Instituto de Matemática - IM/UFRJ

Topologia Algébrica

Lista 1 de exercícios, para entregar na aula de 28/7/2021

1. Seja $F : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topolóogicos. Demonstre que ambas as seguintes condições são equivalentes à continuidade de F :

   (a) Para todo subconjunto $A \subseteq X$, $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$.

   (b) Para todo subconjunto $B \subseteq Y$, $F^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int} F^{-1}(B)$.

2. Seja X qualquer conjunto. Mostre que $\{X, \emptyset\}$ é uma topologia em X, chamada a *topologia trivial*. Mostre que quando X é dado essa topologia, todo sequência em X converge para todo ponto de X, e que toda aplicação de um espaço topologico para X é contínua.

3. Seja X um espaço primeiro-contável, seja $A \subseteq X$ qualquer subconjunto e seja $x \in X$.

   (a) Mostre que $x \in \overline{A}$ se e somente se x é o limite de uma sequência de pontos em X.

   (b) Mostre que $x \in \operatorname{Int} A$ se e somente se toda sequência em X convergindo a x é eventualmente contida em A.

   (c) Mostre que A é fechado em X se e somente se A contem todo limite de toda sequência convergente de pontos em A.

   (d) Mostre que X é aberto se e somente se toda sequência em X convergindo a algum ponto de A é eventualmente contida em A.

4. Mostre que o conjunto de bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ cujos raios são números racionais e cujos centros tem coordenadas racionais forma uma base contável para a topologia euclideana para $\mathbb{R}^n$, e logo que $\mathbb{R}^n$ é segundo-contável.

5. (a) Mostre que todo espaço métric é Hausdorff na topologia métrica.

   (b) Seja X um espaço Hausdorff. Mostre que todo conjunto finito de X é fechado e que toda sequência convergente em X tem um único limite.

6. (Lema de Colagem de Aplicações Contínuas) Sejam X e Y espaços topologicos, e suponha que $B_1, \dots, B_n$ são finitamente subconjuntos fechados de X cuja união é X. Suponha que para cada índice i nós temos aplicações contínuas $F_i : B_i \to Y$ que coincidem nas interseções : $F_i|_{B_i \cap B_j} = F_j|_{B_i \cap B_j}$. Então mostre que existe uma aplicação contínua $F : X \to Y$ cuja restrição a cada B_i é igual a F_i.

   (Notamos que o lema também é verdade se temos uma coleção arbitrária $\{B_i\}_{i \in A}$ de conjuntos *abertos* com aplicações contínuas F_i que coincidem nas interseções).

7. Sejam X e Y são espaços topológicos, e suponha que $F : X \to Y$ é uma aplicação contínua sobrejetora. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

   (a) F é uma aplicação quociente.

   (b) F leva subconjuntos abertos saturados para conjuntos abertos.

   (c) F leva subconjuntos fechados saturados para subconjuntos fechados.

   (Lembramos que para uma aplicação $\pi : X \to Y$, dizemos que um subconjunto $U \subseteq X$ é *saturado* com respeito a π se U é igual à pre-imagem inteira da sua imagem : $U = \pi^{-1}(\pi(U))$).