0,1)$ a desigualdade de Minkowski é dada por

$$\Big(\int_0^1 |u(t) + v(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_0^1 |u(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} + \Big(\int_0^1 |v(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}.$$

Para demonstrá-la emprega-se o mesmo argumento do caso discreto $\ell^p(\mathbb{N})$. Note que se $u \in L^p(0,1)$ e $|u(t)|^{(p-1)q} = |u(t)|^p$, então $|u|^{p-1} \in L^q(0,1)$, o que prova ser $|u|^{(p-1)q}$ integrável. Assim, faz-se a decomposição

$$\int_0^1 \left|u(t)+v(t)\right|^p dt \leq$$
$$\int_0^1 \left|u(t)+v(t)\right|^{p-1} |u(t)|dt + \int_0^1 \left|u(t)+v(t)\right|^{p-1} |v(t)|dt,$$

aplica-se a desigualdade de Hölder ao membro da direita, efetua-se certos cálculos e divide-se ambos os membros por

$$\Big(\int_0^1 |u(t)+v(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}$$

resultando na desigualdade de Minkowski.

93. No Exercício **55** analisando-se a relação entre integrais impróprias e séries numéricas, provou-se que a integral imprópria

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

é convergente. Demonstra-se a seguir que ela não é absolutamente convergente, isto é, a integral

$$\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \tag{1}$$

não converge. De fato, para qualquer inteiro $k \geq 0$, tem-se

$$\int_0^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx =$$
$$\int_0^{\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx + \int_\pi^{2\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx + \cdots + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx,$$

isto é,

$$\int_0^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^{k} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx.$$

Daí, para $n \geq 0$ e sendo $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ obtém-se

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{(n+1)\pi} = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

Para calcular a integral de $|\operatorname{sen} x|$ distinguir os casos n par e n ímpar. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{k} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k+1}\right)$$

que diverge quando $k \to \infty$. Logo a integral imprópria (1) é divergente.

94. No Complemento **56** desenvolveu-se um exemplo de funções que possuem integral imprópria em $(0, \infty)$ mas não convergem para zero no infinito. Um outro exemplo, compare com **55**, é dado pela integral imprópria

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx. \tag{1}$$

Demonstra-se que a série (1) é convergente. De fato, seu termo geral é

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx.$$

Fazendo-se a mudança de variáveis $x = \sqrt{z + n\pi}$ obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen} x^2\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(z+n\pi)}{\sqrt{z+n\pi}}\, dz \\ &= (-1)^n \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{z+n\pi}}\, dz = (-1)a_n\cdot\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a_n\,. \tag{2}$$

Para $0 < z < \pi$ a sucessão (a_n) é formada de números positivos decrescente para zero. Portanto, cf. Parte 1, Cap. 3, Teorema 3.4, a série alternada do segundo membro de (2) é convergente. Assim, a integral imprópria (1) é convergente, mas $\operatorname{sen} x^2$ não converge para zero quando $x \to \infty$.

95. Quando se estuda o cálculo de primitivas, encontram-se integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx,$$

com $m, n \in \mathbb{N}$. Por meio da mudança de variáveis $t = \operatorname{sen}^2 x$, obtém-se

$$2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} x\, \cos^{2n-1} x\, dx = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\, dt. \tag{1}$$

Motivado por esta relação- Euler (1747)-, estudou integrais do tipo

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt \ \text{ com } a \text{ e } b \text{ reais positivos,}$$

cujas propriedades ocuparam muitos matemáticos dos séculos XVIII e XIX, entre eles, Weierstrass, Legendre, Binet e o próprio Euler.

Essas integrais foram denominadas *integrais de Euler ou euleriana* e representada por Binet por

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt,$$

denominada *função beta de Euler*. Outra função também estudada por Euler foi a função denominada gama, a saber

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}\,e^{-t}\,dt.$$

Legendre (1814) denominava $B(a,b)$ *função euleriana de primeira espécie*, e para $a > 0$ número real $\Gamma(a)$ de *segunda espécie*. Para $a \in \mathbb{N}$, veja o Complemento **47**. Esta também denomina-se euleriana.

• Fazendo $x = 1 - t$ na função beta, obtém-se

$$B(a,b) = B(b,a).$$

• Para $b = n \in \mathbb{N}$, obtém-se por meio de integrando por partes, que

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a}\int_0^1 t^a(1-t)^{n-2}\,dt = \frac{n-1}{a}\,B(a+1,n-2).$$

Fazendo n variar: $n-1,\, n-2,\ldots,2,\,1$, obtém-se $a,\, a+1,\, a+2\ldots a+n-1$, resulta que

$$B(a,n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\,.$$

- Também por integração partes obtém-se

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{sendo} \quad \Gamma(1) = 1.$$

- Para $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)\dots(a+n-1)\Gamma(a).$$

Sendo

$$B(a,n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)\dots(a+n-1)} \cdot \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)}$$

obtém-se

$$B(a,n) = \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(a)}{\Gamma(a+n)} \cdot \tag{2}$$

Esta relação entre as funções beta e gama generaliza-se para a e b reais positivos. O leitor pode consultar Ch la Valle Poussin - *Cours d'Analyse Infinitesimale* - Tome II, Dover, 1946, §3.

Observe que as integrais definindo $B(a,b)$ e $\Gamma(a)$ são convergentes.

Há várias outras propriedades das funções eulerianas que não estão exemplificadas aqui. Entre elas, tem-se

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x+\mu(x)},$$

onde x é um número real positivo, $\mu(t) = \theta/12x$ e $0 < \theta < 1$. Esta denomina-se fórmula de Stirlling, de aplicação quando $x \in \mathbb{N}$, dando uma representação para o fatorial. Com a substituiçao $x = y/(1+y)$ obtém-se

$$B(a,h) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy$$

com certa utilidade nas aplicações.

Fazendo $x = y = 1/2$ em (2) e observando (1) tem-se

$$\left[\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\right]^2 = 2\int_0^{\pi/2} dx = \pi \quad \text{com} \quad \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}.$$

96. Na Parte 1, Cap. 5, analisou-se a fórmula de Taylor obtendo-se a expressão do resto R_n sob uma forma particular. Deduz-se neste complemento a fórmula de Taylor com o resto sob a forma geral e do resultado obtido encontram-se outros. De fato, seja f definida em (a, b) com valores em $\mathbb{R}$ um função n vezes continuamente derivável. Inicia-se fazendo os cálculos para $n = 4$. Assim, o problema é calcular R_4 para a fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, f''(x_0) +$$
$$\frac{(x - x_0)^3}{3!}\, f'''(x_0) + R_4,$$

onde x e x_0 pontos de (a, b). Procede-se como no Cap. 5 com ligeira modificação na definição da função φ.

Para $x_0 < u < x$ define-se

$$\varphi(u) = f(x) - f(u) - \frac{(x - u)}{1!}\, f'(u) - \frac{(x - u)^2}{2!}\, f''(u) +$$
$$\frac{(x - u)^3}{3!}\, f'''(u) - (x - u)^p (x - x_0)^{-p}\, R_4,$$

sendo p um parâmetro sem nenhuma restrição. Resulta que φ é continuamente derivável e $\varphi(x) = 0$ para $u = x_0$ e $u = x$. Portanto, pelo teorema de Rolle existe $\xi \in (x_0, x)$, tal que $\varphi'(\xi) = 0$.

Calculando $\varphi'(u)$ obtém-se

$$\varphi'(u) = -\frac{(x-u)^3}{3!}\, f^{(\mathrm{iv})}(u) + p(x-u)^{p-1}(x-x_0)^{-p}\, R_4\,.$$

Calculada em $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ com $0 < \theta < 1$ resulta

$$R_4 = \frac{1}{p3!}\,(x-\xi)^3\, f^{(\mathrm{iv})}(\xi)\, \frac{(x-x_0)^p}{p(x-\xi)^{p-1}}\,.$$

No caso geral n opera-se de modo absolutamente análogo, obtendo

$$R_n = \frac{1}{p(n-1)!}\,(x-\xi)^{n-1}\, f^{(n)}(\xi)\cdot \frac{(x-x_0)^p}{p(x-\xi)^{p-1}}\,.$$

Fazendo $h = x - x_0$ e $x - \xi = (x-x_0) + \theta(x-x_0) = h(1-\theta)$ tem-se

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}\, f^{(n)}(\xi) \quad \text{onde} \quad \xi = x_0 + \theta h,$$

o qual é denominado *resto de Roche-Schlömich*, e inclue, como caso particular, o de Lagrange e de Cauchy. De fato,

- Se $p = n$ obtém-se ver Parte 1, Cap. 5, o de Lagrange

$$R_n = \frac{h^n}{n!}\, f^{(n)}(\xi) = \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(\xi).$$

- Se $p = 1$ tem-se pelo Exercício **83**, o de Cauchy

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(\xi).$$

Funções Convexas

97. Seja J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, uma semi-reta $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ ou o $\mathbb{R}$, o qual é representado por $(-\infty, +\infty)$ e denominado a *reta numérica.*

Definição 1. Diz-se que $f\colon J \to \mathbb{R}$ é uma *função convexa*, quando para todo par de pontos $a,\, b \in J$ e $\lambda \in (0,1)$ vale a desigualdade

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Quando vale apenas a estrita desigualdade $<$, diz-se que $f\colon J \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa em J.

Interpretação Geométrica - Considere uma função $f\colon J \to \mathbb{R}$ convexa e $a,\, b \in J$. Se $a < x < b$ tem-se

$$\frac{x-a}{b-a} = \theta \quad \text{para} \quad 0 < \theta < 1.$$

Logo, todo x de (a,b) escreve-se

$$x = a + \theta(b-a) = (1-\theta)a + \theta b \quad \text{com} \quad 0 < \theta < 1.$$

Tomando $\lambda = 1 - \theta$ tem-se $0 < \lambda < 1$. Assim, x em (a,b) escreve-se sob a forma

$$x = \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Considere $A = f(a)$ e $B = f(b)$ pontos do gráfico de f em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas $x0y$. A reta suporte do segmento AB possui equação cartesiana

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,(x-a). \tag{1}$$

Se c é um ponto interior de $(a,b) \subset J$, a reta $x = c$ com $c = a + \theta(b-a) = (1-\theta)a + \theta b = \lambda a + (1-\lambda)b$, intercepta o suporte (1) de AB no ponto de ordenada

$$y_c = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(c-a).$$

Sendo y_c um ponto do segmento AB, obtém-se

$$y_c = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \quad \text{onde} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Se $f\colon J \to \mathbb{R}$ é convexa, então $f(c) = f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big)$ é menor que y_c. Portanto, para cada par de pontos a e b de J, o gráfico está abaixo da corda AB como é visto na figura 1.

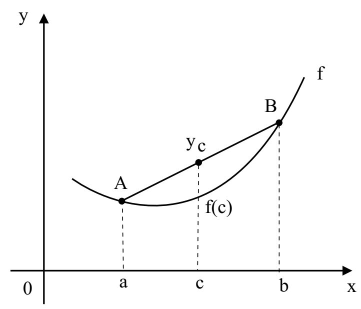


Fig. 1

Considere $a < x < b$. Assim, $(x, f(x))$ é um ponto do gráfico de f em (a,b) e (x, y_x) um ponto da corda AB. Sendo f convexa, tem-se, por definição

$$f(x) \leq y_x \quad \text{para todo} \quad x \in (a,b).$$

Portanto, sendo $f(x) \leq y_x$ com

$$y_x = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

a equação do suporte de A, a qual escreve-se, também, sob a forma

$$y_x = \frac{b - x}{b - a}\,f(a) + \frac{x - a}{b - a}\,f(b)$$

implica

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a}\,f(a) + \frac{x - a}{b - a}\,f(b) \tag{2}$$

para todo $a < x < b$. A desigualdade (2) é outro modo de definir a convexidade da f.

Observação - Fazendo-se $1 - \lambda = \mu$ escreve-se da definição de convexidade

$$f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b) \quad \text{para} \quad \lambda + \mu = 1,$$

onde λ e μ são números positivos. Por meio de (2) obtém-se uma desigualdade para funções convexas de utilidade no estudo de suas propriedades. De fato, adicione $-f(a)$ a ambos os membros de (2). Após alguns cálculos simples obtém-se

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

para todo $a < x < b$. De modo análogo, adicionando-se $-f(b)$ a ambos os membros de (2) resulta

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}\,.$$

Daí, sendo f convexa, obtém-se para todo $a < x < b$ que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \,. \tag{3}$$

A desigualadde (3) possui uma interpretação geométrica. Para fixar idéias, considere $x = c$ e veja a Fig. 1. Note que o coeficiente angular do suporte de AC é menor que o de AB que é menor que o de CB.

Funções Ponto Médio Convexas: Seja $f\colon J \to \mathbb{R}$ e $x_1 < x_2$ pontos interiores a J. Diz-se que f é ponto médio convexa, quando

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\,[f(x_1) + f(x_2)].$$

Se f é ponto médio convexa, então

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\Big) \leq \frac{1}{4}\Big[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\Big].$$

Por indução, demonstra-se que

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{1}{n}\Big[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\Big]$$

para $n = 2^p$ com $p \in \mathbb{N}$. Mostra-se, a seguir, que se vale para os números 2^p vale para todo natural $n \in \mathbb{N}$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $2^p > n$. Defina-se

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^p} = \frac{1}{n}\,(x_1 + \cdots + x_n).$$

Tem-se, por hipótese e definição de $x_{n+1},\, x_{n+2},\, \dots,\, x_{2^p}$ que

$$f\Big[\frac{1}{2^p}\ (x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2^p})\Big] \ \leq$$

$$\frac{1}{2^p}\Big[f(x_1) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}) + \cdots + f(x_{2^p})\Big] \ =$$

$$\frac{1}{2^p}\Big[f(x_1) + \cdots + f(x_n) + (2^p - n) f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big)\Big].$$

Observe que

$$\frac{1}{2^p}\,(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2^p}) \ =$$

$$\frac{1}{2^p}\,(x_1 + \cdots + x_n) + \frac{2^p - n}{2^p}\,\frac{1}{n}\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \ =$$

$$\frac{X}{2^p} + \frac{2^p - n}{2^p}\,\frac{X}{n} = \frac{X}{n} = \frac{1}{n}\,(x_1 + \cdots + x_n).$$

Substituindo na igualdade anterior, obtém-se

$$f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq$$

$$\frac{1}{2^p}\Big[f(x_1) + \cdots + f(x_) + (2^p - n) f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big)\Big].$$

Assim,

$$Y \leq \frac{1}{2^p}\Big[f(x_1) + \cdots + f(x_n) + (2^p - n) Y.\Big]$$

Resolvendo em Y, obtém-se $nY \leq f(x_1) + \cdots f(x_n)$ ou

$$f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{1}{n}\Big[f(x_1) + \cdots + f(x_n)\Big]. \tag{4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1 - (*Jansen* 1906) Se $f\colon J \to \mathbb{R}$ é contínua e ponto médio convexo, então f é convexa.

Demonstração: Seja $a, b \in J$ com $a < b$ e $n, k \in \mathbb{N}$ com $k < n$. De (4) obtém-se

$$f\Big(\frac{k}{n}\,a + \frac{n-k}{n}\,b\Big) \leq \frac{1}{n}\Big[kf(a) + (n-k)f(b)\Big] = \frac{k}{n}f(a) + \frac{(n-k)}{n}f(b).$$

Portanto, vale para λ racional com $0 < \lambda < 1$. Da continuidade da f resulta que vale para λ real com $0 < \lambda < 1$.

Exemplo: Considere $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x\cdot$ Mostre que f é convexa. De fato, sendo f contínua é suficiente provar que

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\,[f(a) + f(b)],$$

para todo par a, b em $(0,\infty)$. Tem-se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2}{a+b} = \frac{1}{M_a}$ sendo M_a média aritmética. Também

$$\frac{1}{2}\,[f(a) + f(b)] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big) = \frac{1}{M_h}$$

com M_h média harmônica. Do Complemento **5** sabe-se que $M_h < M_a$. Logo f é ponto médio convexa, e da Proposição 1 resulta que f é convexa.

A seguir será obtido um critério de convexidade por meio da derivabilidade da função.

Proposição 2 - Seja $f\colon J \to \mathbb{R}$ duas vezes continuamente derivável. Uma condição necessária e suficiente para que f seja convexa em J é que possua derivada segunda positiva.

Demonstração: Da desigualdade (3), para f convexa dados $x_1 < x_2$ e $x_1 + h < x_2 + h$, obtém-se

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \le \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}\,.$$

Quando $h \to 0$, tem-se

$$f'(x_1) \le f'(x_2) \quad \text{para} \quad x_1 \le x_2\,.$$

Logo, f' é crescente, o que implica f'' positiva, provando que a condição é necessária. Para provar a suficiência de $f'' \ge 0$, considere $x,\, y \in J$ e $0 < \lambda < 1$. Do teorema do valor intermediário existem $x < \xi_1 < \lambda x + (1-\lambda)y < \xi_2 < y$ e $\xi_1 < \xi < \xi_2$ a serem empregados no decorrer da demonstração. Deve-se provar que

$$K(x,y,\lambda) = f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y)$$

é negativa ou nula. De fato, sendo $f(z) = \lambda f(z) + (1-\lambda)f(z)$ tem-se

$$\begin{aligned} A \;=\;& \lambda f\big(\lambda x + (1-\lambda y)\big) - (1-\lambda)f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \\ & -\lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) = \lambda\big[f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - f(x)\big] \\ & +(1-\lambda)\big[f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - f(y)\big]. \end{aligned}$$

Do teorema do valor intermediário, resulta

$$K(x,y,\lambda) = \lambda(1-\lambda)\big[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)\big] = -\lambda(1-\lambda)\big[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)\big].$$

Aplicando uma vez mais o teorema do valor intermediário e observando que $f''(\xi) \ge 0$, obtém-se

$$K(x,y,\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(y-x)(\xi_2-\xi_1)f''(\xi) \le 0.$$

Aplicação: Outra demonstração da desigualdade de Hölder. Considere a função $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = e^x$. Note que f convexa porque $f''(x) = e^x > 0$ em $(0,+\infty)$. Logo

$$f(\lambda \log x + \mu \log y) \le \lambda f(\log x) + \mu f(\log y),$$

onde λ e μ são positivos e $\lambda + \mu = 1$. Note que $f(\log x) = x$, $f(\log y) = y$ e $f(\lambda \log x + \mu \log y) = f(\log x^\lambda y^\mu) = x^\lambda y^\mu$. Portanto, da desigualdade anterior deduz-se

$$x^\lambda y^\mu \le \lambda x + \mu y \quad \text{com} \quad \lambda + \mu = 1.$$

Considere $\lambda = 1/p$, $\mu = 1/q$ e faça x^p em lugar de x e y^q em lugar de y. Assim, obtém-se

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{com} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Esta é a desigualdade obtida no Complemento **96**. Por este motivo a desigualdade de Hölder é denominada desigualdade de convexidade.

Integrais impróprias segundo Cauchy-Riemann e Lebesgue

98. Definiu-se na Parte 1, Cap. 6, §6.5 a noção de integral de funções reais em partes não limitadas de $\mathbb{R}$ do tipo $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ e de funções definidas em intervalos limitados do tipo (a, b) possuindo singularidades. Estas foram denominadas *integrais impróprias* , cujas definições são relembradas a seguir.

Considere $f\colon (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ e (a,b) um intervalo contido em $(a,+\infty)$, isto é, $a < b < \infty$. Supõe-se a restrição de f ao subintervalo (a,b) integrável a Cauchy-Riemann para todo $(a,b) \subset (a,+\infty)$. Assim a função

$$\varphi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

é bem definida em $(a,+\infty)$. Quando existe $\lim\limits_{b\to\infty} \varphi(b)$, i.é., finito, diz-se que f possui uma integral imprópria segundo Cauchy-Riemann em $(a,+\infty)$ e escreve-se

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Em Complemento **55** foi visto que a função

$$f(x) = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad 0 < x < \infty, \\ 1 & \text{se} \quad x = 0, \end{array}\right.$$

possui integral imprópria segundo Cauchy-Riemann em $(0,\infty)$.

No Complemento **90** viu-se como Lebesgue idealizou o conceito de integral em um intervalo (a,b) com $-\infty < a < b < +\infty$ a qual contém a integral de Cauchy-Riemann. Isto significa dizer que toda função integrável a Cauchy-Riemann é a Lebesgue, mas a recíproca não é válida em geral. A seguir considera-se o caso não limitado $f\colon (a,+\infty) \to \mathbb{R}$, define-se integral imprópria segundo Lebesgue e verifica-se que há funções que possuem integral imprópria a Cauchy-Riemann mas não a Lebesgue. De fato, seja $f\colon (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrável a Lebesgue em todo subintervalo $(a,b) \subset (0,+\infty)$. As funções parte positiva φ^+ e parte negativa φ^-, veja estes conceitos na Secção 6.4, definidas em $(0, +\infty)$ com valores em $\mathbb{R}$ por

$$\varphi^+(b) = \int_a^b f^+(x)\,dx \quad \text{e} \quad \varphi^-(b) = \int_a^b f^-(x)\,dx$$

são positivas e crescentes, porque $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$. Logo possuem limite quando $b \to \infty$. Se estes limites são finitos, define-se

$$\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \varphi^+(b) \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \varphi^-(b)$$

dizendo-se que f possui uma integral imprópria segundo Lebesgue em $(a, +\infty)$ definida por

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx.$$

Portanto, se existe a integral imprópria segundo Lebesgue de f em $(a, +\infty)$, resulta que existe a integral imprópria do módulo de f, isto é, $|f| = f^+ + f^-$ dada por

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_0^{\infty} f^+(x)\,dx + \int_0^{\infty} f^-(x)\,dx$$

e reciprocamente.

Exemplo: Foi visto que

$$f(x) = \left| \begin{array}{lll} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} & 0 < x < +\infty, \\ 1 & \text{se} & x = 0, \end{array} \right.$$

possui integral imprópria de Cauchy-Riemann, veja Complemento **55**. Entretanto foi visto no Complemento **93** que seu módulo $|f|$

não possui integral imprópria segundo Lebesgue, logo f não possui integral imprópria segundo Lebesgue.

99. A seguir estuda-se um resultado de Abel (1802-1829) sobre convergência de séries numéricas, o qual tem uma generalização para integrais impróprias, consultar G.H. Hardy op.cit. §179 e 185.

• **Abel sobre Séries Numéricas.** Considere uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais positivos e decrescente, tal que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ seja convergente. Então $\lim\limits_{n\to\infty}(n\, u_n) = 0$. De fato, sendo a série convergente seu resto $R_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ converge para zero quando $n \to \infty$. Sendo $u_n > 0$ para $n = 1, 2, \dots$ resulta que

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

por ser dominada por R_{n+1}. Sendo

$$u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_{n+1} \geq \cdots \geq u_{2n} \geq \dots$$

conclui-se que $u_{n+k} \geq u_{2n}$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Logo,

$$n\, u_{2n} \leq u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} < R_{n+1} \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

Daí obtém-se $\lim_{n\to\infty}(2n\, u_{2n}) = 2\lim_{n\to\infty}(n\, u_{2n}) = 0$, valendo o resultado para os números pares de $\mathbb{N}$. Suponha para os ímpares $2n+1$. Então, $u_{2n+1} \leq u_{2n}$, pois (u_n) é decrescente. Portanto, $(2n+1)u_{2n+1} \leq [(2n+1)(2n\, u_{2n})]/2n$, e sendo $u_n > 0$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty}(2n{+}1)u_{2n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\lim_{n\to\infty}(2n\, u_{2n}) = 0 \quad \text{para todo} \quad n.$$

Concluindo-se que $\lim\limits_{n\to\infty}(n\,u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

- Suponha $u_n = 1/n$, então a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ está nas condições de Abel. Sendo $\lim\limits_{n\to\infty} n\,u_n = 1$, a série não converge. Veja Parte 1, Cap. 3.

- Igual exemplo para a progressão geométrica $u_n = a + nb$ para $a > 0$, $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(a+nb)$ é divergente, pois $\lim\limits_{n\to\infty} n\,u_n = 1/b > 0$.

- **Abel sobre Integrais Impróprias.** Hardy generalizou o caso anterior para integrais impróprias. Mudando de notação, faz-se $u_n = \phi(n)$ sendo $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Abel considerou:

$\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma sucessão de números reais positivos
e decrescente para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,
$\phi(1) \geq \phi(2) \geq \cdots \geq \phi(n) \geq \ldots$.
A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)$ é convergente.
Conclusão: $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\phi(n) = 0$

- **Generalização de Hardy para integrais impróprias.**

$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e decrescente.
A integral imprópria $\displaystyle\int_a^{\infty} \phi(x)\,dx$ é convergente.
Conclusão: $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\phi(x) = 0$.

De fato, para fixar idéias faça $a = 0$. Logo, a integral $\int_0^\infty \phi(x)\,dx$ é convergente, logo por definição, cf. Parte 1, Cap. 6, §6.5, tem-se

$$\int_0^\infty \phi(x)\,dx = \lim_{\xi\to\infty} \int_0^\xi \phi(x)\,dx. \tag{1}$$

Para $\xi = n \in \mathbb{N}$, obtém-se

$$\int_0^n \phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \phi(x)\,dx,$$

e se

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} \phi(x)\,dx,$$

de (1) deduz-se que a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ é convergente. Tem-se também que $f(k) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esta sucessão é decrescente porque $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é decrescente. Do resultado de Abel para séries numéricas, obtém-se

$$\lim_{k\to\infty} k\,f(k) = 0.$$

Deve-se provar que $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\phi(x) = 0$. De fato, para $k < x < k+1$ e sendo ϕ decrescente resulta $\phi(x) < \phi(k)$ e $x\,\phi(x) < x\,\phi(k)$ para $x > 0$. Ou ainda, $x\,\phi(x) < (k+1)\phi(k) = k\,\phi(k) + \phi(k)$. Tem-se, por Abel, que $k\,\phi(k) \to 0$ quando $k \to \infty$. Por outro lado, $\phi(k) \to 0$ por ser termo geral de uma série convergente. Assim, resulta que $x\,\phi(x) \to 0$ quando $x \to \infty$.

Exemplo: Seja $\phi(x) = 1/(a + bx)$ com $a, b > 0$ e $x > 0$. Então $\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx}$ não converge, pois $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\phi(x) = 1/b > 0$.

100. No que se segue analisa-se um teorema de Dirichlet (1805, 1859) sobre séries numéricas que se estende para integrais impróprias, semelhante ao resultado de Abel visto no Complemento **99**.

• **Dirichlet sobre Séries Numéricas.** Suponha (ϕ_n) uma sucessão de números positivos, decrescente, convergente para zero e $\sum a_n$ uma série numérica cuja sucessão das somas parciais (s_n) com $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, é limitada. Então a série $\sum a_n\phi_n$ é convergente. Para demonstrar esta asserção, considera-se o algoritmo de Abel, isto é, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, \phi_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu(\phi_\nu - \phi_{\nu+1}) + s_n\, \phi_{n+1}. \tag{1}$$

Observação - Para demonstrar (1) procede-se como se segue. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} a_\nu\, \phi_\nu &= (s_\nu - s_{\nu-1})\phi_\nu = s_\nu\, \phi_\nu - s_{\nu-1}\phi_\nu \\ &= s_\nu\, \phi_\nu - s_\nu\, \phi_{\nu+1} + s_\nu\, \phi_{\nu+1} - s_{\nu-1}\phi_\nu, \end{aligned}$$

isto é

$$a_\nu\, \phi_\nu = s_\nu(\phi_\nu - \phi_{\nu+1}) - s_{\nu-1}\phi_\nu + s_\nu\, \phi_{\nu+1}\,.$$

Convencionando $s_0 = 0$ e somando em $\nu = 1, 2, \ldots, n$, obtém-se a identidade (1) de Abel.

Para demonstrar o resultado de Dirichlet, observe que (ϕ_n) é decrescente, assim $\phi_\nu - \phi_{\nu+1} > 0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Portanto, a série de termos positivos $(\phi_1 - \phi_2) + (\phi_2 - \phi_3) + \cdots + (\phi_\nu - \phi_{\nu+1}) + \ldots$ possui soma parcial de ordem n igual a $\phi_1 - \phi_n$ que converge para zero, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = 0$ por hipótese. Logo esta série é convergente. Por hipótese, a sucessão (s_n) de somas parciais da série $\sum a_\nu$ é limitada, isto é, $|s_n| < K$ para todo n e $K > 0$. Conseqüentemente a série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} s_\nu\,(\phi_\nu - \phi_{\nu+1})$ é absolutamente convergente, pois é dominada em valor absoluto pela série convergente $K \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\phi_\nu - \phi_{\nu+1})$. Portanto, a sucessão de somas parciais da série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} s_\nu(\phi_\nu - \phi_{\nu+1})$ converge para um limite finito, isto é $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n} s_\nu(\phi_\nu - \phi_{\nu+1})$ existe. Por hipótese, $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_{n+1} = 0$ e (s_n) é limitada, logo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n\,\phi_{n+1} = 0$. Resulta destas duas últimas asserções que se $n \to \infty$ existe o limite de

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\,\phi_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu(\phi_\nu - \phi_{\nu+1}) + s_n\,\phi_{n+1},$$

portanto, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\,\phi_\nu$ é convergente.

Corolário 1. Seja (ϕ_n) uma sucessão de números positivos, decrescente com $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = L$, não necessariamente zero. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\phi_n$ é convergente.

Demonstração: Considera-se a sucessão $(\phi_n - L)$ de números positivos, decrescente convergente para zero. Sendo $\sum a_n$ convergente a sucessão de somas parciais (s_n) é convergente, logo limitada. Pelo resultado de Dirichlet conclui-se que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(\phi_n - L)$ é convergente. Sendo $a_\nu\,\phi_\nu = a_\nu(\phi_\nu - L) - La_\nu$, resulta que $\sum a_\nu\,\phi_\nu$ é convergente.

Aplicação: Estudar a convergência das séries $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu\pi}{\nu^s}$ e $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \nu\pi}{\nu^s}$ com $s > 0$. Para reduzir ao teorema de Dirichlet considera-se, para a primeira série $a_\nu = \cos \nu\pi$ e $a_\nu = \operatorname{sen} \nu\pi$ para a segunda. Tem-se $\phi_\nu = 1/\nu^s$ com $s > 0$, é decrescente, de números positivos e convergente para zero. Esta sucessão, para $s > 0$ está nas condições de Dirichlet. Considere θ não múltiplo de 2π.

Cálculo das reduzidas C_n e S_n das séries em co-seno e seno: dos números complexos obtém-se

$$\begin{aligned} C_n + iS_n &= \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu\theta + i \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{sen} \nu\theta = \sum_{\nu=1}^{n} (\cos \nu\theta + i \operatorname{sen} \nu\theta) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^\nu = \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu, \end{aligned}$$

sendo $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Tem-se

$$\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu = z\, \frac{z^n - 1}{z - 1} \quad \text{e} \quad |C_n + iS_n| \leq \left| z\, \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| \leq \frac{2}{|z - 1|}\,.$$

Note que $|C_n|$ e $|S_n|$ são menores que $|C_n + iS_n|$, o qual é menor que $\frac{2}{|z-1|}$ independente de $n \in \mathbb{N}$. Portanto, as séries $\sum \cos \nu\theta$ e $\sum \operatorname{sen} \nu\theta$ possuem as reduzidas limitadas. Portanto, se s e θ não são múltiplo de $z\pi$, segue que a primeira série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu\theta}{\nu^s}$ é convergente para $s > 0$. Examine a segunda série.

- **Dirichlet sobre Integrais Impróprias**. Resumindo o resultado acima demonstrado, obtém-se:

(ϕ_n) *sucessão de números positivos, decrescentes para zero e* $\sum a_n$

série numérica cuja sucessão das somas parciais é limitada. Então a série $\sum a_n\phi_n$ *é convergente.*

Este resultado possui sua generalização natural para integrais impróprias, cf. Titchmarsh, op.cit. De fato, seja $\phi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continuamente derivável, decrescente com $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ e $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que a integral

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$

seja limitada e valha o teorema fundamental do cálculo. Então, a integral imprópria

$$\int_a^\infty f(x)\phi(x)\,dx \quad \text{é convergente.}$$

De fato, prova-se que o

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)\phi(x)\,dx$$

existe. Integrando por partes, tem-se

$$\int_a^\xi f(x)\phi(x)\,dx = F(\xi)\phi(\xi) + \int_a^\xi (-\phi'(x))F(x)\,dx,$$

pois $F(a) = 0$ e $F'(x) = f(x)$. Assim, obtém-se:

- $\lim\limits_{\xi\to\infty} F(\xi)\phi(\xi) = 0$, pois F é limitada e $\phi(\xi) \to 0$, quando $\xi \to \infty$.
- $\lim\limits_{\xi\to\infty} \displaystyle\int_0^\xi (-\phi'(x))F(x)\,dx$ é finito, pois F é limitada, $-\phi'(x) > 0$ e $\phi(\xi) \to 0$, quando $\xi \to \infty$. Logo, existe a integral imprópria

$$\int_a^\infty f(x)\phi(x)\,dx.$$

Aplicações:

(1) As integrais

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad \text{e} \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx$$

são convergentes, $\phi(x) = 1/x$ com $x > 0$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$ ou $\cos x$ para $x > 1$.

(2) Examinar a integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^s}\, dx \quad \text{com} \quad s > 0.$$

□

"Toda explicação fica pela metade,
pois o homem não consegue terminá-la"

Ecl. IV. 8

Índice Remissivo