Observamos que várias partes das questões dessa lista dependem de algumas construções que não foram apresentadas na aula. Eu sugiro que lêem Seção §1.7 do livro de Massey (A Basic Course in Algebraic Topology) para ver o final da demonstração do teorema de classificação de superfícies.

1. Considere a superfície triangularizada X com nove vérticies denontadas $\{1, \ldots, 9\}$ e triângulos

124	236	134	246
367	347	469	459
698	678	457	259
289	578	358	125
238	135		

(a) Ordene os triângulos $T_1, \ldots, T_{18}$ para que para $2 \leq i \leq 18$, T_i tenha uma aresta em comum com (pelo menos) um triângulo $T_1, \ldots, T_{i-1}$.

(b) Construa um polígono P com 20 arestas por uma colagem dos triângulos ao longo das arestas $\{e_2, \ldots, e_{18}\}$ tal que as arestas de P possam ser identificadas dois por dois (com orientações em cada uma) para formar a superfície X. Denomine as arestas de P por $a, b, c, a^{-1}, \ldots$ etc. O que é a palavra associada a P, formada pelas letras $\{a, b, \ldots\}$?

(c) Modifique o polígono P para eliminar *arestas adjacentes do primeiro tipo*. Isso é dizer, cada vez que uma aresta a apareça adjacente a aresta a^{-1}, podemos eliminar as duas arestas do polígono P e obter um novo polígono P'.

(d) Observamos que entre as vértices $\{1, \ldots, 9\}$ em X, várias delas ainda aparecem como vértices do polígono P' que resulta depois de parte (3). Transfome P' num polígono P'' com todas as vértices identificadas ao mesmo ponto $i \in \{1, \ldots, \}$ em X. (O valor de i vai depender das escolhas feitas anteriormente).

(e) Uma aresta b de P'' é de tipo dois se a letra b aparece duas vezes na palavra de P'' (e não ambas b e b^{-1}). Modifique P'' num novo polígono P''' no qual todo grupo de arestas de tipo dois são adjacentes (como "$\ldots bb \ldots$").

(f) Modifique P''' em P'''' para que todas as arestas restantes de tipo um sejam arranjadas em blocos $cdc^{-1}d^{-1}$.

(g) Identifique a superfície X como a soma conexa de toros e planos projetivos.

2. Repita as sete etapas de Questão 1. para determinar a superfície topológica que admite a triângulação

124	235	346	457
561	672	713	134
245	356	467	571
126	237.		

3. Seguindo a explicação do Massey, demonstre que $\mathbb{RP}^2 \# T^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.

4. Um *grande círculo* é um círculo unitário em $\mathbb{R}^3$ centrado na órigem, considerado como um subconjunto da esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Em quantos pedaços é a esfera dividida por n grandes círculos, nenhum três dos quais tendo um ponto em comum?

5. Qual superfície topológica (identificada pelo teorema de classificação) é representada pela palavra

$$a_1 a_2 \ldots a_n a_1^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} a_n?$$