1. Sejam X e Y espaçoes topológicos.

   (a) Mostre que se $F : X \to Y$ é contínua e X é conexo, então a imagem $F(X) \subseteq Y$ também é conexo.

   (b) Mostre que se $K \subseteq X$ é conexo, então K é contido num único componente de X.

   (c) Mostre que a união de subespaços conexeos de X que tem um ponto em comum é conexo.

   (d) Mostre que os componentes de X são subconjuntos desjuntos fechados e não vazios, cuja união é todo X. (Dica : para que que um componente é fechado, mostre que para qualquer conjunto conexo K, o fecho $\bar{K}$ também é fechado.)

   (e) Mostre que um espaço quociente de um espaço conexo também é conexo.

2. Um espaço topológico X é localmente conexo por caminhos se para todo $x \in X$ e para toda vizinhança U de x, existe um subconjunto aberto $V \subseteq U$ que contem x e que é conexo por caminhos. Suponha que X é localmente conexo por caminhos.

   (a) Mostre que os componentes de X são abertos em X.

   (b) Mostre que os caminho componentes são iguais aos seus componentes.

   (c) Mostre que X é conexo se e somente se ele é conexo por caminhos.

3. Sejam X e Y espaços topológicos.

   (a) Mostre que se $F : X \to Y$ e contínua e X é compacto, então $F(X)$ é compacto.

   (b) Mostre que se X é compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é limitado e assume seus valores máximos e mínimos em X.

   (c) Mostre que a união de finitamente subespaços compactos de X é compacto.

   (d) Seja X um espaço Hausdorff e K e L subconjuntos compactos e desjuntos de X. Mostre que existem conjuntos abertos e desjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $K \subseteq U$ e $L \subseteq V$.

   (e) Mostre que todo subconjunto compacto de espaço Hausdorff é fechado.

4. No exemplo da aula no qual o tetraedro foi obtido como o quociente de quatro triângulos módulo uma relação de equivalência, sejam $X = T_a \cup T_b \cup T_c \cup T_d$ e $Y = X/\sim$ com $\pi : X \to Y$ a aplicação quociente. Seja $K = [0, 1] \times \{0\} \subseteq T_a \subseteq X$. Descreve uma vizinhança aberta e saturada de K em X.