1. **(Fibrados Principais)**

   Explicar os conceitos básicos da geometria Riemanniana em fibrados principais. Especificamente, explica o que é uma conexão num fibrado principal, o que é a curvatura de uma conexão, qual fibrado principal corresponde com o fibrado tangente (que é um fibrado vetorial), e como as definições básicas da conexão de Levi-Civita, etc, corresponde com os mesmos objetos em fibrados prinicipais.

   (a) Kobayashi and Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*,

2. (**O operador de Dirac)**

   Explicar, emfatizando exemplos concretos, o que é uma álgebra de Clifford e o grupo $\mathbf{Spin}_n$. Explicar o que significa uma estrutura *Spin* numa variedade, sem demonstrar os critérios para a existência delas. Usar a construção associado para construir o fibrado de Clifford e o fibrado de spinores e mostrar como a conexão de Levi-Civita, junto com a multiplicação de Clifford, induz um operador diferencial que chamamos o operador de Dirac.

   (a) B. Lawson and M.L. Michelsohn - *Spin Geometry*, PUP.

3. **(A equação de Poisson em variedades)**

   Consideramos o Laplaciano agindo em funções suaves numa variedade Riemanniana compacta $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Demonstre que dada uma função $g \in C^\infty(M)$, existe uma função suave $f \in C^\infty(M)$ tal que $\Delta f = g$ se e somente se g satisfaz $\int_M g d\mu = 0$. Por isso, é necessário definir os espaços de Sobolev e anunciar alguns resultados de regularidade elíptica e de análise funcional para mostrar que uma certa sequência de funções tem limite suave.

   (a) T. Aubin - *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer.

4. **(Métricas invariantes em grupos de Lie)**

   Grupos de Lie são grupos, com a estrutura de uma varieadade tal que as operações de multiplicação e inversão no grupo sejam diferenciáveis. Muito da geometria de um grupo de Lie pode ser deduzida da álgebra linear no espaço tangente do elemento identidade. Você pode estudar a geometria de métricas Riemannianas *invariantes* em alguns exemplos simples de grupos de Lie de dimensão 3.

   (a) J. Milnor - *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups* , Advances in Math. (21) 293-329 (1976).

5. **(O teorema de Rauch)**

   Uma ideia muito importante, que veremos se tiver tempo, é obter informação sobre uma variedade por uma comparação com os espaços de curvatura constante (ou positiva $\kappa = \mu^2 > 0$, ou negativa $\kappa = -\mu^2$, ou nulo $\kappa = 0$). Um dos primeiros resultados nessa linha é o teorema de Rauch, que é uma comparação de comprimentos de campos de Jacobi, numa variedade Riemanna (M, g) e numa variedade modelo (M_κ, g_κ).

   (a) M. do Carmo *Geometria Riemanniana*, IMPA publicações.

6. **O teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll**

   Um exemplo simples de uma variedade não compacta com curvatura (de Ricci) positiva é um parabolóide de revolução. Nessa variedade nós vemos muitas geodésicas, mas observamos que as que não passam pela origem tem pontos de auto-interseção e as que passam pela origem também não minimizam comprimento entre os pontos (para pontos suficientemente distantes). Isso é dizer, o paraboloide não admite uma *linha*. O teorema de Cheeger-Gromoll diz que qualquer variedade completa M com curvatura de Ricco não-negativa e que admite uma linha deve decompor-se isometricamente num produto $M = N \times \mathbb{R}$.

(a) P. Petersen - *Riemannian Geometry*,

(b) J. Cheeger e D. Gromoll - *The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature.*

7. **(A decomposição de Hodge)**

Nós já vimos o Laplaciano agindo em funções $\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$. Um operador parecido pode ser definido em formas diferenciais. Para $\alpha \in \mathcal{E}^k(M)$, temos $\Delta\alpha = (dd^* + d^*d)\alpha$. Em espaço Euclideano, Δ age pelo Laplaciano normal nos coeficientes de α, mas para uma métrica mais geral, o operador toma uma forma mais geral. O resultado para apresentar agora é como $\mathcal{E}^k(M)$ decompõe-se como a soma direita do núcleo de Δ e a sua imagem.

(a) F. Warner - *Foundations of Differentiable Manifolds*, Springer GTM.

8. **(Mudança conformal de métricas)**

Uma das transformações mais simples de uma métrica é multplicá-la por uma função positiva. Isso se chama uma mudança conforme, por que comprimentos calculados na nova métrica são diferentes, mas ângulos continuam iguais. Queremos saber como uma transformação conforme pode mudar a curvatura de uma mética. Esse projeto será para calcular o tensor de curvatura da nova mética, e mostrar como a versão disso para a curvatura escalar dá a equação de Yamabe. Na apresentação, não será necessário a conta inteira, mas terá que definir o produto de Kulkarni-Nomizu e a curvatura de Weyl, por exemplo.

(a) J. Viaclovsky - *Topics in Riemannian Geometry*, notas.

9. **(Ergodicidade do fluxo geodésico em curvatura negativa)**

O fluxo geodésico pode ser considerado um campo vetorial definido no espaço tangente unitário. Questões interessantes incluem as da dinâmica desse campo. Um resultado relativamente clássico é da *ergodicidade* desse flow, quando a variedade M é compacta e a sua mética tem curvatura negativa. Eu sei pouco desse resultado, mas um aluno em sistemas dinâmicos poderia apresentar isso.

(a) W. Ballmann - *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, notas.

10. **(Funções de Morse e o fluxo gradiente)**

Quando um campo vetorial é o gradiente de uma função, o fluxo do campo pode ser utilizado para relacionar a topologia da variedade com o conjunto de pontos críticos da função. A primeira hipótese é que os pontos critícos são isolados e não-degenerados. Com isso podemos entender a topologia da variedade em termos de como o fluxo leva pontos críticos para pontos críticos.

(a) J. Milnor - *Morse Theory*,

(b) A. Banyaga e D. Hurtubise - *Lectures on Morse Homology*.

11. **(Introdução à Variedades Kählerianas)** A condição de uma métrica Riemanniana definida numa variedade complexa ser Kähleriana é a condição de que a métrica é maximalmente compatível com a estrutura complexa. Essa frase não é muito precisa, mas a idéia pode ser desenvolvida. Nessa palestra, será explicado as definições básicas de variedades complexas e quase-complexas e as métricas Hermitianas definidas nelas. Poderia demonstrar, por exemplo, a relação que sempre vale entre a derivada covariante da estrutura quase-complexa, o tensor de Nijenhuis e a derivada exterior da forma fundamental.

    (a) L. Kaufmann - *Fundamentos da Geometria Complexa: aspectos geométricos, topológicos e analíticos*, dissertação.

    (b) Kobayashi e Nomizu - *Foundations of Differential Geometry*.