Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Topologia Algébrica
Lista 3 de exercícios, para entregar na aula de 30/08/2021

1. O plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ de linhas retas pela origem em $\mathbb{R}^3$ pode ser descrito com coordenadas homogêneas. Uma reta em $\mathbb{R}^3$ gerada pelo vetor (x_0, x_1, x_2) será denota por $[x_0 : x_1 : x_2]$, entendendo que para $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, $\lambda(x_0, x_1, x_2)$ gera a mesma linha, então $[x_0 : x_1 : x_2] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2]$.

(a) Demonstre que o subconjunto de $\mathbb{RP}^2$ de linhas retas $\{[x_0 : x_1 : x_2]\}$ com $x_0 = 0$ consiste da curva $C = \{[0 : \cos(\pi t) : \operatorname{sen}(\pi t)]\}$ para $t \in [0, 1]$.

(b) Seja $l = [1 : 0 : 0] \in \mathbb{RP}^2$. Construa uma explícita retração por deformação do conjunto $U = \mathbb{RP}^2 \setminus \{l\}$ sobre a curva C.

2. Seja $\mathbb{RP}^3$ o espaço projetivo real de dimensão 3. Isso é o conjunto de linhas retas em $\mathbb{R}^4$ que passam pela origem. Isso é um espaço topológico na mesma maneira que para $\mathbb{RP}^2$. A topologia pode ser realizada considerando $\mathbb{RP}^3$ como o quociente da esfera unitária $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ módulo a relação de equivalência que identifica $p \in S^3$ com $-p$. Alternativamente, pode ser visto como a bola fechada $\overline{B^3(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^3$ identificando pontos antípodos na fronteira $S^2 \subseteq \overline{B^3(0,1)}$

Utilize o teorema de Van Kampen para demonstrar que o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{RP}^3, x_0)$ desse espaço é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. (Dica: Demonstre que o subconjunto de $\mathbb{RP}^3$ de linhas geradas por pontos (não-nulos) (x_0, x_1, x_2, x_3) com $x_0 = 0$ é uma retração por deformação de $\mathbb{RP}^3 \setminus \{p\}$.)

3. Sejam X_1 e X_2 dois espaços topológicos com pontos dois $x_i \in X_i$ escolhidos. Denotamos por $X_1 \vee X_2$ o quociente $X_1 \sqcup X_2/\sim$ no que identificamos somente o ponto $x_1 \in X_1$ com $x_2 \in X_2$.

(a) Seja $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = 0, y^2 + z^2 = 1\}$ um círculo em $\mathbb{R}^3$. Demonstre que $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ tem uma retração por deformação sobre $S^2 \vee S^1$.

(b) Sejam $Z = \{x = y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e $C = \{(x-2)^2 + y^2 = 1, \ z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ Demonstre que $\mathbb{R}^3 \setminus (Z \cup C)$ tem retração por deformação sobre $S^2 \vee S^1 \vee S^1$.

(c) Sejam $Z = \{x = y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e $X = \{(y-1)^2 + z^2 = 1, \ x = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Demonstre que $\mathbb{R}^3 \setminus (X \cup Z)$ tem retração por deformação $S^2 \vee (S^1 \times S^1)$.

4. Seja $\mathbb{CP}^1$ o conjunto de subespaços vetoriais complexos de dimensão 1 em $\mathbb{C}^2$. Uma topologia pode ser posta em $\mathbb{CP}^1$ considerando uma relação de equivalência em S^3. Todo elemento, uma linha complexa $l \subseteq \mathbb{C}^2$, pode ser representado como $l = [z_0 : z_1]$, onde (z_0, z_1) é um gerador da linha. Como na Questão 1, temos $[z_0 : z_1] = [\lambda z_0 : \lambda z_1]$ para qualquer $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$. Sejam

$$\begin{aligned} U &= \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1 \ ; \ z_0 \neq 0\}, \\ V &= \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1 \ ; \ z_1 \neq 0\}. \end{aligned}$$

Os conjuntos $U, V \subseteq \mathbb{CP}^1$ são abertos na topologia mencionada acima.

(a) Demonstre que $\mathbb{CP}^1 = U \cup V$.

(b) Demonstre que U e V são simplesmente conexos e que $U \cap V$ é conexo por caminhos.

(c) Conclua usando o teorema de Van Kampen que $\pi_1(\mathbb{CP}^1, x_0) = \{1\}$.

Poderíamos até verificar que $\mathbb{CP}^1$ é homeomorfo à esfera S^2.

5. Seja $\mathbb{CP}^2$ o conjunto de todos os subespaços vetoriais (complexos) de dimensão 1 em $\mathbb{C}^3$. De novo, isso é um espaço toplógico com topologia quociente induzida por uma relação de equivalência em S^5. Consideramos coordenadas $[z_0 : z_1 : z_2]$ para a linha $l = \operatorname{Vect}((z_0, z_1, z_2))$.

(a) Demonstre que o conjunto $\{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 \ ; \ z_0 = 0\} \cong \mathbb{CP}^1$.

(b) Demonstre que $\mathbb{CP}^2 \setminus \{z_0 = 0\}$ é contratível.

(c) Utilize o teorema de Van Kampen para demonstrar que $\mathbb{CP}^2$ é simplesmente conexo.

6. Seja X a união de arestas no tetraedro (uma união de 6 segmentos). Demonstre que $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.