Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Topologia Algébrica
Lista 4 de exercícios, para entregar na aula de 20/09/2021

1. Demonstre que um espaço topológico que é conexo e localmente conexo por caminhos é conexo por caminhos.

2. Seja X um espaço topológico conexo por caminhos. Vamos considerar os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ para dois pontos x_0, x_1 em X. Já vimos que se $c : [0,1] \to X$ é uma curva de x_0 até x_1, então podemos definir um isomorfismo

$$\begin{aligned} F_c &: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1) \\ F_c([\gamma]) &= [\bar{c} \cdot \gamma \cdot c], \end{aligned}$$

onde $\bar{c}$ é a curva $\bar{c}(t) = c(1-t)$. Então, se c e c' são curvas de x_0 até x_1, sob quais condições as duas curvas c e c' definem o mesmo isomorfismo $F_c = F_{c'}$?

3. Seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação contínua, e seja γ uma classe de equivalência de curvas em X de x_0 até x_1. Demonstre que o diagrama seguinte é comutativa :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "F_\gamma"'] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[d, "F_{\varphi_* \gamma}"] \\ \pi_1(X, x_1) \arrow[r, "\varphi_*"] & \pi_1(Y, \varphi(x_1)) \end{tikzcd}$$

Aqui o isomorfismo F_γ é definido por $F_\gamma(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$, e $F_{\varphi_*\gamma}$ é parecido.

4. Seja S uma superfície topológica compacta e X o complemento de um ponto em S. Encontre um subconjunto A de X tal que (a) A seja homeomorfo à união de um número finito de circulos, e (b) A seja uma retração por deformação de X. Ilustre isso com desenhos nos casos em que S é (i) orientável e de gênero 2 e (ii) a garrafa de Klein.

5. Demonstre que se $r : X \to A$ é uma retração de X, $i : A \to X$ é a inclusão de A em X é $i_*\pi_1(A)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X)$, então $\pi_1(X)$ é o produto direito dos subgrupos $Im(i_*)$ e $Ker(r_*)$.

6. Demonstre que $\mathbb{R}^2$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para $n \neq 2$.